

УДК 517.9

Брошак О. - ст. гр. КА-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА В ПРЯМОКУТНОМУ СТЕРЖНІ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Самборська О.М.

Broschak O.

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

HEAT PROPAGATION IN A RECTANGULAR ROD

Supervisor: Samborska O.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, крайові та початкові умови, метод Фур'є.

Key words: heat conduction equation, boundary and initial conditions, Fourier solution.

Початкова температура нескінченного прямокутного стержня $0 \leq x \leq p$, $0 \leq y \leq s$, $-\infty < z < +\infty$ задана функцією $f(x, y) = x^2 y(p - x)(s - y)$. Потрібно визначити температуру в стержні, якщо частина поверхні стержня $x = 0$, $0 < y < s$ теплоізольована, а інша частина його поверхні підтримується при нульовій температурі.

Нехай $T(x, y, t)$ – температура стержня в момент часу t в точці з координатами x, y при довільному значенні z . Ця функція повинна задовольняти рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

(1)

крайові умови $T'_x(0, y, t) = 0$, $T(p, y, t) = 0$, $T(x, 0, t) = 0$, $T(x, s, t) = 0$

(2)

та початкову умову $T(x, y, 0) = f(x, y)$.

(3)

Розв'язок задачі шукаємо методом Фур'є: $T(x, y, t) = X(x)Y(y)\theta(t)$.

(4)

Для функцій $X(x)$ та $Y(y)$ отримаємо рівняння: $X'' + \lambda^2 X = 0$ (5), $Y'' + \mu^2 Y = 0$

(6)

та крайові умови: $X'(0) = 0$, $X(p) = 0$ (7), $Y(0) = 0$, $Y(s) = 0$.

(8)

Для функції $\theta(t)$ одержимо рівняння: $\theta' + a^2(\lambda^2 + \mu^2)\theta = 0$.

(9)

Підставивши розв'язки задач (5), (7) та (6), (8) і розв'язок рівняння (9) у формулу (4),

$$\text{отримаємо } T_{\kappa n}(x, y, t) = A_{\kappa n} e^{-a^2 w_{\kappa n}^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2p} \sin \frac{\kappa\pi y}{s},$$

(10)

$$\text{де } w_{\kappa n}^2 = \frac{\kappa^2 \pi^2}{s^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4p^2}.$$

(11)

Розв'язок задачі (1), (2), (3) шукаємо у вигляді подвійного ряду Фур'є

$$T(x, y, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{\kappa n}(x, y, t). \text{ Коефіцієнти } A_{\kappa n} \text{ обчислюємо за формулою}$$

$$A_{\kappa n} = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s f(x, y) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2p} \sin \frac{\kappa\pi y}{s} dx dy \text{ і одержуємо: при } \kappa = 2\ell \quad A_{2\ell, n} = 0,$$

$$\text{при } \kappa = 2\ell - 1 \quad A_{2\ell-1, n} = \frac{2^9 s^2 p^3 ((-1)^n (2n+1)\pi - 3)}{\pi^7 (2\ell - 1)^3 (2n+1)^4}.$$