Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Кафедра транспортних технологій

Дослідження операцій в транспортних системах
(1 частина)

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт

для студентів ОКР «Бакалавр»
з галузі знань 27 “Транспорт”
спеціальності 275 "Транспортні технології (автомобільний транспорт)"

Тернопіль – 2017

УДК 656
ББК 39.3

Укладачі:
О.П. Цьонь, кандидат технічних наук, старший викладач кафедри транспортних технологій

Ю.Я. Вовк, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій

В.О. Дзюра, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій

І.П. Вовк, кандидат економічних наук, асистент кафедри менеджменту інноваційної діяльності і підприємництва

Рецензент:
О.Л. Ляшук, д.т.н., доцент, завідувач кафедри автомобілів

Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри транспортних технологій, протокол № 1 від 01.09.2016р.

Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету машинобудування та харчових технологій, протокол № 1 від 16.09.2016р.

Цьонь О.П. Дослідження операцій в транспортних системах: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів ОКР «Бакалавр» з галузі знань 27 “Транспорт” спеціальності 275 "Транспортні технології (автомобільний транспорт)" / О.П. Цьонь, Ю.Я. Вовк, В.О. Дзюра, І.П. Вовк – Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2017. – 68 с.

Розроблено на основі: Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Дослідження операцій» (для студентів напряму 6.070101 «Транспортні технології») [Електронний ресурс] / укладачі: М.Є. Корольов, Т.В. Непомняща. – Електрон. дані – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2011.

УДК 656
ББК 39.3

Зміст

Лабораторна робота №1

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета заняття: вивчення графічного методу розв'язування задач лінійного програмування, що містять дві незалежні змінні.

Стисла теоретична довідка

Загальна задача лінійного програмування формулюється наступним чином: знайти максимум (мінімум) цільової функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max(\min),$$

за умови обмежень на змінні

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_n \geqslant 0.$$

За умови наявності не більше двох незалежних змінних задача допускає графічну інтерпретацію та може бути розв'язана графічним методом. Кожне обмеження-нерівність задачі визначає на площині півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i = \overline{1, m})$. Переріз всіх таких півплощин, які відповідають нерівностям задачі визначають на площині ***багатокутник розв'язків*** (***область допустимих розв'язків*** (ОДР) задачі лінійного програмування). Ця область, якщо вона існує і визначена, є опуклим багатокутником. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично виглядає як сімейство паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то *екстремального значення цільова функція набуває в одній з вершин багатокутника розв'язків*.

Для розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом необхідно:

1) в прямокутній системі координат (x_1, x_2) побудувати прямі лінії, рівняння яких отримуються заміною в системі обмежень задачі знаків нерівностей на знаки рівностей;

2) визначити і побудувати півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі;

3) визначити багатокутник розв'язків задачі;

4) побудувати вектор градієнту $\text{grad}\,\overline{Z} = \{c_1, c_2\}$, що спрямований у бік зростання значень цільової функції задачі;

5) побудувати будь-яку пряму, перпендикулярну вектору $\mathrm{grad}\,\overline{Z}$, що перетинає багатокутник розв’язків;

6) переміщуючи цю пряму у напрямі вектору $\mathrm{grad}\,\overline{Z}$ (для задач максимізації) чи у протилежному напрямі (для задач мінімізації), знайти граничну вершину багатокутника розв’язків, у якій цільова функція досягає екстремального значення;

7) визначити координати знайденої таким чином вершини багатокутника розв’язків та обчислити значення цільової функції у цій точці.

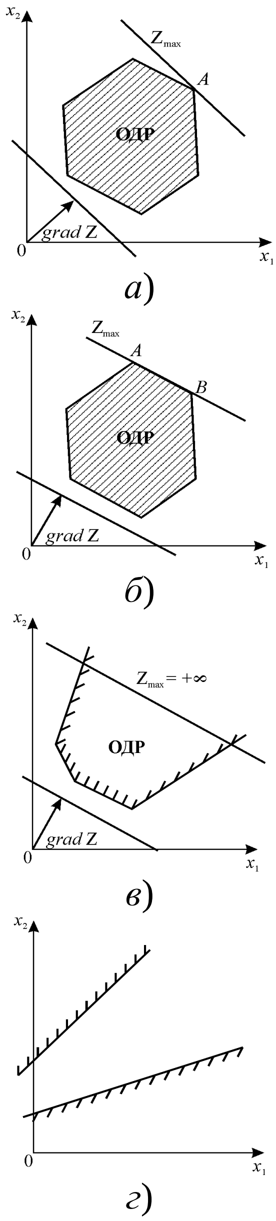

Рисунок 1.1 — Випадки розв’язків задачі ЛП графічним методом

При розв’язуванні задачі лінійного програмування графічним методом можливі наступні випадки (рис. 1.1):

а) задача має єдиний оптимальний розв’язок, що досягається у одній вершині багатокутника розв’язків (рис. 1.1, *а*);

б) задача має безліч оптимальних розв’язків, всі з яких належать відрізку на границі багатокутника розв’язків (рис. 1.1, *б*);

в) задача не має оптимального розв’язку, оскільки цільова функція не обмежена згори чи знизу (рис 1.1, *в*);

г) задача не має оптимального розв’язку, оскільки система обмежень задач несумісна та багатокутника розв’язків не існує (рис. 1.1, *г*);

При цьому слід зауважити, що задача може мати оптимальний розв’язок за необмеженості області допустимих розв’язків.

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

Оптовий склад загальною площею S = 1000 $м^2$ надає послуги зі зберігання вантажів двох типів А і Б. Для забезпечення належного зберігання склад має в наявності N = 500 одиниць складської тари. Зберігання тонни вантажу А потребує a_1 ($м^2$) складських площ та b_1 одиниць тари, зберігання тонни вантажу Б потребує a_2 ($м^2$) складських площ та b_2 одиниць тари. Прибуток складу на місяць від зберігання тонни вантажу А складає α *грн.*, вантажу Б — β грн. Визначити, яку кількість кожного вантажу необхідно зберігати на складі, щоб отримати найбільший прибуток при виконанні додаткових умов:

1) ***варіанти* 1–8**: кількість вантажу А на складі повинна перевищувати кількість вантажу Б щонайменше на c тонн;

2) ***варіанти* 9–16**: кількість вантажу Б на складі повинна перевищувати кількість вантажу А щонайменше на c тонн;

3) ***варіанти* 17–23**: кількість вантажу А на складі повинна перевищувати кількість вантажу Б щонайменше у c разів;

4) ***варіанти* 24–30**: кількість вантажу Б на складі повинна перевищувати кількість вантажу А щонайменше у c разів.

Вихідні дані задачі за варіантами наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 — Вихідні дані до виконання лабораторної роботи.

Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c	Вар.	a_1	a_2	b_1	b_2	α	β	c
1	3	7	4	2	25	40	50	16	6	4	9	5	30	15	18
2	5	6	3	7	10	25	30	17	6	5	1	3	15	20	1,5
3	4	7	3	4	15	25	40	18	4	7	6	5	30	25	2
4	2	5	3	2	25	18	45	19	18	14	6	7	15	20	1,2
5	4	3	8	5	15	10	30	20	7	5	5	11	17	40	2,5
6	7	5	4	9	12	21	15	21	10	4	5	9	10	25	3
7	6	5	8	3	16	11	35	22	8	3	6	11	20	10	1,4
8	9	5	3	5	15	19	40	23	12	17	3	5	14	24	2
9	6	4	5	9	15	23	30	24	10	11	5	4	25	20	2
10	4	7	5	6	10	12	30	25	9	5	6	7	20	30	3
11	8	7	6	11	15	12	45	26	4	7	9	3	10	16	3
12	7	4	4	9	10	25	15	27	8	3	7	8	14	15	2,5
13	10	5	6	7	21	16	30	28	9	12	4	5	21	9	1,5
14	5	8	7	6	21	32	15	29	8	5	4	9	16	15	2
15	4	11	3	1	20	10	12	30	3	7	10	8	20	15	2

Приклад виконання завдання

Оптовий склад загальною площею S = 300 *м*^{2} надає послуги зі зберігання вантажів двох типів А і Б. Для забезпечення належного зберігання склад має в наявності N = 180 одиниць складської тари. Зберігання тонни вантажу А потребує 3,0 *м*^{2} складських площ та 3 одиниці тари, зберігання тонни вантажу Б потребує 5,0 *м*^{2} складських площ та 2 одиниці тари. Прибуток складу на місяць від зберігання тонни вантажу А складає 10,0 *грн*., вантажу Б — 30,0 *грн*. Визначити, яку кількість вантажів А і Б необхідно зберігати на складі, щоб отримати найбільший прибуток, якщо кількість вантажу Б на складі не повинна бути більшою ніж кількість вантажу А на 30 *тонн*.

Розв'язок.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1 та x_2 — відповідно кількість вантажів А і Б, що необхідно зберігати на складі. Тоді, за умовою задачі, необхідно максимізувати місячний прибуток складу

$$Z = 10x_1 + 30x_2 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на складські площі

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 300;$$

– на наявну кількість складської тари

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 180;$$

– на відношення між кількістю вантажів різних видів, що знаходиться на зберіганні

$$-x_1 + x_2 \leqslant 30;$$

– на невід’ємність змінних задачі

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

Задача має дві незалежні змінні, тому її можна розв’язати графічним методом. Побудуємо в системі координат x_1 , x_2 прямі, що відповідають обмеженням задачі, обернувши нерівності на рівності. Багатокутник 0ABC визначає область допустимих рішень задачі (заштрихована на рис. 1.2). Координати будь-якої з її точок задовольняють систему обмежень задачі.

Для знаходження точки, у якій цільова функція задачі досягає найбільшого значення побудуємо з початку координат вектор $\operatorname{grad} \overline{Z} = \{10; 30\}$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі.

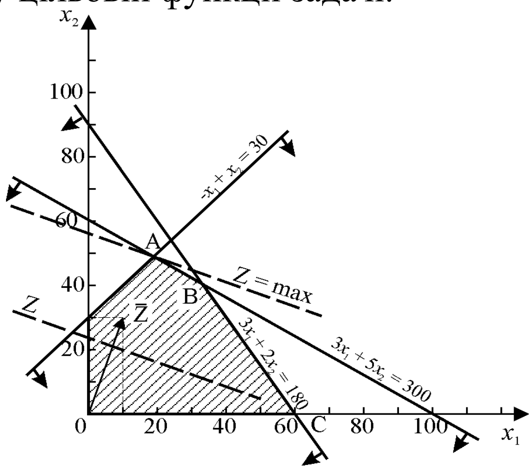

Рисунок 1.2 — Розв’язання задачі графічним методом

Вектор $\overline{z}$ задає напрямок збільшення значень цільової функції. Проведемо перпендикулярно йому будь-яку пряму, а потім пересуватимемо її паралельно самій собі у напрямі вектора $\overline{z}$ доти, доки він не торкнеться крайньої точки на області допустимих рішень (відповідні прямі показані на рис. 1.2 пунктирною лінією). Такою точкою буде точка А, координати якої визначають оптимальне рішення задачі.

Для точного знаходження координат точки А необхідно вирішити систему двох лінійних рівнянь, що відповідають двом прямим, які перетинаються у цій точці:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 300; \\ -x_1 + x_2 = 30. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь отримаємо: $x_1 = 18{,}75$; $x_2 = 48{,}75$, тобто для досягнення максимального прибутку на складі необхідно зберігати 18,75 тонн вантажу А та 48,75 тонн вантажу Б. За таких умов місячний прибуток складу складе $Z_{\max} = 10 \cdot 18{,}75 + 30 \cdot 48{,}75 = 1650$ *грн*.

Проаналізуємо використання складських площ та тари. Складські площі, очевидно, будуть використані повністю. Це витікає з того, що пряма $3x_1 + 5x_2 = 300$ (вона виражає обмеження на складські площі) проходить через екстремальну точку А. Підставляючи оптимальні значення змінних задачі у нерівність, що відповідає обмеженню на складську тару, отримаємо

$$3 \cdot 18{,}75 + 2 \cdot 48{,}75 = 153{,}75 < 180.$$

Таким чином, $180 - 153{,}75 = 26{,}75 \approx 26$ одиниць складської тари не будуть використані для зберігання вантажів.

Контрольні запитання

1. Дайте формулювання задачі лінійного програмування в загальному вигляді.
2. За яких умов задачу лінійного програмування можна розв’язати графічним методом?
3. Що таке область допустимих рішень задачі та які її властивості?
4. Як графічно зображується цільова функція задачі? Як визначити напрямок її зростання та спадання?
5. У яких випадках задача лінійного програмування має один розв’язок? Не має розв’язків? Має безліч розв’язків?

Лабораторна робота №2

СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ ПОЧАТКОВОГО ДОПУСТИМОГО БАЗИСНОГО РІШЕННЯ

Мета заняття: вивчення алгоритму симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування за наявності початкового допустимого базисного рішення.

Стисла теоретична довідка

Симплекс-метод є обчислювальною процедурою, що застосовується для рішення задачі лінійного програмування, записаній у стандартному (канонічному) вигляді. У задачі лінійного програмування, записаній у стандартному вигляді, цільова функція повинна бути *мінімізована*, а всі обмеження повинні бути задані у вигляді *рівностей* з *невід'ємними змінними*. Звести задачу з загального вигляду до канонічного можна за допомогою наступних правил:

а) *максимізація* цільової функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ рівнозначна *мінімізації* цільової функції, у якій знаки при змінних замінені на протилежні: $Z' = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$;

б) обмеження у вигляді нерівностей «$\leqslant$» перетворюються на рівності введенням до них додаткової невід'ємної змінної з коефіцієнтом +1. Наприклад, нерівність $3x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 5$ перетворюється на рівність $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5$, де нова змінна $x_4 \geqslant 0$;

в) обмеження у вигляді нерівностей «$\geqslant$» перетворюються на рівності введенням до них додаткової невід'ємної змінної з коефіцієнтом –1. Наприклад, нерівність $5x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 4$ перетворюється на рівність $5x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4$, де нова змінна $x_5 \geqslant 0$;

г) якщо деяка змінна x_k може набувати будь-яких значень, а не тільки невід'ємних, її можна привести до виду $x_k = x_k' - x_k''$, де $x_k' \geqslant 0$ та $x_k'' \geqslant 0$.

Таким чином, зведення задачі лінійного програмування до канонічного вигляду може викликати необхідність введення додаткових невід'ємних змінних.

Базисним допустимим розв'язком задачі, що має n змінних та m обмежень, називається вектор значень незалежних змінних задачі, що задовольняє обмеженням задачі, та у якому m компонентів є невід'ємними (***базисні*** змінні), а інші $(n-m)$ компонентів дорівнюють нулю (***вільні*** змінні). Базисні змінні утворюють ***базис***. Якщо одна чи декілька з базисних змінних набувають нульового значення, то такий базис називають ***виродженим***.

Процес розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом зручно проводити у так званій ***симплекс-таблиці*** (таблиця 2.1).

У стовпчику *Базис* записують базисні змінні поточного базисного допустимого розв'язку (*опорного плану*) задачі у тій послідовності, в якій вони розташовуються у системі обмежень задачі.

У стовпчику C (стовпчик вільних членів) записуються відповідні значення базисних змінних поточного опорного плану задачі.

Таблиця 2.1 — Симплекс-таблиця

Базис	C	x_1	x_2	…	x_n
x_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	…	…	…	…
$-Z$	$-Z_0$	c_1	c_2	…	c_n

У наступних стовпчиках, кількість яких відповідає кількості змінних задачі (враховуючи додані), записують відповідні коефіцієнти кожного обмеження задачі.

Нижній рядок симплекс-таблиці називається ***індексним*** рядком. У стовпчику вільних членів цього рядка записують поточне значення цільової функції задачі. У інших стовпчиках цього рядка на початку розв'язування записують коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі.

Симплекс-алгоритм розв'язування задачі полягає у виконанні чотирьох кроків:

1) ***перевірка поточного опорного плану задачі на оптимальність***. Якщо всі елементи індексного рядка у симплекс-таблиці (за виключенням значення у стовпчику *C*) ***є невід'ємними***, то даний опорний план є ***оптимальним*** розв'язком задачі і процес рішення припиняється. Інакше виконують крок 2;

2) ***знаходження змінної для включення до базису***. Відшукують у індексному рядку стовпчик, з мінімальним від'ємним значенням (якщо таких значень декілька, можна вибрати будь-який з них). Цей стовпчик називається ***провідним стовпчиком***, а вільна змінна, що відповідає цьому стовпчику, у наступному опорному плані задачі стане базисною;

3) ***знаходження змінної для виключення з базису***. Відшукують рядок, якому відповідає найменше додатне відношення чисел зі стовпчика вільних членів *C* до відповідних чисел провідного стовпчика. Цей рядок називається ***провідним рядком***, а базисна змінна, що відповідає цьому рядку, у наступному опорному плані задачі стане вільною. На перетині провідного рядка та провідного стовпчика знаходиться ***провідний елемент***. Зауважимо, що якщо всі елементи провідного рядка від'ємні чи дорівнюють нулю, то задача лінійного програмування не має розв'язку з причини необмеженого зростання цільової функції задачі і процес рішення припиняється.

4) ***побудова нового опорного плану задачі***. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюють за наступними правилами:

а) коригують набір базисних змінних, записуючи у стовпчику *Базис* замість змінної у провідному рядку змінну з провідного стовпчика;

б) всі значення у провідному рядку ділять на провідний елемент;

в) всі значення у провідному стовпчику заповнюють нулями;

г) інші елементи симплекс-таблиці перераховуються за формулою:

$$\text{НЗ} = \text{ПЗ} - \frac{\text{ЕР} \times \text{ЕС}}{\text{ЕП}}, \tag{2.1}$$

де НЗ — нове значення елемента; ПЗ — попереднє значення елемента; ЕР — елемент, що стоїть навпроти шуканого у провідному рядку; ЕС — елемент, що стоїть навпроти шуканого у провідному стовпчику; ЕП — провідний елемент.

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

Автотранспортне підприємство здійснює доставку клієнтам трьох видів вантажів (I, II, III). Для виконання перевезень вантажів підприємство має ресурси у кількості: транспортні засоби — 200 *автомобіле-годин*, вантажники — 400 *людино-годин*, навантажувально-розвантажувальні механізми — 90 *машино-годин*. Витрати кожного виду ресурсів на доставку 1 *тонни* вантажу різних видів неоднакові та подані у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 — Витрати ресурсів на доставку 1 *тонни* вантажів

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на доставку 1 *тонни* вантажів		
	I	II	III
Транспортні засоби, *автомобіле-годин/т*	a_1	b_1	c_1
Вантажники, *людино-годин/т*	a_2	b_2	c_2
Навантажувально-розвантажувальні механізми, *маш.-годин/т*	a_3	b_3	c_3

Прибуток автотранспортного підприємства від доставки клієнтам 1 *тонни* вантажу I складають α *грн*., вантажу II — β *грн*., вантажу III – γ *грн*.

Визначити, яку кількість вантажу кожного виду необхідно доставляти клієнтам, щоб прибуток підприємства був максимальним.

Вихідні дані для розв’язування задачі по варіантах наведені у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 — Вихідні дані до виконання лабораторної роботи 2

Вар.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
1	3	5	2	6	5	1	2	8	3	4	5	10
2	7	3	1	3	2	2	4	4	3	6	7	10
3	4	5	1	6	5	3	2	6	1	7	9	6
4	9	5	0	5	3	2	4	6	3	15	8	9
5	5	6	3	2	5	2	5	6	1	11	6	5
6	8	3	2	6	5	1	4	7	2	7	4	4
7	3	8	1	2	7	2	4	4	1	3	5	3
8	5	10	1	3	9	1	4	7	3	9	7	8
9	3	5	2	6	5	2	2	8	3	7	9	10
10	9	3	1	3	2	1	4	4	3	8	3	6
11	4	5	1	6	5	3	2	4	1	8	5	7
12	6	7	1	5	4	3	5	2	1	7	10	4

Продовження таблиці 2.3

13	4	7	2	3	5	1	5	5	3	8	5	10
14	4	9	2	6	7	0	5	8	3	9	10	10
15	5	6	2	4	10	3	2	9	1	7	8	4
16	4	5	2	6	4	2	2	8	1	9	5	8
17	7	3	2	3	5	1	4	2	2	8	5	7
18	6	4	4	4	3	2	6	5	3	8	4	6
19	5	4	1	5	5	2	1	2	2	12	14	9
20	7	5	2	6	4	3	2	4	1	15	8	5
21	3	4	3	6	3	1	5	2	2	8	15	12
22	6	4	1	4	7	2	6	5	1	8	9	6
23	3	6	1	2	5	2	5	8	1	5	6	5
24	3	5	2	5	5	1	2	4	4	15	14	9
25	4	5	1	6	3	2	1	6	2	15	10	12
26	3	5	1	7	5	0	2	6	1	10	5	9
27	3	9	1	2	7	2	8	8	1	7	9	10
28	8	3	1	3	6	2	4	4	1	10	5	5
29	8	5	1	6	9	1	6	5	1	5	8	7
30	5	4	2	5	7	1	1	3	0	8	15	5

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
2	4	1	4	5	1	5	2	2	5	6	10

Розв'язок.

Позначимо як x_1, x_2, x_3 — відповідно кількість вантажу I, II та III виду, яку доставляє підприємство клієнтам. Тоді математичну модель задачі можна подати у наступному вигляді.

Максимізувати прибуток підприємства від перевезень

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на транспортні ресурси

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 200;$$

– на трудові ресурси

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leqslant 400;$$

– на ресурси навантажувально-розвантажувальних механізмів

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 90;$$

– на невід'ємність змінних задачі

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0.$$

Для рішення задачі симплекс-методом зведемо її до канонічного виду. Помножимо праву частину виразу для цільової функції на –1 (для отримання задачі мінімізації) та перетворимо нерівності виду «$\leqslant$» на рівності шляхом введення до них додаткових невід'ємних змінних x_4, x_5 та x_6. Отримаємо задачу:

мінімізувати

$$Z' = -5x_1 - 6x_2 - 10x_3 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 200;$$
$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 400;$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 90;$$
$$x_1 \ldots x_6 \geqslant 0.$$

Початкове допустиме базисне рішення очевидне (його утворюють додані змінні та праві частини рівнянь задачі, поданої у канонічному вигляді):

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 200,\ x_5 = 400,\ x_6 = 90,\ Z' = 0.$$

Складемо початкову симплекс-таблицю задачі (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4 — Початковий опорний план задачі

Базис	*C*	x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	x_4	x_5	x_6
$\mathbf{x_4}$	200	2	**4**	**5**	1	0	0
x_5	400	4	5	2	0	1	0
x_6	90	1	**1**	**2**	0	0	1
$-Z'$	0	–5	–6	–10	0	0	0

У стовпчик *Базис* записуємо базисні змінні x_4, x_5 та x_6. У стовпчик вільних членів *C* записуємо їх значення у початковому базисному рішенні, що відповідають правим частинам системи обмежень задачі. У стовпчики $x_1 - x_6$ записуємо коефіцієнти при відповідних змінних у системі обмежень задачі. У індексному рядку стовпчика *C* записуємо поточне значення цільової функції $Z' = 0$, а у стовпчики $x_1 - x_6$ — коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції задачі.

Початковий опорний план задачі ***не є оптимальним***, оскільки у індексному рядку наявні елементи з від'ємними значеннями.

Відшукуємо у індексному рядку ***мінімальне від'ємне значення***. Воно знаходиться у стовпчику x_3 та дорівнює –10. Стовпчик x_3 є ***провідним стовпчиком***, а вільну змінну x_3 у наступному опорному плані задачі включимо до базису.

Для визначення змінної, яку слід виключити з базису, розділимо значення у стовпчику *C* на відповідні значення провідного стовпчика:

рядок x_4 : 200 / 5 = 40;   рядок x_5 : 400 / 2 = 200;
рядок x_6 : 90 / 2 = 45.

Таким чином, змінну x_4, якій відповідає ***найменше додатне*** з найдених значень у наступному опорному плані слід виключити з базису, а рядок x_4 є ***провідним рядком***. На перетині провідного рядка та провідного стовпчика стоїть ***провідний елемент***, що дорівнює 5.

Побудуємо покращений опорний план у новій симплекс-таблиці (таблиця 2.5) за наступними правилами:

1) замість змінної x_4 у стовпчик *Базис* записуємо змінну x_3;

2) всі елементи провідного рядка ділимо на 5;

3) у провідному стовпчику у всіх рядках, окрім провідного записуємо нулі;

4) інші елементи нової симплекс-таблиці розраховуємо за формулою (1). Наприклад, елемент, що знаходився у рядку x_6 і стовпчику x_2 та дорівнював 1, розраховується наступним чином. Навпроти цього елемента у провідному рядку стоїть значення 4, а навпроти цього елемента у провідному стовпчику стоїть значення 2. Так як провідний елемент дорівнює п'яти, то за формулою (1) маємо:

$$\text{Нове значення} = 1 - \frac{4 \times 2}{5} = 1 - 1{,}6 = -0{,}6 \ .$$

Використані для розрахунку значення показані у таблиці 2.4 напівжирним курсивом та стрілками.

Таблиця 2.5 — Покращений опорний план задачі (2 ітерація)

Базис	*C*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	40	0,4	0,8	1	0,2	0	0
x_5	320	3,2	3,4	0	– 0,4	1	0
x_6	10	0,2	– 0,6	0	– 0,4	0	1
$-z'$	400	– 1	2	0	2	0	0

Переглянувши індексний рядок бачимо, що отриманий новий опорний план задачі не є оптимальним, оскільки містить від'ємне значення (–1) у стовпчику x_1. Діючи аналогічно описаному вище, вводимо до базису змінну x_1, виключаємо з базису змінну x_6, та переходимо до нового опорного плану (таблиця 2.6).

Таблиця 2.6 — Покращений опорний план задачі (3 ітерація)

Базис	С	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	20	0	2	1	1	0	–2
x_5	160	0	13	0	6	1	–16
x_1	50	1	–3	0	–2	0	5
$-z'$	450	0	–1	0	0	0	5

Цей опорний план також не є оптимальним, оскільки у індексному рядку міститься від'ємне значення (–1) у стовпчику x_2. Вводячи до базису змінну x_2 та виключаючи з базису змінну x_3 переходимо до нового опорного плану задачі (таблиця 2.7).

Таблиця 2.7 – Оптимальний план задачі

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	0	1	0,5	0,5	0	–1
x_5	30	0	0	–6,5	–0,5	1	–3
x_1	80	1	0	1,5	–0,5	0	2
$-Z'$	460	0	0	0,5	0,5	0	4

Цей опорний план ***є оптимальним*** (у індексному рядку ***немає від'ємних значень***). Таким чином, оптимальний розв'язок задачі знайдено (змінні беремо зі стовпчика *Базис*, а їх значення зі стовпчика *C*):

$$x_1 = 80; \qquad x_2 = 10; \qquad Z_{\max} = 460.$$

Для досягнення максимального прибутку у 460 *грн*., підприємству необхідно доставити 80 *тонн* вантажу I та 10 *тонн* вантажу II.

До процедури розв'язування та оптимального розв'язку задачі слід зробити деякі зауваження:

– при розрахунках у стовпчику *C* у рядках змінних задачі ***ніколи не може з'явитися від'ємне значення***. Така ситуація свідчить про невірні обчислення чи неправильний вибір провідного стовпчика;

– обсяги доставки вантажу III виду дорівнюють нулю, оскільки змінна x_3 не є базисною. Знаходження у базисі змінної x_5, яка входить в обмеження за трудовими ресурсами, показує, що $x_5 = 30$ *людино-годин* будуть не використані. Ресурси ж транспорту та навантажувально-розвантажувальних механізмів будуть використані повністю.

Контрольні запитання

1. Що таке канонічний вид задачі лінійного програмування? Як звести задачу, подану у загальному вигляді, до канонічного вигляду?
2. Дайте наступні визначення: *базис*, *базисне допустиме рішення*, *базисна змінна*, *вільна змінна*, *вироджений план*?
3. Як складається симплекс-таблиця?
4. У якому випадку опорний план задачі, записаний у симплекс-таблиці буде оптимальним?
5. Як визначити провідний рядок, провідний стовпчик та провідний елемент симплекс-таблиці?
6. Викладіть симплекс-алгоритм та правила перетворення симплекс-таблиць.

Лабораторна робота №3

СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ВІДСУТНОСТІ ПОЧАТКОВОГО ДОПУСТИМОГО БАЗИСНОГО РІШЕННЯ

Мета заняття: вивчення алгоритму породження початкового допустимого базисного рішення задачі лінійного програмування методом утворення штучного базису.

Стисла теоретична довідка

У випадках, коли до системи обмежень задачі лінійного програмування, входять нерівності виду «⩾» чи рівності, постає проблема пошуку початкового допустимого базисного рішення. Для його визначення розроблено декілька методів, найбільш поширеним з яких є ***метод штучного базису***.

Ідея методу штучного базису полягає в заміні вихідної задачі лінійного програмування, заданої у канонічній формі, розширеною задачею наступного виду (її називають ***М-задачею***):

знайти мінімум цільової функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m} \Rightarrow \max(\min)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0$$

Тут M — достатньо велике додатне число.

Тоді змінні x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} утворюють базис (що називають ***штучним***), який може бути використаний у якості початкового допустимого базисного рішення.

Складова цільової функції $W = Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m}$ називається ***штучною цільовою функцією***. Тоді процес знаходження початкового базисного рішення полягає у мінімізації штучної цільової функції та отриманні опорного плану задачі, у якому кожна зі *штучних* змінних x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} буде дорівнювати нулю, а відповідно, і значення штучної цільової функції також буде нульовим.

Процес рішення задачі лінійного програмування у загальному вигляді описати у вигляді наступної послідовності дій:

1) привести задачу до канонічного виду;

2) додати у кожне рівняння, утворене з обмежень виду «⩾» та «=» по одній штучній змінній з коефіцієнтом +1. Ці штучні змінні у сполученні зі змінними, що додані у обмеження виду «⩽» будуть утворювати початковий опорний план задачі;

3) утворити штучну цільову функцію з доданку штучних змінних;

4) виразити штучну цільову функцію через вільні змінні;

5) скласти початкову симплекс таблицю. Симплекс-таблиця розширеної задачі містить нижче індексного рядка ще один рядок — індексний рядок для штучної цільової функції (таблиця 3.1);

Таблиця 3.1 — Симплекс-таблиця розширеної *M*-задачі

Базис	C	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	0	0	…	0
x_{n+m}	b_m	…	…	…	…	0	0	…	1
$-Z$	$-Z_0$	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0
$-W$	$-W_0$	m_1	m_2	…	m_n	0	0	…	0

6) до складеної таблиці застосовують симплекс-алгоритм (див. практичне заняття №2) до досягнення ***мінімізації штучної цільової функції***, тобто до моменту, коли ***у індексному рядку штучної цільової функції задачі всі значення будуть невід'ємні***. При цьому провідний стовпчик обирають за значеннями нижнього рядка симплекс-таблиці;

7) після мінімізації штучної цільової функції можливі два випадки:

а) якщо штучна цільова функція мінімізована, але її значення ***не дорівнює нулю*** і у базисі задачі наявні штучні змінні, то вирішувана задача лінійного програмування ***не має жодного допустимого базисного розв'язку*** і процес розв'язування припиняється;

б) якщо штучна цільова функція мінімізована, її значення дорівнює нулю у базисі задачі немає жодної штучної змінної, то перший етап розв'язування закінчено — отриманий початковий допустимий базисний розв'язок задачі.

8) з симплекс таблиці видаляють стовпчики, що відповідають штучним змінним розширеної задачі та індексний рядок штучної цільової функції, і застосовують надалі симплекс-алгоритм до досягнення оптимального рішення задачі.

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

Підприємству необхідно перевезти залізницею вироби трьох видів: виробів I виду не більше p_1 одиниць, виробів II виду не менше p_2 одиниць, виробів III виду не менше p_3 одиниць.

Залізниця для перевезення може виділити спеціально обладнані вагони трьох типів: A, B і C. Для повного завантаження вагону до нього необхідно завантажувати вироби всіх трьох видів. При цьому до вагону типу A входять a_1 виробів I виду, a_2 виробів II виду, a_3 виробів третього виду; до вагону типу B входять b_1 виробів I виду, b_2 виробів II виду, b_3 виробів третього виду; до вагону типу C входять c_1 виробів I виду, c_2 виробів II виду, c_3 виробів третього виду.

Плата за перевезення вантажів у вагоні типу A складає α *грн.*, у вагоні типу B — β *грн.*, у вагоні типу C — γ *грн.*

Визначити, скільки вагонів кожного типу слід використати для перевезення, щоб сумарна плата від перевезення вантажів була найменшою.

Вихідні дані для розв’язування задачі по варіантах наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 — Вихідні дані до виконання лабораторного заняття 3

Вар.	p_1	p_2	p_3	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
1	562	176	282	8	4	4	9	1	6	10	7	1	210	180	200
2	340	328	525	7	8	9	4	2	6	3	4	6	190	225	270
3	150	120	150	2	2	8	8	4	5	6	19	7	110	180	200
4	190	200	120	5	10	2	4	2	5	9	7	5	250	150	220
5	320	188	190	7	6	9	6	3	1	9	6	8	250	220	510
6	140	160	120	2	4	2	6	6	5	8	4	4	150	360	300
7	240	180	210	5	5	4	6	4	7	3	3	9	200	190	150
8	418	237	180	10	2	9	2	1	2	9	7	1	290	390	300
9	300	220	210	8	5	6	4	7	3	6	5	3	250	220	200
10	140	200	180	4	7	8	8	5	6	7	4	5	290	200	300
11	165	205	180	1	4	5	8	9	4	5	5	6	225	190	180
12	160	190	240	8	5	6	4	7	9	6	3	5	190	280	220
13	270	160	210	6	4	7	6	5	8	9	5	8	290	280	250
14	302	306	277	3	7	2	2	2	7	10	6	4	290	150	250
15	270	260	300	3	4	6	3	8	9	10	2	7	190	360	280
16	270	360	400	2	3	6	5	6	3	8	5	6	170	260	250
17	546	316	530	8	6	6	8	2	7	2	2	6	210	175	300
18	240	200	260	6	3	7	2	4	8	7	5	5	295	245	200
19	250	280	200	7	4	6	4	6	5	6	4	5	205	320	190
20	285	260	385	2	7	7	5	3	6	8	5	7	340	200	250
21	390	280	200	6	4	9	8	3	6	8	7	5	200	200	360
22	420	260	240	5	3	9	7	3	4	7	5	8	200	185	370
23	250	240	250	7	4	6	4	5	9	3	4	2	250	260	200
24	206	110	386	3	1	6	3	3	4	4	2	8	150	260	310
25	140	90	50	4	6	2	7	2	2	10	6	3	200	205	270
26	160	150	150	8	2	2	7	8	2	2	2	8	240	210	280
27	220	180	180	10	6	5	2	6	7	8	4	3	220	250	200
28	160	240	175	8	8	5	5	7	8	3	5	2	180	200	320
29	180	220	200	6	8	4	4	5	7	9	6	3	200	300	250
30	320	396	380	5	4	2	4	6	10	3	5	3	150	300	200

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:

p_1	p_2	p_3	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β	γ
300	500	420	8	4	5	2	6	5	5	5	2	300	350	150

Розв’язок.

Позначимо як x_1, x_2, x_3 — відповідно кількість використаних вагонів типів А, В, С. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

мінімізувати плату підприємства за перевезення

$$Z = 300x_1 + 350x_2 + 150x_3 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях на обсяги перевезень виробів

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 300; \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geqslant 500; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geqslant 420; \end{cases}$$

та невід'ємність змінних задачі

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

Зведемо задачу до канонічного виду, перетворивши обмеження-нерівності на рівності. Для цього у першу нерівність виду «⩽» введемо додаткову невід'ємну змінну x_4 з коефіцієнтом $+1$, а до другої і третьої нерівності виду «⩾» додаткові невід'ємні змінні x_5 та x_6 з коефіцієнтами -1. Отримаємо наступну задачу.

Мінімізувати

$$Z = 300x_1 + 350x_2 + 150x_3 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 300; \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_5 = 500; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_6 = 420; \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_6 \geqslant 0.$$

Для цієї задачі немає очевидного початкового допустимого базисного рішення. Для утворення ***штучного базису*** введемо до другого та третього обмеження (утворених з нерівностей виду «⩾») по одній додатковій ***штучній*** невід'ємній змінній x_7 та x_8 з коефіцієнтом $+1$. Тоді система обмежень задачі набуває вигляду:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 300; \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_5 + x_7 = 500; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_6 + x_8 = 420; \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_8 \geqslant 0.$$

Тепер початкове допустиме базисне рішення очевидне:

$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ (вільні змінні);

$x_4 = 300$; $x_7 = 500$; $x_8 = 420$ (базисні змінні).

До базису входять дві штучні змінні — x_7 та x_8 . Таким чином, ***штучна цільова функція*** матиме вигляд $W = x_7 + x_8$.

Для виключення базисних змінних з виразу для штучної цільової функції віднімаємо «у стовпчик» з нього обмеження, що містять ці змінні. Отримуємо:

$$
\begin{array}{rl}
- & W = x_7 + x_8 \\
 & 500 = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_5 + x_7 \\
\hline
- & W - 500 = -4x_1 - 6x_2 - 5x_3 + x_5 + x_8 \\
 & 420 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_6 + x_8 \\
\hline
 & W - 920 = -9x_1 - 11x_2 - 7x_3 + x_5 + x_6
\end{array}
$$

Складаємо початкову симплекс-таблицю розширеної задачі (таблиця 3.3).

Таблиця 3.3 — Початкова симплекс-таблиця задачі

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_4	300	8	2	5	1	0	0	0	0
x_7	500	4	6	5	0	–1	0	1	0
x_8	420	5	5	2	0	0	–1	0	1
$-Z$	0	300	350	150	0	0	0	0	0
$-W$	–920	–9	–11	–7	0	1	1	0	0

Перший етап розв’язування полягає у мінімізації штучної цільової функції та отриманні початкового опорного плану задачі. Для цього застосовуємо симплекс-алгоритм до цієї таблиці, вибираючи змінну для включення до базису по значеннях індексного рядка штучної цільової функції $-W$. Таким чином, з базису виводимо змінну x_7 , а до базису вводимо змінну x_2 (таблиця 3.4).

Таблиця 3.4 — Опорний план задачі (ітерація 2)

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_4	133,3	6,67	0	3,33	1	0,33	0	–0,33	0
x_2	83,3	0,67	1	0,83	0	–0,17	0	0,17	0
x_8	3,33	1,67	0	–2,17	0	0,83	–1	–0,83	1
$-Z$	–29167	66,67	0	–141,7	0	58,3	0	–58,3	0
$-W$	–3,33	–1,67	0	2,17	0	–0,83	1	1,83	0

Тепер до базису вводимо змінну x_1, а з базису виключаємо змінну x_8 (таблиця 3.5).

Таблиця 3.5 — Початковий опорний план задачі (ітерація 3)

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_4	120	0	0	12	1	–3	4	3	–4
x_2	82	0	1	1,7	0	–0,5	0,4	0,5	–0,4
x_1	2	1	0	–1,3	0	0,5	–0,6	–0,5	0,6
$-Z$	–29300	0	0	–55	0	25	40	–25	–40
$-W$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

З таблиці 3.5 бачимо, що у базисі немає штучних змінних та значення штучної цільової функції дорівнює нулю. Таким чином, ***перший етап розрахунків завершено*** і отриманий початковий допустимий базисний розв’язок задачі. Він має вигляд:

$x_1 = 2;\ x_2 = 82;\ x_3 = 0;\ x_4 = 120;\ x_5 = x_6 = 0;\ Z = 29300.$

У подальших розрахунках ***виключаємо*** з таблиці індексний рядок штучної цільової функції та стовпчики штучних змінних x_7 та x_8 . Отриманий опорний план не є оптимальним, оскільки у індексному рядку цільової функції задачі (рядок – Z) є від’ємне значення у стовпчику x_3. Отже, рішення необхідно продовжувати. Вводимо до базису змінну x_3 , а виключаємо з базису змінну x_4 (таблиця 3.6).

Таблиця 3.6 — Оптимальний план задачі (ітерація 4)

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	10	0	0	1	0,083	–0,25	0,333
x_2	65	0	1	0	–0,142	–0,075	–0,167
x_1	15	1	0	0	0,108	0,175	–0,167
$-Z$	–28750	0	0	0	4,583	11,25	58,33

У індексному рядку симплекс-таблиці немає від’ємних значень, отже отримано оптимальний розв’язок задачі: $x_1 = 15;\ x_2 = 65;\ x_3 = 10;\ Z_{\min} = 28750.$

Таким чином, щоб досягти найменшої плати за перевезення вантажів у розмірі 28750 *грн.*, підприємству необхідно використати для перевезення 15 вагонів типу А, 65 вагонів типу В та 10 вагонів типу С.

Для визначення кількості перевезених виробів кожного виду необхідно підставити знайдені оптимальні значення змінних задачі до системи обмежень. У нашому прикладі перевозиться рівно 300 виробів виду I, 500 виробів виду II та 420 виробів виду III.

Контрольні запитання

1. У яких випадках використовується метод штучного базису?
2. Дайте визначення штучного базису та штучної змінної.
3. Як складається симплекс-таблиця розширеної M-задачі та у чому полягає її відмінність від симплекс-таблиці звичайної задачі лінійного програмування?
4. На які етапи поділяється процес розв’язку задачі лінійного програмування методом штучного базису ?
5. Яка ознака того, що задача не має жодного допустимого плану?

Лабораторна робота №4

МЕТОД «ВІДГАЛУЖЕНЬ І МЕЖ» РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета заняття: вивчення ідеї методу «відгалужень і меж» та його застосування для розв'язування задач цілочислового та частково цілочислового лінійного програмування.

Стисла теоретична довідка

У практичних задачах, що зводяться до задачі лінійного програмування, нерідко трапляються випадки, коли одна чи декілька змінних задачі мають набувати цілих значень (наприклад, коли йдеться про кількість транспортних засобів). В такому разі кажуть про задачу ***цілочислового лінійного програмування***, загальна постановка якої записується таким чином:

знайти максимум (мінімум) цільової функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max(\min),$$

за умови обмежень на змінні

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,n}); \qquad x_j \text{ — цілі. } (j = \overline{1,n}).$$

Якщо вимога цілочисловості висувається не до всіх змінних задачі, то таку задачу називають ***частково цілочисловою***.

Умова цілочисловості змінних дуже ускладнює розв'язування задачі у порівнянні зі звичайною задачею лінійного програмування. При цьому отримання цілочислового розв'язку простим округленням дробових змінних до цілого числа є недопустимим і часто дає не тільки невірний результат, а й може призвести до розв'язку, що не задовольняє систему обмежень задачі.

Тому для рішення задач цілочислового лінійного програмування застосовують спеціальні методи, найпоширенішими з яких є *методи відтинання* (алгоритми Гоморі) та *методи повернення* (метод «відгалужень і меж»).

Метод «відгалужень і меж» використовують для рішення як повністю, так і частково цілочислових задач лінійного програмування. Суть методу полягає у наступному.

Спочатку розв'язується вихідна задача лінійного програмування симплекс-методом без накладання умов цілочисловості (***послаблена задача***). Якщо всі змінні у оптимальному рішенні цілі, то шуканий оптимальний розв'язок цілочислової задачі знайдений і розв'язок припиняється.

Якщо деякі змінні у оптимальному плані послабленої задачі мають не є цілочисловими, то виконується перехід до нових планів, доки не буде отримане рішення задачі.

Нехай, наприклад, деяка змінна x_j задачі в результаті рішення є дробовою та дорівнює x_j^*. Тоді до нових планів переходять, вирішуючи дві задачі лінійного програмування:

***Задача* I.**	***Задача* II.**
$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max(\min)$	$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max(\min)$
за умов	за умов
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_m, \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_m, \end{cases}$
$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,n});$	$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,n});$
$\mathbf{x_j \leqslant [x_j^*]};$	$\mathbf{x_j \geqslant [x_j^*] + 1};$
x_j — цілі. $(j = \overline{1,n})$.	x_j — цілі. $(j = \overline{1,n})$.

Тобто, вихідна задача доповнюється додатковими обмеженнями (показані напівжирним шрифтом). У наведених задачах символ [...] позначає цілу частину числа, що міститься у дужках. Наприклад, [5,3] = 5; [2,9] = 2.

В результаті рішення цих двох задач ***можливі чотири випадки***:

1. Одна з задач розв’язків *немає*, а друга має *цілочисловий* розв’язок. Тоді цей розв’язок є розв’язком вихідної задачі.

2. Одна з задач розв’язків *немає*, а друга має оптимальний розв’язок, у якому є змінні, що мають дробові значення. Тоді розглядають другу задачу і у її оптимальному плані вибирають одну зі змінних, що має дробове значення, та будують дві задачі (I і II), аналогічні попереднім.

3. Обидві задачі мають розв’язки. Одна з задач має цілочисловий розв’язок, а друга — розв’язок, у якому наявні дробові значення змінних. Тоді порівнюють між собою значення цільової функції цих розв’язків. Якщо значення цільової функції задачі, що має цілочислове значення, більше (при рішенні на *максимум*) або менше (при рішенні на *мінімум*) ніж значення цільової функції задачі з дробовими значеннями змінних у оптимальному плані, то даний розв’язок є оптимальним для вихідної задачі. Якщо ж значення цільової функції задачі з дробовими значеннями змінних у оптимальному розв’язкові менше (більше) ніж значення цільової функції задачі з цілочисловим рішенням, то будують дві задачі, аналогічні попереднім.

4. Обидві задачі мають розв’язки та обидві у оптимальних планах мають дробові значення змінних. Тоді для побудови двох задач беруть ту задачу, для якої значення цільової функції є більшим (меншим).

Таким чином, описаний вище процес можна проілюструвати «деревом», на якому початкова вершина відповідає вихідній послабленій задачі, а гілки — відповідають оптимальним планам задач I і II. Біля кожної вершини вказується

значення цільової функції, значення змінних у оптимальному плані та ***додаткове обмеження, що вводиться до вихідної задачі***. Кожна з вершин може мати власні відгалуження. На кожному кроці обирається та вершина, яка має *найбільше* (*найменше*) значення цільової функції серед вершин, з яких можливі відгалуження. Якщо у цій вершині розв’язок є цілочисловим, то він і буде оптимальним розв’язком вихідної задачі.

Зміст лабораторного заняття
та вихідні дані до його виконання

Для виконання перевезень у трьох виробничих цехах транспортний цех підприємства має у розпорядженні n тягачів та m причепів до них. При цьому у першому цеху тягач може працювати з a причепами, у другому цеху — з b причепами, у третьому цеху — з c причепами. Змінна продуктивність тягача у першому цеху дорівнює P_1 *т/зміну*, у другому цеху — P_2 *т/зміну*, у третьому цеху — P_3 *т/зміну*. Необхідно розподілити тягачі та причепи між цехами таким чином, щоб їх сумарна змінна продуктивність була максимальною.

Вихідні дані для виконання завчання по варіантах наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 — Вихідні дані до виконання лабораторного заняття 4

Вар.	n	m	a	b	c	P_1	P_2	P_3
1	14	19	4	1	3	25	10	25
2	10	15	3	4	1	24	30	16
3	15	16	3	1	3	26	15	24
4	8	15	4	3	1	28	26	15
5	10	17	1	1	3	20	30	35
6	12	20	4	3	3	25	20	35
7	9	10	1	2	3	26	24	30
8	12	21	2	4	2	16	27	24
9	7	10	3	3	1	26	25	20
10	8	11	3	1	1	25	24	20
11	12	25	1	3	4	24	30	28
12	11	16	1	2	4	20	24	35
13	8	13	1	2	4	28	28	35
14	9	15	3	1	2	60	20	50
15	14	21	2	3	1	35	45	26
16	12	17	2	2	4	28	25	30
17	10	15	3	3	2	40	34	28
18	7	10	3	2	3	24	20	35
19	10	15	3	2	2	30	35	20
20	15	21	3	2	4	35	25	45
21	11	13	4	1	3	48	20	25
22	8	13	4	2	4	48	30	50
23	15	23	2	3	2	38	45	40

Продовження таблиці 4.1

24	5	13	2	1	4	25	20	30
25	10	19	2	3	4	22	35	45
26	6	10	4	2	3	50	26	45
27	8	15	1	4	2	32	48	36
28	9	13	4	3	2	44	40	26
29	11	18	3	2	1	50	40	35
30	12	20	4	3	1	48	30	25

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:

n	m	a	b	c	P_1	P_2	P_3
5	15	3	2	4	25	20	35

Розв’язок.

Позначимо як x_1 , x_2 , x_3 — відповідно, кількість тягачів, що виділяються для роботи у першому, другому та третьому цехах. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

максимізувати сумарну продуктивність тягачів

$$Z = 25x_1 + 20x_2 + 35x_3 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на кількість тягачів

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5;$$

– на кількість причепів

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 15;$$

– на цілочисловість змінних (кількість тягачів не може бути дробовим)

$$x_1 , x_2 , x_3 \text{ — цілі;}$$

– на невід’ємність змінних

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0.$$

Розв’язуємо *послаблену* задачу без накладення умови цілочисловості змінних. В результаті отримуємо розв’язок:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 2{,}5;\quad x_3 = 2{,}5;\quad Z = 137{,}5.$$

В отриманому оптимальному плані послабленої задачі є дві змінні, що мають дробові значення. Оберемо для відгалуження змінну x_2 . Тоді отримуємо дві задачі:

***Задача* 1.**	***Задача* 2.**
$Z = 25x_1 + 20x_2 + 35x_3 \Rightarrow \max,$	$Z = 25x_1 + 20x_2 + 35x_3 \Rightarrow \max$
за умов	за умов
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 15 \\ x_2 \leqslant 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 15 \\ x_2 \geqslant 3 \end{cases}$

Хід розв’язування будемо зображувати на дереві (рис. 4.1). Вершина дерева — результат розв’язку послабленої задачі.

В результаті розв’язку ***задачі* 1** маємо:

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 2;\ x_3 = 2{,}75;\ \ Z = 136{,}25.$$

В результаті розв’язку ***задачі* 2** маємо:

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 3;\ \ x_3 = 2;\ \ Z = 130.$$

Розв’язок задачі 2 є цілочисловим, але значення цільової функції для неї ($Z = 130$) менше ніж значення цільової функції для задачі 1 ($Z = 136{,}25$), у оптимальному плані якої є дробове значення змінної $x_3 = 2{,}75$. Тому відгалуження продовжуємо з вершини, що відповідає розв’язку задачі 1 (випадок 3). Беремо для побудови наступних задач дробову змінну x_3 та розв’язуємо наступні дві задачі: №3 та №4:

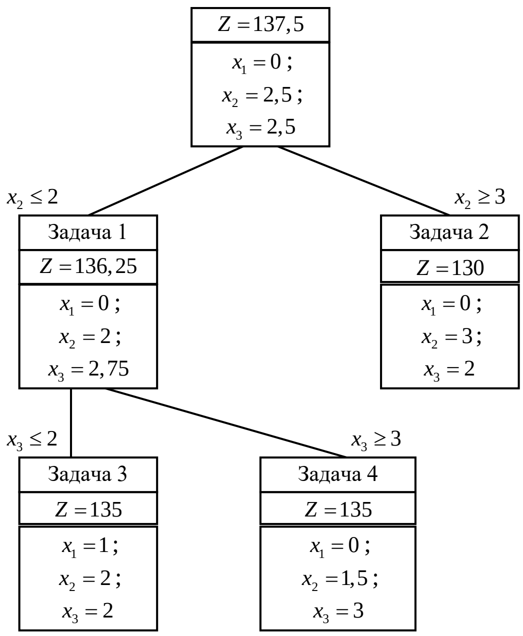

Рисунок 4.1 — Дерево розв’язків задачі

Розв'язуючи ці дві задачі маємо:

– для ***задачі* 3**: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$; $Z = 135$.

– для ***задачі* 4**: $x_1 = 0$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 3$; $Z = 135$.

Переглядаємо вершини дерева, що мають оптимальні плани та не мають відгалужень. Це вершини, що відповідають задачам 2, 3, 4. Найбільше значення цільової функції ($Z = 135$) відповідає вершинам задач 3 та 4. З огляду на те, що у вершині задачі 3 отримане цілочислове рішення (випадок 3), робимо висновок про отримання оптимального плану задачі. Остаточне оптимальне рішення має вид:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 2;\ Z_{\max} = 135.$$

Отже, для досягнення максимальної змінної продуктивності 135 *т/зміну* необхідно направити один тягач у перший цех та по два тягачі до другого та третього цехів.

Зауважимо, що оптимальний розв'язок не можна отримати шляхом округлення значень змінних у оптимальному розв'язкові послабленої задачі.

Контрольні запитання

1. Запишіть постановку задачі цілочислового лінійного програмування та частково цілочислового лінійного програмування.

2. У чому полягає суть методу «відгалужень і меж» для розв'язування задачі лінійного програмування?

3. Як організується відгалуження при рішенні задачі?

4. Які випадки можуть трапитися при вирішенні задач при кожному розгалуженні вершини?

Лабораторна робота №5

ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Мета заняття: вивчення методів рішення задачі цілочислового лінійного програмування з бульовими змінними методом Мака та угорським методом.

Стисла теоретична довідка

Задача про призначення (іноді її називають *проблемою вибору*) є важливим окремим випадком задачі цілочислового лінійного програмування. Постановка задачі про призначення у загальному випадку є такою.

Необхідно виконати n різного роду робіт $A_1, A_2, ..., A_n$. Наявні n виконавців (колективів, агрегатів, машин) $B_1, B_2, ..., B_n$, кожний з яких в змозі більш чи менш ефективно виконати кожну з робіт. Нехай c_{ij} — показник, що характеризує ефективність виконання роботи A_i виконавцем B_j. Значення показників для всіх робіт та виконавців зведений у квадратну матрицю ефективностей розміром $n \times n$:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Необхідно знайти такий варіант закріплення виконавців за роботами, який дає *найбільший* сумарний ефект.

Якщо позначити

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } i\text{-го виконавця призначено для виконання } j\text{-ї роботи;} \\ 0, \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

то математично задача про призначення формулюється наступним чином.

Знайти максимум цільової функції

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях:

– на кожну роботу повинен бути призначений тільки один виконавець

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n};$$

– кожний виконавець повинен бути призначений для виконання тільки однієї роботи

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

– значення змінних задачі повинні бути невід’ємними та цілими

$$x_{ij} \geqslant 0, \text{ цілі } (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}).$$

Застосовувати для розв'язання задачі про призначення симплекс-метод можна, але він не є ефективним. Для ефективного розв'язування розроблені два методи: ***метод Мака*** та ***угорський метод***. Обидва методи розроблені для розв'язування задачі на ***мінімум*** цільової функції. Для застосування методу Мака та угорського методу попередньо необхідно виконати *підготовчий етап* (підготовчий етап можна не виконувати при розв'язуванні задачі методом Мака на *мінімум* цільової функції).

Підготовчий етап.

1. *При розв'язуванні на **мінімум** цільової функції* у кожному стовпчику матриці ефективностей *C* знайти *найменший* елемент та відняти *його* з усіх елементів даного стовпчика.

*При розв'язуванні на **максимум** цільової функції* у кожному стовпчику матриці ефективностей *C* знайти *найбільший* елемент та відняти *від нього* всі елементи даного стовпчика.

2. У отриманій таким чином матриці знайти *найменший* елемент у кожному рядку та відняти його з усіх елементів даного рядка.

В результаті підготовчого етапу отримуємо матрицю, у кожному рядку та стовпчику міститься хоча б один нульовий елемент.

Метод Мака.

Крок 1. Знайти у кожному рядку матриці *C* мінімальні елементи та підкреслити їх. Якщо при цьому у кожному стовпчику матриці знаходиться рівно по одному підкресленому елементу, то ***розв'язок знайдено*** (його утворюють підкреслені елементи матриці), інакше перейти до *кроку 2*.

Крок 2. Вибрати з непозначених знаком «+» стовпчиків (на початку рішення таких стовпчиків немає) стовпчик, що містить більше одного підкресленого елемента та позначити його знаком «+».

Крок 3. Нехай елемент з стовпчику, позначеного знаком «+» у рядку i дорівнює b_i, а *мінімальний* елемент зі стовпчику, що не позначений знаком «+» у цьому рядку дорівнює a_i. Нехай

$$\min_i (a_i - b_i) = a'_r - b_r.$$

Крок 4. Збільшити всі елементи у стовпчиках, позначених знаком «+» на $a'_r - b_r$.

Крок 5. Позначити елемент a'_r знаком «*».

Крок 6. Переглянути стовпчик, що містить значення a'_r. Якщо в ньому вже є підкреслений елемент, то позначити цей стовпчик знаком «+» та перейти до *кроку 3*, інакше перейти до *кроку 7*.

Крок 7. Підкреслити елемент a'_r, зняти з нього позначку «*».

Крок 8. Знайти підкреслений елемент у рядку, що містить a'_r. Прибрати підкреслення цього елементу.

Крок 9. Переглянути стовпчик, у якому щойно було зняте підкреслення. Якщо він містить підкреслені елементи, то перейти до *кроку 10*, інакше знайти у цьому стовпчику елемент, позначений знаком «*», позначити його як a_r' та перейти до *кроку 7*.

Крок 10. Якщо є стовпчики, що не мають підкреслених елементів, то зняти всі позначки «+» та перейти до *кроку 2*.

Угорський метод.

Крок 1. Закреслити *мінімальною* кількістю прямих ліній всі *нульові* значення матриці.

Крок 2. Якщо кількість ліній дорівнює розмірності матриці ефективностей, то ***оптимальний розв'язок знайдено***, інакше перейти до *кроку 3*.

Крок 3. Знайти у матриці ефективностей найменший з елементів, через які не проходить жодної лінії.

Крок 4. Відняти значення цього елементу з усіх елементів, крізь які не проходять лінії та додати значення цього елементу до всіх елементів, які лежать на перетині двох ліній. Повернутися до *кроку 1*.

Угорський метод у даному (спрощеному) викладі може бути використаний для розв'язування задач невеликого розміру, оскільки задача закреслення мінімальною кількістю прямих ліній нульових значень матриці у задачах великого розміру є досить складною та нетривіальною.

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

Для виконання навантажувально-розвантажувальних робіт на п'яти (**А–Д**) складах сипких вантажів можуть бути використані п'ять (**I–V**) вантажних механізмів. ***Знайти*** оптимальний розподіл механізмів по складах, що забезпечує їх *максимальну* сумарну продуктивність (***варіанти* 1–15**) чи *мінімальні* сумарні витрати від їх використання (***варіанти* 16–30**), якщо:

1) *варіанти* 1–15: задана продуктивність машин на складах;

2) *варіанти* 16–30: задані витрати від використання машин на складах.

Матриця продуктивностей, *т/зміну* (витрат, *грн./зміну*) задана у вигляді

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
А	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
Б	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
В	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
Г	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}
Д	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}

Вихідні дані для виконання завдання у вигляді матриці продуктивностей (варіанти 1–15) чи матриці витрат (варіанти 16–30) наведені на рис. 5.1. Розв'язування задачі виконати ***двома методами***: методом Мака та угорським методом.

$$1.\begin{pmatrix}12&18&24&16&19\\17&20&28&30&28\\32&24&38&26&23\\30&25&36&30&24\\35&27&38&26&29\end{pmatrix};\ 2.\begin{pmatrix}17&19&24&28&36\\21&20&20&25&32\\20&25&28&29&30\\18&24&23&30&38\\23&24&27&26&30\end{pmatrix};\quad 3.\begin{pmatrix}46&54&39&32&36\\24&42&37&25&34\\30&48&30&28&30\\35&38&32&30&24\\28&50&36&27&32\end{pmatrix};$$

$$4.\begin{pmatrix}32&24&60&29&28\\28&30&54&16&31\\50&44&52&40&36\\30&34&50&30&35\\19&35&45&35&20\end{pmatrix};\ 5.\begin{pmatrix}32&30&36&52&40\\28&35&38&48&35\\30&29&24&45&32\\44&40&20&56&28\\64&58&45&49&54\end{pmatrix};\quad 6.\begin{pmatrix}58&54&40&48&50\\52&35&30&32&30\\44&32&28&25&39\\47&27&24&22&27\\49&20&34&29&30\end{pmatrix};$$

$$7.\begin{pmatrix}36&28&36&48&26\\32&24&35&42&28\\38&40&40&54&34\\62&54&56&50&58\\30&41&35&58&38\end{pmatrix};\ 8.\begin{pmatrix}36&48&35&37&24\\55&42&56&58&44\\28&50&39&32&18\\30&52&24&25&30\\41&54&40&39&36\end{pmatrix};\quad 9.\begin{pmatrix}20&54&29&26&42\\55&52&53&58&44\\36&60&37&40&37\\40&45&30&38&35\\35&42&32&36&30\end{pmatrix};$$

$$10.\begin{pmatrix}29&34&20&58&35\\32&40&26&54&25\\35&30&34&50&38\\38&25&38&42&29\\50&51&48&46&19\end{pmatrix};\ 11.\begin{pmatrix}28&50&39&32&38\\34&40&33&31&27\\40&54&35&30&25\\64&51&55&48&49\\24&52&29&37&36\end{pmatrix};\ 12.\begin{pmatrix}39&44&28&24&36\\42&46&38&34&32\\55&51&58&49&53\\40&50&36&28&30\\36&48&32&35&31\end{pmatrix};$$

$$13.\begin{pmatrix}30&31&33&26&55\\42&46&48&44&50\\24&34&38&25&60\\35&30&32&27&54\\32&29&28&40&44\end{pmatrix};\ 14.\begin{pmatrix}24&36&58&38&28\\45&49&54&50&52\\34&40&42&29&31\\39&27&46&35&37\\30&33&49&26&32\end{pmatrix};\ 15.\begin{pmatrix}55&40&48&54&52\\26&42&33&38&34\\35&48&37&33&32\\36&50&35&28&40\\25&38&26&36&30\end{pmatrix};$$

$$16.\begin{pmatrix}32&31&38&41&24\\36&40&50&42&18\\35&45&40&31&22\\44&44&35&37&30\\22&26&29&24&25\end{pmatrix};\ 17.\begin{pmatrix}31&25&39&35&52\\23&30&26&20&14\\44&18&32&36&50\\36&21&33&34&35\\40&24&33&40&41\end{pmatrix};\ 18.\begin{pmatrix}43&32&16&36&40\\41&30&21&37&38\\30&27&24&22&17\\45&35&25&44&39\\36&34&18&34&41\end{pmatrix};$$

$$19.\begin{pmatrix}31&41&37&30&35\\24&20&21&23&19\\36&39&42&16&38\\41&44&40&19&44\\38&41&46&24&33\end{pmatrix};\ 20.\begin{pmatrix}24&19&17&26&24\\20&31&41&32&36\\28&38&44&35&38\\21&34&32&30&42\\25&37&40&36&39\end{pmatrix};\ 21.\begin{pmatrix}32&40&36&38&28\\44&38&40&35&25\\41&42&34&46&23\\36&39&48&52&23\\31&27&19&25&24\end{pmatrix};$$

$$22.\begin{pmatrix}41&34&38&19&36\\32&40&39&22&33\\35&39&37&23&38\\24&30&19&28&20\\35&32&36&30&37\end{pmatrix};\ 23.\begin{pmatrix}28&25&24&20&30\\32&25&35&38&33\\36&20&42&40&44\\34&22&39&32&36\\37&23&40&34&39\end{pmatrix};\ 24.\begin{pmatrix}32&21&48&35&36\\35&28&34&33&32\\32&30&38&42&40\\31&25&30&26&20\\33&23&46&40&34\end{pmatrix};$$

$$25.\begin{pmatrix} 29 & 30 & 25 & 35 & 30 \\ 32 & 34 & 24 & 48 & 33 \\ 33 & 36 & 26 & 32 & 31 \\ 18 & 28 & 20 & 24 & 21 \\ 42 & 37 & 21 & 36 & 44 \end{pmatrix}; \quad 26.\begin{pmatrix} 19 & 20 & 26 & 24 & 23 \\ 35 & 43 & 36 & 28 & 41 \\ 41 & 34 & 35 & 20 & 38 \\ 36 & 38 & 15 & 33 & 37 \\ 39 & 36 & 40 & 30 & 15 \end{pmatrix}; \quad 27.\begin{pmatrix} 21 & 17 & 27 & 23 & 22 \\ 14 & 16 & 18 & 17 & 20 \\ 24 & 20 & 25 & 25 & 26 \\ 23 & 22 & 28 & 28 & 30 \\ 26 & 19 & 30 & 30 & 24 \end{pmatrix};$$

$$28.\begin{pmatrix} 17 & 32 & 30 & 33 & 34 \\ 19 & 36 & 38 & 34 & 35 \\ 20 & 28 & 26 & 25 & 30 \\ 25 & 34 & 29 & 39 & 33 \\ 23 & 38 & 40 & 32 & 25 \end{pmatrix}; \quad 29.\begin{pmatrix} 35 & 25 & 56 & 40 & 41 \\ 46 & 30 & 45 & 33 & 52 \\ 34 & 27 & 40 & 44 & 38 \\ 31 & 20 & 22 & 27 & 29 \\ 39 & 32 & 50 & 37 & 35 \end{pmatrix}; \quad 30.\begin{pmatrix} 24 & 30 & 25 & 33 & 19 \\ 38 & 16 & 43 & 40 & 46 \\ 45 & 21 & 49 & 15 & 15 \\ 44 & 24 & 47 & 41 & 45 \\ 36 & 26 & 40 & 42 & 44 \end{pmatrix}.$$

Рисунок 5.1 — Вихідні дані до виконання лабораторного заняття 5

Приклад виконання завдання

Для виконання навантажувально-розвантажувальних робіт на п’яти (**А–Д**) складах сипких вантажів можуть бути використані п’ять (**I–V**) вантажних механізмів. Знайти такий варіант розподілу механізмів поміж складами, який забезпечує їх максимальну сумарну продуктивність. Матриця продуктивностей механізмів подана у вигляді:

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
А	9	20	60	15	21
Б	38	**71**	69	**49**	**60**
В	28	13	**80**	28	34
Г	**58**	34	13	37	25
Д	30	3	53	20	21

Розв’язок.

Так як розв’язується задача на ***максимум***, то виконаємо *підготовчий етап*:

а) знаходимо у стовпчиках максимальні елементи (позначені напівжирним шрифтом у вихідній матриці) та віднімаємо їх з усіх елементів даних стовпчиків (рис. 5.2, а);

б) знаходимо у рядках отриманої матриці найменші елементи та віднімаємо їх з усіх елементів даних рядків (рис. 5.2, б).

$$\begin{pmatrix} 49 & 51 & 20 & 34 & 39 \\ 20 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & 0 & 21 & 26 \\ 0 & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 28 & 68 & 27 & 29 & 39 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 29 & 31 & 0 & 14 & 19 \\ 20 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & 0 & 21 & 26 \\ 0 & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

а) б)

Рисунок 5.2 — Підготовчий етап розв’язування задачі

Метод Мака.

Крок 1. Знаходимо у рядках матриці мінімальні елементи та підкреслюємо їх. У стовпчиках 4 та 5 немає жодного підкресленого елемента, тому переходимо до кроку 2.	$\begin{pmatrix} 29 & 31 & \underline{0} & 14 & 19 \\ 20 & \underline{0} & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & \underline{0} & 21 & 26 \\ \underline{0} & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & \underline{0} & 2 & 12 \end{pmatrix}$
Крок 2. Позначаємо знаком «+» стовпчик 3, що містить більше одного підкресленого елемента. *Крок 3*. Переглядаємо рядки стовпчика 3: – рядок 1: підкреслено елемент 0, мінімальна різниця 14 – 0 = 14; – рядок 3 : підкреслено елемент 0, мінімальна різниця 21 – 0 = 21; – рядок 5: підкреслено елемент 0, мінімальна різниця 1 – 0 = 1. Мінімальна різниця 1 досягається у рядку 5.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & + & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 29 & 31 & \underline{0} & 14 & 19 \\ 20 & \underline{0} & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & \underline{0} & 21 & 26 \\ \underline{0} & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & \underline{0} & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчика 3 на 1. *Крок 5*. Позначаємо елемент 1 у стовпчику 1 знаком «*». *Крок 6*. Переглядаємо стовпчик 1. Цей стовпчик вже має підкреслений елемент у рядку 4. Позначаємо стовпчик 1 знаком «+» та переходимо до *кроку 3*.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & + & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 29 & 31 & \underline{1} & 14 & 19 \\ 20 & \underline{0} & 12 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & \underline{1} & 21 & 26 \\ \underline{0} & 37 & 68 & 12 & 35 \\ 1^* & 41 & \underline{1} & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчиків 1 та 3: – рядок 1: підкреслено елемент 1, мінімальна різниця 14 – 1 = 13; – рядок 3: підкреслено елемент 1, мінімальна різниця 21 – 1 = 20; – рядок 4: підкреслено елемент 0, мінімальна різниця 12 – 0 = 12; – рядок 5: підкреслено елемент 1, мінімальна різниця 2 – 1 = 1. Мінімальна різниця 1 досягається у рядку 5.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & & + & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 29 & 31 & \underline{1} & 14 & 19 \\ 20 & \underline{0} & 12 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & \underline{1} & 21 & 26 \\ \underline{0} & 37 & 68 & 12 & 35 \\ 1^* & 41 & \underline{1} & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчиків 1 та 3 на 1. *Крок 5.* Позначаємо елемент 2 у стовпчику 4 знаком «∗». *Крок 6.* Переглядаємо стовпчик 4. У ньому немає жодного підкресленого елемента. Переходимо до *кроку 7*.	$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & & + & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{2} & 14 & 19 \\ 21 & \underline{0} & 13 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{2} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 69 & 12 & 35 \\ 2^* & 41 & \underline{2} & 2^* & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 7. Підкреслюємо елемент 2 у стовпчику 4, знімаємо з нього позначку «∗». *Крок 8*. Знімаємо підкреслення з елементу 2 у стовпчику 3. *Крок 9.* Переглядаємо стовпчик 3. Він містить підкреслені елементи у рядках 1 та 3. Переходимо до *кроку 10*. Крок 10. Матриця має стовпчик 5 без підкреслених елементів, знімаємо позначки «+» та «∗» і переходимо до *кроку 2*.	$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & & + & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{2} & 14 & 19 \\ 21 & \underline{0} & 13 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{2} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 69 & 12 & 35 \\ 2^* & 41 & 2 & \underline{2} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 2. Позначаємо знаком «+» стовпчик 3, що містить більше одного підкресленого елемента. *Крок 3.* Переглядаємо рядки стовпчика 3: – рядок 1: підкреслено елемент 2, мінімальна різниця 14 – 2 = 12; – рядок 3: підкреслено елемент 2, мінімальна різниця 21 – 2 = 19. Мінімальна різниця 12 досягається у рядку 1.	$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & + & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{2} & 14 & 19 \\ 21 & \underline{0} & 13 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{2} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 69 & 12 & 35 \\ 2 & 41 & 2 & \underline{2} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчика 3 на 12. *Крок 5.* Позначаємо елемент 14 у стовпчику 4 знаком «∗». *Крок 6.* Переглядаємо стовпчик 4. Цей стовпчик вже має підкреслений елемент у рядку 5. Позначаємо стовпчик 4 знаком «+» та переходимо до *кроку 3*.	$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & + & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{14} & 14^* & 19 \\ 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\ 2 & 41 & 14 & \underline{2} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчиків 3 та 4: – рядок 1: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця 19 – 14 = 5; – рядок 3: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця 26 – 14 = 12; – рядок 5: підкреслений елемент 2, мінімальна різниця 2 – 2 = 0. Мінімальна різниця 0 досягається у рядку 1.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & + & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{14} & 14^{*} & 19 \\ 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\ 2 & 41 & 14 & \underline{2} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 4. Після збільшення значень у стовпчиках 3 та 4 на 0 матриця незмінна. *Крок 5.* Позначаємо елемент 2 у стовпчику 1 знаком «*». *Крок 6.* Переглядаємо стовпчик 1. Цей стовпчик вже має підкреслений елемент у рядку 4. Позначаємо стовпчик 1 знаком «+» та переходимо до *кроку 3*.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & + & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{14} & 14^{*} & 19 \\ 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\ 2^{*} & 41 & 14 & \underline{2} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 3. Переглядаємо рядки стовпчиків 1, 3, та 4: – рядок 1: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця 19 – 14 = 5; – рядок 3: підкреслений елемент 14, мінімальна різниця 26 – 14 = 12; – рядок 4: підкреслений елемент 1, мінімальна різниця 35 – 1 = 34; – рядок 5: підкреслений елемент 2, мінімальна різниця 12 – 2 = 10. Мінімальна різниця 5 досягається у рядку 1.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & & + & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 31 & \underline{14} & 14^{*} & 19 \\ 21 & \underline{0} & 25 & 0 & 0 \\ 31 & 58 & \underline{14} & 21 & 26 \\ \underline{1} & 37 & 81 & 12 & 35 \\ 2^{*} & 41 & 14 & \underline{2} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Крок 4. Збільшуємо всі елементи стовпчиків 1, 3 та 4 на 5. *Крок 5*. Позначаємо елемент 19 у стовпчику 5 знаком “*”. *Крок 6.* Переглядаємо стовпчик 5. У ньому немає жодного підкресленого елемента. Переходимо до *кроку 7*.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & & + & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 35 & 31 & \underline{19} & 19^{*} & 19^{*} \\ 26 & \underline{0} & 30 & 5 & 0 \\ 36 & 58 & \underline{19} & 26 & 26 \\ \underline{6} & 37 & 86 & 17 & 35 \\ 7^{*} & 41 & 19 & \underline{7} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

Крок 7. Підкреслюємо елемент 19 у стовпчику 5, знімаємо з нього позначку «*». *Крок 8.* Знімаємо підкреслення з елементу 19 у стовпчику 3 рядка 1. *Крок 9.* Переглядаємо стовпчик 3, у якому була знято підкреслення. Він має лише один підкреслений елемент у рядку 3. Переходимо до *кроку 10*. *Крок 10.* У матриці не залишилось жодного стовпчика, у якому немає не підкреслених елементів. Таким чином, ***знайдено оптимальний розв'язок***.	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & & + & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 35 & 31 & 19 & 19^{*} & \underline{19} \\ 26 & \underline{0} & 30 & 5 & 0 \\ 36 & 58 & \underline{19} & 26 & 26 \\ \underline{6} & 37 & 86 & 17 & 35 \\ 7^{*} & 41 & 19 & \underline{7} & 12 \end{pmatrix} \end{array}$
Підкреслюємо відповідні елементи вихідної матриці. Оптимальний розвязок: на склад **А** призначити механізм **V**, на склад **Б** механізм **II**, на склад **В** механізм **III**, на склад **Г** механізм **I**, на склад **Д** механізм **IV**. Максимальна продуктивність складе 58+71+80+20+21 = 250 *т/зміну*.	$\begin{pmatrix} 9 & 20 & 60 & 15 & \underline{21} \\ 38 & \underline{71} & 69 & 49 & 60 \\ 28 & 13 & \underline{80} & 28 & 34 \\ \underline{58} & 34 & 13 & 37 & 25 \\ 30 & 3 & 53 & \underline{20} & 21 \end{pmatrix}$

Угорський метод.

Крок 1. Закреслюємо мінімальною кількістю прямих ліній матрицю, отриману після виконання попереднього етапу. *Крок 2.* Кількість ліній 3, що менше 5. Переходимо до кроку 3.	$\begin{pmatrix} 29 & 31 & 0 & 14 & 19 \\ 20 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 30 & 58 & 0 & 21 & 26 \\ 0 & 37 & 67 & 12 & 35 \\ 1 & 41 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$
Крок 3. Мінімальний елемент, через який не проходить жодна лінія, дорівнює 2 (рядок 5, стовпчик 4). *Крок 4.* Віднімаємо 2 від всіх елементів, що не закреслені лініями та додаємо 2 до всіх елементів, що закреслені двома лініями. Переходимо до *кроку 1.* *Крок 1.* Закреслюємо нульові	$\begin{pmatrix} 29 & 29 & 0 & 12 & 17 \\ 22 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 30 & 56 & 0 & 19 & 24 \\ 0 & 35 & 67 & 10 & 33 \\ 1 & 39 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

елементи. *Крок 2.* Кількість ліній дорівнює 4 < 5.	
Крок 3. Мінімальний елемент, через який не проходить жодна лінія, дорівнює 12 (рядок 1, стовпчик 4). *Крок 4.* Віднімаємо 12 від всіх елементів, що не закреслені лініями та додаємо 12 до всіх елементів, що закреслені двома лініями. Переходимо до *кроку 1*. *Крок 1.* Закреслюємо нульові елементи. *Крок 2.* Кількість ліній дорівнює 4 <5.	$\begin{pmatrix} 17 & 17 & 0 & 0 & 5 \\ 22 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 18 & 44 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 35 & 79 & 10 & 33 \\ 1 & 39 & 12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
Крок 3. Мінімальний елемент, через який не проходить жодна лінія, дорівнює 5 (рядок 1, стовпчик 5). *Крок 4.* Віднімаємо 5 від всіх елементів, що не закреслені лініями та додаємо 5 до всіх елементів, що закреслені двома лініями. Переходимо до *кроку 1*. *Крок 1.* Закреслюємо нульові елементи. *Крок 2.* Кількість ліній дорівнює 5=5, отже знайдено ***оптимальний розв'язок***.	$\begin{pmatrix} 17 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 30 & 5 & 0 \\ 18 & 39 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 30 & 79 & 10 & 28 \\ 1 & 34 & 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Для отримання оптимального варіанту призначення за угорським методом знаходимо рядок, що має лише одне нульове значення (якщо таких рядків декілька, можна взяти будь-який з них). У нашому випадку це рядки 3, 4 та 5. Візьмемо рядок 3. Нульове значення міститься у стовпчику 3. Отже, призначаємо на склад **B** механізм **III**. Викреслюємо рядок 3 та стовпчик 3 (послідовність пошуку оптимального призначення показана на рис. 5.3).

$$\begin{pmatrix} 17 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 30 & 5 & 0 \\ 18 & 39 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 30 & 79 & 10 & 28 \\ 1 & 34 & 12 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 17 & 12 & \times & 0 & 0 \\ 27 & 0 & \times & 5 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 30 & \times & 10 & 28 \\ 1 & 34 & \times & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \times & 12 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 5 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & 34 & \times & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} \times & 12 & \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

Рисунок 5.3 — Пошук оптимального призначення за угорським методом

Тепер єдине нульове значення мають рядки 4 та 5. Виберемо рядок 4. Нульове значення міститься у стовпчику 1. Отже, призначаємо на склад **Г** механізм **І**. Викреслюємо рядок 4 та стовпчик 1.

Єдине нульове значення міститься у рядку 5 та стовпчику 4. Призначаємо на склад **Д** механізм **IV**. Викреслюємо рядок 5 та стовпчик 4.

З отриманої матриці 2×2 (тепер єдиний нуль міститься у рядку 1 та стовпчику 5) остаточно вибираємо дві пари призначень (1,5) та (2,2), тобто призначаємо на склад **А** механізм **V** та на склад **Б** механізм **II**. Максимальна продуктивність дорівнює 250 *т/зміну*.

Цей розв’язок збігається з розв’язком, отриманим методом Мака.

Контрольні запитання

1. Дайте постановку задачі про призначення у загальному вигляді. У чому полягає її особливість у порівнянні з загальною задачею лінійного програмування?
2. Як виконується підготовчий етап рішення задачі? У якому випадку його можна не виконувати?
3. Викладіть алгоритм розв’язування задачі про призначення методом Мака.
4. Викладіть алгоритм розв’язування задачі про призначення угорським методом.
5. Як визначити оптимальні призначення за остаточною матрицею методом Мака? Угорським методом?

Лабораторна робота №6

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАНЯ ЗА КРИТЕРІЄМ ВАРТОСТІ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Мета заняття: вивчення методу рішення транспортної задачі лінійного програмування за критерієм вартості перевезень методом потенціалів.

Стисла теоретична довідка

Транспортна задача — це задача вибору оптимального варіанту доставки продукції від пунктів виробництва до пунктів споживання з врахуванням всіх реальних можливостей з її постачання і споживання. Найпростіша класична постановка транспортної задачі за критерієм вартості полягає у наступному.

Нехай є m пунктів зосередження вантажу (або пунктів виробництва) A_1, A_2, ..., A_m, в яких розміщено однорідний вантаж у кількості a_1, a_2, ..., a_m одиниць. Цей вантаж повинен бути доставлений у n пунктів споживання B_1, B_2, ..., B_n з обсягом попиту відповідно b_1, b_2, ..., b_n. Передбачається, що можливе транспортування з кожного пункту постачання до кожного пункту споживання. Задані транспортні витрати C_{ij}, пов'язані з доставкою одиниці вантажу з пунктів A_i до пунктів B_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у складанні такого плану перевезень, який забезпечує виконання наступних умов:

1) запаси кожного постачальника повинні бути повністю вивезені;

2) попит всіх пунктів споживання повинен бути задоволений за рахунок розподілу всього запасу вантажів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

3) забезпечити мінімальні транспортні витрати.

Умови транспортної задачі подають у формі таблиці, яка має вигляд табл. 6.1.

Таблиця 6.1 — Умови транспортної задачі

Постачальники	Споживачі						Наявність вантажу
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	....	C_{2n}	a_2
...	...	...	...	.....	...	...	...
A_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
....	...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
Потреба в вантажах	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Позначимо через x_{ij} кількість вантажу, який перевозиться з пункту постачання

A_i до пункту споживання B_j. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях:

– по обсягах постачань

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \left(i = \overline{1,m}\right);$$

– по обсягах споживання

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad \left(j = \overline{1,n}\right);$$

– на невід'ємність змінних задачі

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad \left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Умови необхідні і достатні для розв'язання задачі визначаються балансом наявності вантажу та попиту на нього

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

Транспортна задача, для якої виконується умова балансу, називається *закритою* моделлю. На відміну від неї, незбалансована транспортна задача називається *відкритою* моделлю.

Так, як транспортна задача є задачею лінійного програмування, її можна розв'язувати симплекс-методом, але він не є ефективним. Для розв'язування транспортної задачі розроблені більш ефективні методи, зокрема, ***метод потенціалів***.

Розв'язування транспортної задачі методом потенціалів включає такі етапи:

1) складання базисного опорного плану перевезень;

2) перевірка отриманого плану на оптимальність;

3) поліпшення плану у випадку, коли він не є оптимальним, до отримання оптимального рішення.

Складання базисного опорного плану перевезень.

Для складання базисного опорного плану перевезень використовують декілька методів, зокрема: *північно-західного кута, мінімальної вартості, абсолютної подвійної переваги*.

Метод північно-західного кута. Згідно з цим методом розподіл вантажу споживачам виконується за порядком розташування їх у таблиці, яку починають з *лівого верхнього* (північно-західного) кута і закінчують правим нижнім її кутом.

Спочатку планується поставка від першого постачальника до першого споживача у кількості $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$. За такої побудові початкового плану перевезень можливі три випадки:

1) якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$;
2) якщо $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$;
3) якщо $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1$.

У першому випадку всі інші поставки першого *стовпчика* припускаються рівними нулю: $x_{i1}=0$ ($i=2$ ... m). У другому — всі інші поставки першого *рядка* вважаються рівними нулю: $x_{1j}=0$ ($j=2$ ... n). У третьому випадку, якщо заповнюється наступна клітинка стовпчика нулем, то всі інші поставки першого рядка прирівнюються нулю, і, навпаки, якщо наступна клітинка рядка заповнюється нулем, то всі інші поставки першого стовпчика прирівнюються нулю. Наступну поставку заповнюємо у першому рядку, поклавши $x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}; b_2\}$, якщо $a_1 > b_1$, а в другому рядку $x_{21} = \min\{a_2; b_2 - x_{11}\}$, якщо $a_1 < b_1$. Для менш імовірного випадку $a_1 = b_1$ заповнюємо наступну клітинку стовпчика або рядка нулем ($x_{21}=0$ або $x_{12}=0$). Така процедура продовжується доти, доки не будуть розподілені всі запаси постачальників споживачам. Загальна кількість N поставок (кількість заповнених клітинок) у опорному плані має дорівнювати $N = m + n - 1$. Якщо $N < m + n - 1$ (опорний план є *виродженим*), необхідно ввести нульові поставки таким чином, щоб заповнені клітинки утворювали східчасту структуру.

Метод мінімальної вартості. Алгоритм методу складається з таких операцій.

1. Пошук мінімального елемента у матриці транспортних витрат.

2. Визначення мінімального числа серед обсягів постачань і споживання $x_{ij} = \min\{a_i; b_j\}$ для клітинки таблиці з мінімальним елементом C_{ij}.

3. Виключення з розгляду рядка або стовпчика:

i-го рядка, якщо $a_i < b_j$ ($x_{ij} = a_i$) ;
j-го стовпчика, якщо $a_i > b_j$ ($x_{ij} = b_j$).

Крім того, з подальшого розгляду виключається мінімальний елемент матриці C_{ij}, за яким визначено обсяг поставки x_{ij}.

4. З запасів i-го постачальника та потреб j-го споживача знімається визначений обсяг поставки.

Пункти 1–4 виконуються доти, доки не будуть отримані $m + n - 1$ поставки.

Метод абсолютної подвійної переваги. Спочатку проглядаємо всі рядки матриці і в кожному з них відзначаємо елемент з мінімальним значенням транспортних витрат. Далі проглядаємо стовпчики матриці і також відзначаємо в них елементи з мінімальним значенням транспортних витрат. Клітинки, які мають подвійні позначки ($**$), заповнюються в першу чергу максимально можливими обсягами перевезень за правилами, розглянутим раніше. Після кожного призначення поставки x_{ij} виключаються з подальшого розгляду відповідні рядок або стовпчик. Далі заповнюються клітинки, що відзначені однією позначкою ($*$) і також після кожного призначення поставки виключається з подальшого розгляду відповідний рядок або стовпчик. Серед клітинок, що залишились без позначок, обсяги перевезень розподіляються за способом найменшого значення елементу C_{ij}.

Перевірка отриманого плану на оптимальність.

Перевірка отриманого плану перевезень на оптимальність полягає в тому, що для кожного рядка та стовпчика матриці розраховуються спеціальні числа, що називаються *потенціалами*.

Позначимо потенціали рядків через U_i (i=1…m), а потенціали стовпчиків через V_j (j=1…n). Припустимий план при рішенні задачі *на мінімум транспортних витрат* буде оптимальним в тому і тільки в тому разі, якщо виконуються умови

$$\begin{cases} U_i + V_j = C_{ij} \quad \text{для } x_{ij} > 0 \quad \text{(заповнені клітинки)}; \\ U_i + V_j \leqslant C_{ij} \quad \text{для } x_{ij} = 0 \quad \text{(вільні клітинки)}. \end{cases}$$

Таким чином, для *заповнених* клітинок матриці складаються рівняння виду $U_i + V_j = C_{ij}$. Так як кількість заповнених клітинок дорівнює $m+n-1$, то отримана система з $m+n$ невідомими потенціалами має $m+n-1$ рівнянь. Оскільки кількість невідомих перевищує на одиницю кількість рівнянь, то потенціалу будь-якого рядка U_i або стовпчика V_j *можна надати будь-якого значення* (наприклад, нульового), інші потенціали однозначно визначаються через нього.

Після обчислення потенціалів для вільних клітинок матриці обчислюються оцінки

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j).$$

Якщо серед оцінок Δ_{ij} ***немає від'ємних*** (всі $\Delta_{ij} \geqslant 0$), то при розв'язуванні задачі на *мінімум* транспортних витрат план буде ***оптимальним***. Наявність хоча б одного від'ємного значення Δ_{ij} свідчить про те, що план не є оптимальним і його можна покращити, призначаючи поставку у клітинку з $\Delta_{ij} < 0$.

Покращення плану перевезень.

Для покращення плану перевезень у випадку його не оптимальності необхідно виконати наступні дії:

1) знайти вільну клітинку з найменшим від'ємним значенням Δ_{ij} (якщо таких клітинок декілька, то можна взяти будь-яку з них). Ця клітинка називається *перспективною* та у наступному опорному плані перевезень до неї буде призначена поставка;

2) побудувати *цикл* перерахунку поставок. ***Циклом*** в таблиці транспортної задачі називається замкнена ламана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітинках таблиці, а відрізки лінії — вздовж рядків і стовпчиків, причому один відрізок лінії кожної вершини знаходиться в рядку, а інший цієї ж вершини — в стовпчику. За першу клітинку циклу береться *перспективна клітинка*. Інші вершини циклу повинні знаходитися у *заповнених клітинках*. На рис. 6.1 показані деякі з можливих варіантів циклів транспортної задачі;

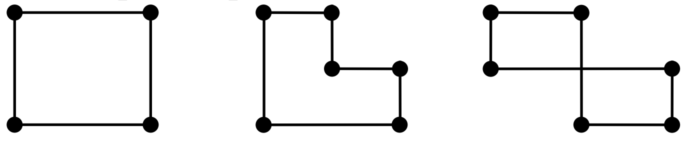

Рисунок 6.1 – Можливі варіанти циклів транспортної задачі

3) виконати перехід до нового опорного плану перевезень за наступними правилами:

а) всі вершини циклу по черзі позначаються знаками «–» і «+», починаючи з перспективної клітинки, яка позначається знаком «+»;

б) в клітинках зі знаком «–» відшукується найменше значення поставки. Це значення поставки додається до поставок у клітинках, позначених знаком «+» і віднімається від поставок клітинок, позначених знаком «–».

Отриманий план знову перевіряється на оптимальність і так далі до отримання оптимального рішення задачі.

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

Скласти оптимальний план перевезень піску з кар'єрів (**А**1—**А**5) до промислових підприємств ($\mathbf{B}_1$—$\mathbf{B}_5$), що забезпечує мінімальну транспортну роботу. Наявні запаси піску у кар'єрах та потреба у піску підприємств по варіантах задані в таблицях 6.2—6.3. Варіанти матриці відстаней між кар'єрами та підприємствами наведені у таблицях 6.4—6.7.

Таблиця 6.2 — Запаси піску на складах кар'єрів

Вар.	Варіант матриці відстаней	Запаси піску на складах, *т*				
		$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
1	1	200	150	150	–	–
2	2	120	95	180	150	100
3	3	300	280	220	–	–
4	4	180	250	105	150	95
5	1	250	200	150	–	–
6	2	140	185	125	130	20
7	3	185	125	130	135	135
8	4	400	250	350	–	–
9	1	45	135	285	35	–
10	2	145	165	135	200	175
11	3	150	200	150	–	–
12	4	60	125	185	275	–
13	1	140	115	60	125	185
14	2	280	300	220	–	–
15	3	195	240	175	150	–
16	4	85	75	125	65	170
17	1	150	250	200	–	–
18	2	120	185	175	115	–
19	3	180	75	290	140	125
20	4	250	400	350	–	–
21	1	90	140	125	220	–
22	2	55	170	145	150	125

Продовження таблиці 6.2

Вар.	Варіант матриці відстаней	Запаси піску на складах, *т*				
		А1	**А**2	**А**3	**А**4	**А**5
23	3	280	220	300	–	–
24	4	100	280	185	125	–
25	1	120	110	135	165	290
26	2	145	305	450	–	–
27	3	360	25	230	335	–
28	4	95	135	140	145	190
29	1	420	800	605	–	–
30	2	65	105	330	350	–

Таблиця 6.3 — Потреба у піску промислових підприємств

Варіант	Потреба у піску підприємств, *т*				
	В1	**В**2	**В**3	**В**4	**В**5
1	90	100	70	130	110
2	160	200	100	185	-
3	180	140	190	120	170
4	200	100	145	185	150
5	180	120	90	105	105
6	120	180	135	165	–
7	110	135	165	190	110
8	200	170	230	225	175
9	60	170	135	135	–
10	130	85	185	160	260
11	160	70	90	80	100
12	180	95	250	65	55
13	150	105	180	95	95
14	170	120	190	140	180
15	105	135	250	270	–
16	105	105	95	130	85
17	180	120	90	105	105
18	150	105	80	260	–
19	130	150	110	90	330
20	300	160	200	180	160
21	110	90	165	210	–
22	85	130	155	160	115
23	190	140	180	120	170
24	105	95	155	335	–
25	145	130	175	90	280
26	200	200	200	200	100
27	150	225	190	385	–
28	125	105	75	300	100
29	205	600	540	80	400
30	315	135	75	105	220

Таблиця 6.4 — Матриця відстаней, км (варіант 1)

Кар'єри	Підприємства				
	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$
$\mathbf{A}_1$	12	15	21	14	17
$\mathbf{A}_2$	14	8	15	11	21
$\mathbf{A}_3$	19	16	26	12	20
$\mathbf{A}_4$	15	11	16	19	18
$\mathbf{A}_5$	13	10	12	20	16

Таблиця 6.5 — Матриця відстаней, км (варіант 2)

Кар'єри	Підприємства				
	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$
$\mathbf{A}_1$	13	9	5	11	17
$\mathbf{A}_2$	14	5	12	14	22
$\mathbf{A}_3$	20	17	13	18	21
$\mathbf{A}_4$	13	15	11	13	21
$\mathbf{A}_5$	12	21	9	10	16

Таблиця 6.6 – Матриця відстаней, км (варіант 3)

Кар'єри	Підприємства				
	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$
$\mathbf{A}_1$	18	12	7	18	7
$\mathbf{A}_2$	35	14	12	15	13
$\mathbf{A}_3$	30	16	11	25	15
$\mathbf{A}_4$	19	15	35	20	7
$\mathbf{A}_5$	15	35	12	11	6

Таблиця 6.7 — Матриця відстаней, км (варіант 4)

Кар'єри	Підприємства				
	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$
$\mathbf{A}_1$	12	16	21	19	32
$\mathbf{A}_2$	4	4	9	5	24
$\mathbf{A}_3$	3	8	14	10	26
$\mathbf{A}_4$	24	33	36	34	49
$\mathbf{A}_5$	9	25	30	20	31

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за вихідних даних, заданих у таблиці

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	Запас
$\mathbf{A}_1$	4	3	3	1	8
$\mathbf{A}_2$	3	2	4	8	11
$\mathbf{A}_3$	6	4	6	3	6
$\mathbf{A}_4$	3	5	2	4	10
Потреба	4	9	9	13	

Розв'язок.

Побудуємо початковий опорний план перевезень ***методом мінімальної вартості***. Відшукуємо у матриці клітинку з мінімальним значенням транспортних витрат (таблиця 6.8). Це клітинка $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_4$. Призначаємо у ній поставку $x_{14} = \min\{8; 13\} = 8$ m. Зменшуємо запас постачальника $\mathbf{A}_1$ та потребу споживача $\mathbf{B}_4$ на 8 m.

Наступні клітинки з мінімальним значенням транспортних витрат — $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ та $\mathbf{A}_4\mathbf{B}_3$. Призначаємо у клітинку $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ поставку $x_{22} = \min\{11; 9\} = 9$ m, зменшуємо запас постачальника $\mathbf{A}_2$ та потребу споживача $\mathbf{B}_2$ на 9 m; призначаємо у клітинку $\mathbf{A}_4\mathbf{B}_3$ поставку $x_{43} = \min\{10; 9\} = 9$ m, зменшуємо запас постачальника $\mathbf{A}_4$ та потребу споживача $\mathbf{B}_3$ на 9 m.

Тепер мінімальні значення транспортних витрат мають клітинки $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_3$, $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_4$, $\mathbf{A}_4\mathbf{B}_1$. У перші дві з них не можуть бути призначені поставки, оскільки запас постачальника $\mathbf{A}_1$ та потреби споживачів $\mathbf{B}_2$ та $\mathbf{B}_3$ вже вичерпані. Призначаємо у клітинку $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1$ поставку $x_{21} = \min\{2; 4\} = 2$ m та зменшуємо запас постачальника $\mathbf{A}_2$ та потребу споживача $\mathbf{B}_1$ на 2 m. Призначаємо у клітинку $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_4$ поставку $x_{34} = \min\{6; 5\} = 5$ m та зменшуємо запас постачальника $\mathbf{A}_3$ та потребу споживача $\mathbf{B}_4$ на 5 m. Призначаємо у клітинку $\mathbf{A}_4\mathbf{B}_1$ поставку $x_{41} = \min\{2; 1\} = 1$ m та зменшуємо запас постачальника $\mathbf{A}_4$ та потребу споживача $\mathbf{B}_1$ на 1 m.

Останньою призначаємо поставку у клітинку $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1$.

Таблиця 6.8 — Початковий опорний план перевезень

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	Запаси
$\mathbf{A}_1$	4	3	3	**8** 1	8; 0
$\mathbf{A}_2$	+ **2** 3	– **9** 2	4	8	11; 2; 0
$\mathbf{A}_3$	– **1** 6	+ 4	6	**5** 3	6; 1; 0
$\mathbf{A}_4$	**1** 3	5	**9** 2	4	10; 1; 0
Потреби	4; 2; 1; 0	9; 0	9; 0	13; 5; 0	

Кількість заповнених клітинок таблиці дорівнює $7 = 4 + 4 - 1$, отже план є не виродженим. Транспортні витрати за цим планом перевезень складають

$$Z = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 74 \text{ } ткм.$$

Для перевірки початкового опорного плану перевезень на оптимальність складемо рівняння для ***заповнених*** клітинок:

$U_1 + V_4 = 1;$ $\quad U_2 + V_1 = 3;$ $\quad U_2 + V_2 = 2;$ $\quad U_3 + V_1 = 6;$

$U_3 + V_4 = 3;$ $\quad U_4 + V_1 = 3;$ $\quad U_4 + V_3 = 2.$

Покладемо, наприклад, $U_1 = 0$, тоді з системи рівнянь однозначно можна знайти значення всіх потенціалів:

$$U_2 = -1; \; U_3 = 2; \; U_4 = -1; \; V_1 = 4; \; V_2 = 3; \; V_3 = 3; \; V_4 = 1.$$

Для кожної ***вільної*** клітинки розраховуємо оцінки Δ_{ij}:

$$\Delta_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 4 - (0 + 4) = 0;$$
$$\Delta_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + 3) = 0;$$
$$\Delta_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 3 - (0 + 3) = 0;$$
$$\Delta_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 4 - (-1 + 3) = 2;$$
$$\Delta_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 8 - (-1 + 1) = 8;$$
$$\Delta_{32} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 4 - (2 + 3) = -1 \quad < 0;$$
$$\Delta_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 6 - (2 + 3) = 1;$$
$$\Delta_{42} = C_{42} - (U_4 + V_2) = 5 - (-1 + 3) = 3;$$
$$\Delta_{44} = C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (-1 + 1) = 4$$

Таким чином, план не є оптимальним, оскільки є клітинка $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2$ з від'ємним значенням $\Delta_{32} = -1$. Для перспективної клітинки $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2$ будуємо цикл перерахунку $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2$ — $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1$ — $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1$ — $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ (показаний пунктиром у табл. 6.8). Починаючи з перспективної клітинки $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2$ у вершинах контуру проставляємо по черзі знаки «+» та «–». Переглядаємо клітинки, позначені знаком «–». Найменша поставка записана у клітинку $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1$ і дорівнює 1. Додаємо x_{31} = 1 до поставок у клітинках, позначених знаком «+» та віднімаємо 1 від поставок у клітинках, позначених знаком «–». В результаті отримаємо новий опорний план (таблиця 6.9).

Таблиця 6.9 – Оптимальний план перевезень

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	Запаси
$\mathbf{A}_1$	4	3	3	**8** 1	8
$\mathbf{A}_2$	**3** 3	**8** 2	4	8	11
$\mathbf{A}_3$	6	**1** 4	6	**5** 3	6
$\mathbf{A}_4$	**1** 3	5	**9** 2	4	10
Потреби	4	9	9	13	

Перевіряємо цей план на оптимальність, для чого розраховуємо потенціали U_i, V_j та оцінки Δ_{ij}.

$$U_1 + V_4 = 1;\; U_2 + V_1 = 3;\; U_2 + V_2 = 2;\; U_3 + V_2 = 4;$$
$$U_3 + V_4 = 3;\; U_4 + V_1 = 3;\; U_4 + V_3 = 2;$$

$$U_1 = 0;\; U_2 = 0;\; U_3 = 2;\; U_4 = 0;\; V_1 = 3;\; V_2 = 2;\; V_3 = 2;\; V_4 = 1.$$

$$\Delta_{11} = 4 - (0 + 3) = 1; \quad \Delta_{12} = 3 - (0 + 2) = 1;$$
$$\Delta_{13} = 3 - (0 + 2) = 1; \quad \Delta_{23} = 4 - (0 + 2) = 2;$$
$$\Delta_{24} = 8 - (0 + 1) = 7; \quad \Delta_{31} = 6 - (2 + 3) = 1;$$
$$\Delta_{33} = 6 - (2 + 2) = 2; \quad \Delta_{42} = 5 - (0 + 2) = 3;$$
$$\Delta_{44} = 4 - (0 + 1) = 3.$$

Таким чином, план є ***оптимальним***. Транспортні витрати за цим планом складають

$$Z = 8 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 73 \; \textit{ткм}.$$

Контрольні запитання

1. Дайте формулювання транспортної задачі у загальному вигляді.
2. Запишіть математичну постановку транспортної задачі лінійного програмування.
3. У якому випадку модель транспортної задачі називається відкритою?
4. Назвіть методи складання базисного опорного плану транспортної задачі та поясніть їх сутність.
5. Сформулюйте признак оптимальності опорного плану транспортної задачі.
6. Як розраховуються потенціали рядків та стовпчиків матриці транспортної задачі?
7. Як побудувати цикл перерахунку для покращення плану транспортної задачі та який вигляд він може мати ?

Лабораторна робота №7

ДИСКРЕТНА ЗАДАЧА
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Мета заняття: вивчення методу динамічного програмування та його використання для розв'язування дискретної задачі оптимального розподілу ресурсів.

Стисла теоретична довідка

Метод динамічного програмування розроблений американським вченим Р. Беллманом для оптимізації багатокрокових процесів прийняття рішень та побудований на, так званому, ***принципі оптимальності***: *оптимальній поведінці властиво те, що яким би не був початковий стан та рішення у початковий момент, наступні рішення повинні складати оптимальну поведінку відносно стану, що одержаний в результаті першого рішення.*

Загальну задачу оптимізації можна описати моделлю динамічного програмування при виконанні наступних умов:

1) задача може інтерпретуватись як n-кроковий процес управління, а загальний показник ефективності може бути поданий як сума показників ефективності на кожному кроці;

2) структура задачі повинна бути визначена для будь-якої кількості кроків n і не залежати від цієї кількості.

3. На кожному кроці стан системи визначається скінченою кількістю m параметрів стану та управляється скінченою кількістю r змінних, причому m та r не залежать від кількості кроків n.

4. Вибір управління на k-му кроці не має впливу на попередні кроки, а стан на початку цього кроку є функція тільки попереднього кроку та обраного на ньому управління.

Побудова моделі для задачі, що вирішується методом динамічного програмування, виконується у такій послідовності:

1) вибирають спосіб поділу процесу на кроки;

2) вводять параметри стану $S_k = \{S_k^{(1)}; S_k^{(2)}; \ldots; S_k^{(m)}\}$ та змінні управління $U_k = \{U_k^{(1)}; U_k^{(2)}; \ldots; U_k^{(m)}\}$ на кожному кроці процесу;

3) записують рівняння стану для кожного кроку

$$S_k = F(S_{k-1}; U_k),$$

де S_{k-1} — стан процесу на попередньому $(k-1)$-му кроці;

U_k — управління на даному, k-му кроці;

4) вводять показники ефективності на k-му кроці $f_k(S_{k-1}; U_k)$ та сумарний показник — цільову функцію в одній із форм в залежності від умов задачі:

а) в ***адитивній*** формі у вигляді суми показників ефективності $f_k(U_k)$ на окремих кроках

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}; U_k);$$

б) в ***мультиплікативній*** формі у вигляді добутку показників ефективності $f_k(U_k)$ на окремих кроках

$$Z = \prod_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}; U_k);$$

5) вводять у розгляд *умовні максимуми* (*мінімуми*) $Z_k^*(S_{k-1})$ показника ефективності від k-го кроку (включно) до кінця процесу та умовні оптимальні управління на k-му кроці $U_k^*(S_{k-1})$;

6) із обмежень задачі визначають для кожного кроку множини D_k допустимих управлінь на цьому кроці;

7) записують основні для обчислювальної схеми функціональні рівняння Беллмана:

а) для *адитивної* цільової функції

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{U_k \in D_k}(\min)\left\{f_k(S_{k-1}; U_k) + Z_k^*(S_k)\right\},$$

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{U_n \in D_n}(\min)\left\{f_n(S_{n-1}; U_n)\right\};$$

б) для *мультиплікативної* цільової функції

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{U_k \in D_k}(\min)\left\{f_k(S_{k-1}; U_k) \times Z_k^*(S_k)\right\},$$

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{U_n \in D_n}(\min)\left\{f_n(S_{n-1}; U_n)\right\};$$

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

До автотранспортного підприємства (АТП) надійшли замовлення від чотирьох (n=4) підприємств $\mathbf{П}_1$ — $\mathbf{П}_4$ на перевезення вантажів. Наявний парк автомобілів АТП складає 20 одиниць. Для виконання перевезень АТП виділяє автомобілі у кількості, що кратна 4 одиницям. Функція загального прибутку АТП від перевезень на підприємствах в залежності від кількості автомобілів, що виділяються на їх адресу, задана у вигляді таблиці 7.1. Використовуючи метод динамічного програмування, визначити оптимальний варіант розподілу автомобілів між підприємствами з метою максимізації прибутку АТП від надання послуг з перевезення вантажів.

Таблиця 7.1 — Функція прибутку від перевезень

Кількість автомобілів	Прибуток від виконання перевезень на підприємствах в залежності від кількості виділених автомобілів, *тис. грн.*			
	П$_1$	**П$_2$**	**П$_3$**	**П$_4$**
4	$f_1(4)$	$f_2(4)$	$f_3(4)$	$f_4(4)$
8	$f_1(8)$	$f_2(8)$	$f_3(8)$	$f_4(8)$
12	$f_1(12)$	$f_2(12)$	$f_3(12)$	$f_4(12)$
16	$f_1(16)$	$f_2(16)$	$f_3(16)$	$f_4(16)$
20	$f_1(20)$	$f_2(20)$	$f_3(20)$	$f_4(20)$

Вихідні дані задачі у вигляді матриці функції прибутку по варіантах наведені на рис. 7.1.

$$1.\begin{bmatrix} 0{,}9 & 1{,}0 & 1{,}2 & 1.2 \\ 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1{,}4 \\ 1{,}3 & 1.3 & 1{,}6 & 1{,}7 \\ 1{,}6 & 1{,}5 & 1{,}8 & 1{,}9 \\ 1{,}7 & 1{,}8 & 1{,}9 & 2{,}0 \end{bmatrix};\quad 2.\begin{bmatrix} 2{,}2 & 2{,}0 & 1{,}8 & 1{,}9 \\ 2{,}5 & 2{,}3 & 2{,}1 & 2{,}0 \\ 2{,}7 & 2{,}6 & 2{,}4 & 2{,}5 \\ 2{,}8 & 2{,}8 & 2{,}7 & 3{,}0 \\ 3{,}0 & 2{,}9 & 2{,}8 & 3{,}2 \end{bmatrix};\quad 3.\begin{bmatrix} 2{,}1 & 2{,}2 & 1{,}8 & 1{,}9 \\ 2{,}5 & 2{,}4 & 2{,}2 & 2{,}3 \\ 2{,}9 & 2{,}8 & 2{,}7 & 2{,}6 \\ 3{,}2 & 3{,}0 & 3{,}1 & 2{,}9 \\ 3{,}5 & 3{,}4 & 3{,}3 & 3{,}2 \end{bmatrix};$$

$$4.\begin{bmatrix} 3{,}1 & 3{,}8 & 4{,}0 & 2{,}9 \\ 3{,}3 & 3{,}9 & 4{,}3 & 3{,}0 \\ 3{,}9 & 4{,}5 & 4{,}7 & 4{,}9 \\ 5{,}0 & 4{,}6 & 5{,}1 & 5{,}7 \\ 5{,}3 & 5{,}2 & 5{,}3 & 6{,}5 \end{bmatrix};\ 5.\begin{bmatrix} 2{,}6 & 2{,}4 & 4{,}1 & 3{,}9 \\ 3{,}8 & 4{,}0 & 5{,}5 & 5{,}6 \\ 5{,}2 & 6{,}2 & 6{,}7 & 8{,}0 \\ 6{,}7 & 6{,}5 & 7{,}3 & 9{,}2 \\ 8{,}1 & 11{,}0 & 7{,}4 & 10{,}0 \end{bmatrix};\quad 6.\begin{bmatrix} 2{,}0 & 2{,}1 & 2{,}1 & 6{,}4 \\ 3{,}0 & 2{,}9 & 5{,}2 & 8{,}2 \\ 4{,}0 & 3{,}8 & 8{,}3 & 8{,}3 \\ 7{,}5 & 5{,}2 & 8{,}5 & 8{,}8 \\ 8{,}1 & 5{,}6 & 9{,}1 & 9{,}9 \end{bmatrix};$$

$$7.\begin{bmatrix} 1{,}0 & 2{,}7 & 3{,}5 & 3{,}7 \\ 1{,}2 & 2{,}8 & 4{,}0 & 4{,}1 \\ 1{,}6 & 3{,}3 & 4{,}2 & 5{,}3 \\ 1{,}9 & 4{,}0 & 4{,}8 & 5{,}7 \\ 1{,}9 & 5{,}1 & 4{,}9 & 6{,}2 \end{bmatrix};\quad 8.\begin{bmatrix} 0{,}8 & 1{,}2 & 2{,}7 & 2{,}1 \\ 1{,}1 & 2{,}3 & 2{,}8 & 2{,}2 \\ 2{,}3 & 3{,}0 & 2{,}9 & 2{,}5 \\ 3{,}4 & 4{,}5 & 3{,}1 & 2{,}8 \\ 4{,}9 & 5{,}1 & 3{,}6 & 3{,}9 \end{bmatrix};\quad 9.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 15 & 13 \end{bmatrix};$$

$$10.\begin{bmatrix} 12 & 13 & 8 & 9 \\ 14 & 19 & 14 & 14 \\ 18 & 25 & 21 & 23 \\ 24 & 27 & 26 & 27 \\ 28 & 30 & 32 & 34 \end{bmatrix};\quad 11.\begin{bmatrix} 24 & 6 & 7 & 8 \\ 35 & 9 & 15 & 16 \\ 47 & 10 & 20 & 19 \\ 48 & 16 & 22 & 26 \\ 59 & 20 & 22 & 28 \end{bmatrix};\quad 12.\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 5 \\ 20 & 14 & 12 & 18 \\ 25 & 15 & 13 & 26 \\ 28 & 18 & 14 & 34 \\ 30 & 21 & 18 & 40 \end{bmatrix};$$

$$13.\begin{bmatrix} 3{,}5 & 0{,}8 & 1{,}4 & 4{,}1 \\ 5{,}7 & 0{,}9 & 1{,}7 & 4{,}3 \\ 6{,}5 & 1{,}0 & 2{,}2 & 5{,}2 \\ 8{,}9 & 1{,}1 & 2{,}8 & 5{,}3 \\ 10 & 2{,}5 & 3{,}6 & 5{,}5 \end{bmatrix};\quad 14.\begin{bmatrix} 2{,}2 & 2{,}5 & 2{,}3 & 2{,}6 \\ 3{,}4 & 2{,}6 & 2{,}4 & 2{,}7 \\ 3{,}5 & 3{,}3 & 3{,}0 & 3{,}7 \\ 3{,}8 & 3{,}9 & 3{,}4 & 3{,}8 \\ 4{,}1 & 4{,}3 & 3{,}9 & 4{,}2 \end{bmatrix};\quad 15.\begin{bmatrix} 7 & 12 & 9 & 11 \\ 11 & 13 & 12 & 15 \\ 15 & 16 & 13 & 16 \\ 18 & 18 & 14 & 20 \\ 24 & 21 & 16 & 21 \end{bmatrix};$$

$$16.\begin{bmatrix} 15 & 21 & 25 & 19 \\ 27 & 40 & 45 & 39 \\ 39 & 42 & 47 & 52 \\ 60 & 54 & 60 & 82 \\ 71 & 69 & 80 & 90 \end{bmatrix};\quad 17.\begin{bmatrix} 15 & 8 & 10 & 16 \\ 20 & 12 & 25 & 19 \\ 30 & 15 & 35 & 21 \\ 45 & 22 & 42 & 28 \\ 50 & 30 & 45 & 35 \end{bmatrix};\quad 18.\begin{bmatrix} 4{,}5 & 3{,}1 & 4{,}3 & 3{,}5 \\ 4{,}8 & 4{,}0 & 4{,}9 & 3{,}8 \\ 5{,}1 & 5{,}5 & 5{,}4 & 5{,}7 \\ 6{,}0 & 6{,}4 & 6{,}2 & 5{,}8 \\ 6{,}2 & 6{,}8 & 6{,}7 & 6{,}3 \end{bmatrix};$$

$$19.\begin{bmatrix}20 & 17 & 19 & 12\\31 & 27 & 32 & 30\\46 & 48 & 45 & 35\\54 & 55 & 50 & 58\\60 & 64 & 58 & 69\end{bmatrix};\ 20.\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3\\1{,}0 & 0{,}5 & 1{,}1 & 0{,}6\\1{,}4 & 1{,}2 & 1{,}2 & 1{,}3\\2{,}0 & 1{,}8 & 1{,}4 & 1{,}4\\2{,}5 & 2{,}5 & 1{,}6 & 1{,}5\end{bmatrix};\ 21.\begin{bmatrix}2{,}9 & 1{,}6 & 6{,}5 & 3{,}0\\5{,}8 & 4{,}2 & 7{,}6 & 4{,}4\\11{,}3 & 8{,}3 & 8{,}2 & 9{,}7\\18{,}1 & 20{,}2 & 16{,}1 & 13{,}9\\23{,}5 & 26{,}4 & 22{,}1 & 16{,}2\end{bmatrix};$$

$$22.\begin{bmatrix}16 & 18 & 19 & 20\\28 & 24 & 28 & 25\\45 & 40 & 32 & 48\\54 & 57 & 43 & 59\\57 & 60 & 54 & 65\end{bmatrix};\quad 23.\begin{bmatrix}13 & 16 & 15 & 14\\18 & 25 & 24 & 20\\30 & 27 & 28 & 29\\50 & 42 & 46 & 35\\56 & 50 & 52 & 45\end{bmatrix};\quad 24.\begin{bmatrix}3{,}5 & 2{,}7 & 3{,}0 & 3{,}2\\5{,}4 & 3{,}6 & 4{,}0 & 3{,}8\\6{,}0 & 5{,}3 & 5{,}7 & 4{,}3\\6{,}2 & 6{,}5 & 6{,}2 & 5{,}7\\6{,}5 & 7{,}5 & 7{,}0 & 6{,}6\end{bmatrix};$$

$$25.\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}9\\2{,}4 & 1{,}1 & 1{,}0 & 1{,}8\\3{,}6 & 2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}4\\3{,}7 & 3{,}7 & 2{,}0 & 3{,}0\\3{,}7 & 3{,}9 & 2{,}8 & 3{,}5\end{bmatrix};\quad 26.\begin{bmatrix}1{,}9 & 1{,}5 & 0{,}9 & 1{,}1\\2{,}6 & 2{,}3 & 1{,}7 & 1{,}2\\2{,}7 & 2{,}8 & 2{,}2 & 2{,}5\\2{,}8 & 2{,}9 & 3{,}1 & 2{,}9\\2{,}8 & 3{,}2 & 3{,}6 & 3{,}3\end{bmatrix};\quad 27.\begin{bmatrix}15 & 10 & 12 & 14\\24 & 18 & 19 & 18\\32 & 25 & 30 & 31\\35 & 30 & 40 & 42\\37 & 42 & 55 & 60\end{bmatrix};$$

$$28.\begin{bmatrix}20 & 18 & 21 & 25\\32 & 30 & 35 & 27\\40 & 44 & 42 & 36\\48 & 47 & 45 & 40\\52 & 50 & 48 & 50\end{bmatrix};\quad 29.\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1\\0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\\1{,}0 & 1{,}1 & 1{,}2 & 0{,}9\\1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}6 & 1{,}7\\1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}8 & 2{,}1\end{bmatrix};\quad 30.\begin{bmatrix}21 & 15 & 18 & 17\\23 & 16 & 20 & 18\\28 & 25 & 26 & 20\\34 & 36 & 32 & 25\\39 & 42 & 33 & 35\end{bmatrix};$$

Рисунок 7.1 — Вихідні дані до виконання лабораторного заняття 7

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для таких вихідних даних.

Кількість автомобілів	Прибуток від виконання перевезень на підприємствах в залежності від кількості виділених автомобілів, *тис. грн.*			
	1	**2**	**3**	**4**
4	0,8	0,6	0,3	0,4
8	1,0	0,9	0,4	0,6
12	1,1	1,1	0,7	0,8
16	1,2	1,3	1,1	1,3
20	1,8	1,5	1,8	1,6

Розв'язок.

Для опису задачі у вигляді моделі динамічного програмування будемо розглядати процес виділення автомобілів підприємствам як n-кроковий процес. За номер k-го кроку приймаємо номер підприємства, якому виділяються автомобілі. Ця задача є одномірною, тому що на кожному кроці маємо лише одну змінну управління і один параметр стану.

Система характеризується чотирма управляючими змінними x_1 , x_2 , x_3 , x_4 (за кількістю кроків) та п'ятьма параметрами стану S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4.

Рівняння стану системи на кожному кроці виражають *залишок автомобілів* S_k після k-го кроку і можуть бути записані у вигляді

$$S_1 = S_0 - x_1; \quad S_2 = S_1 - x_2; \quad S_3 = S_2 - x_3; \quad S_4 = S_3 - x_4.$$

Показник ефективності процесу — загальний прибуток підприємства від виконання перевезень

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k).$$

Спочатку виконуємо перший етап розрахунків — *умовну оптимізацію* процесу. Для цього складемо рівняння Беллмана для кожного кроку процесу, *починаючи з останнього*:

крок 4: $Z_4^*(S_3) = \max\limits_{0 \leqslant x_4 \leqslant S_3} \{f_4(x_4)\}$;

крок 3: $Z_3^*(S_2) = \max\limits_{0 \leqslant x_3 \leqslant S_2} \left\{f_3(x_3) + Z_4^*(S_3)\right\}$;

крок 2: $Z_2^*(S_1) = \max\limits_{0 \leqslant x_2 \leqslant S_1} \left\{f_2(x_2) + Z_3^*(S_2)\right\}$;

крок 1: $Z_1^*(S_0) = \max\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant S_0} \left\{f_1(x_1) + Z_2^*(S_1)\right\}$.

Розрахунок показників умовної оптимізації 4–1-го кроків згідно з наведеними рівняннями подано в таблиці 7.2.

Побудову таблиці та відповідні розрахунки виконують у такій послідовності.

1. У першому стовпчику таблиці перелічуються можливі стани системи (кількість невиділених автомобілів S_k) на початку k-го кроку; у другому — управління (всі можливі кількості виділених автомобілів x_k від їх наявного залишку) на k-му кроці; у третьому — стан системи (залишок автомобілів S_k після їх виділення) наприкінці k-го кроку.

2. Виконується умовна оптимізація на 4-му кроці (стовпчик 4) за максимальним прибутком $Z_4(S_3)$ від виділення автомобілів x_4 підприємству **П**$_4$. Значення виграшів чисельно дорівнюють значенням $f_4(x_4)$ таблиці вихідних даних.

3. Виконується умовна оптимізація на третьому кроці (k=3). Спочатку розраховуємо умовні виграші в залежності від стану системи S_k, S_{k-1} та змінних управління x_k за формулою

$$Z_3(S_2; x_3) = \left\{f_3(x_3) + Z_4^*(S_3)\right\}.$$

Значення $f_3(x_3)$ беремо з таблиці вихідних даних (стовпчик $f_3(x_3)$, значення $Z_4(S_3)$ — зі стовпчика 4 розрахункової таблиці і заносимо відповідно в стовпчики 5 та 6. Із одержаних значень умовних виграшів $Z_3(S_2; x_3)$ (стовпчик 7) вибираємо оптимальний на даному кроці

$$Z_3^*(S_2) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant S_2} Z_3(S_2; x_3).$$

Для цього порівнюємо величини $Z_3(S_2;x_3)$ при одному і тому ж значенні S_2 , та вибираємо найбільше число, яке і буде дорівнювати $Z_3^*(S_2)$. В таблиці 7.2 ці значення позначені зірочкою.

4. Аналогічним чином виконуємо умовну оптимізацію 2-го та 1-го кроків, після чого переходимо до другого етапу розрахунків — *безумовної оптимізації*. Для зручності розрахунків перенесемо по всіх кроках з таблиці 7.2 в основну таблицю (таблиця 7.3) підсумки умовної оптимізації, тобто послідовність значень функцій $Z_{k-1}^*(S_{k-1})$ та відповідні їм оптимальні чення параметрів управління $x_k^*(S_{k-1})$.

Таблиця 7.2 — Умовна оптимізація процесу

k= 4, 3, 2, 1			k = 4 $Z^*_4(S_3)$	k = 3; $Z^*_3(S_2)$			k = 2; $Z^*_2(S_1)$			k = 1; $Z^*_1(S_0)$		
S_{k-1}	x_k	$S_k=S_{k-1}-x_k$	$f_4(x_4)$	$f_3(x_3)$	$Z^*_4(S_3)$	$Z^*_3 = f_3(x_3)+Z^*_4(S_3)$	$f_2(x_2)$	$Z^*_3(S_2)$	$Z^*_2 = f_2(x_2)+Z^*_3(S_2)$	$f_1(x_1)$	$Z^*_2(S_1)$	$Z^*_1=f_1(x_1)+Z^*_2(S_1)$
20	0	20		0	1,6	0+1,6=1,6	0	1,8	0+1,8=1,8	0	1,9	0+1,9=1,9
	4	16		0,3	1,3	0,3+1,3=1,6	0,6	1,3	0,6+1,3=**1,9***	0,8	1,6	0,8+1,6=**2,4***
	8	12		0,4	0,8	0,4+0,8=1,2	0,9	0,9	0,9+0,9=1,8	1,0	1,3	1,0+1,3=2,3
	12	8		0,7	0,6	0,7+0,6=1,3	1,1	0,7	1,1+0,7=1,8	1,1	1,0	1,1+1,0=2,1
	16	4		1,1	0,4	1,1+0,4=1,5	1,3	0,4	1,3+0,4=1,7	1,2	0,6	1,2+0,6=1,8
	20	0	1,6	1,8	0	1,8+0=**1,8***	1,5	0	1,5+0=1,5	1,8	0	1,8+0=1,8
16	0	16		0	1,3	0+1,3=**1,3***	0	1,3	0+1,3=1,3	0	1,6	0+1,6=1,6
	4	12		0,3	0,8	0,3+0,8=1,1	0,6	0,9	0,6+0,9=1,5	0,8	1,3	0,8+1,3=**2,1***
	8	8		0,4	0,6	0,4+0,6=1,0	0,9	0,7	0,9+0,7=**1,6***	1,0	1,0	1,0+1,0=2,0
	12	4		0,7	0,4	0,7+0,4=1,1	1,1	0,4	1,1+0,4=1,5	1,1	0,6	1,1+0,6=1,7
	16	0	1,3	1,1	0	1,1+0=1,1	1,3	0	1,3+0=1,3	1,2	0	1,2+0=1,2
12	0	12		0	0,8	0+0,8=0,8	0	0,9	0+0,9=0,9	0	1,3	0+1,3=1,3
	4	8		0,3	0,6	0,3+0,6=**0,9***	0,6	0,7	0,6+0,7=**1,3***	0,8	1,0	0,8+1,0=**1,8***
	8	4		0,4	0,4	0,4+0,4=0,8	0,9	0,4	0,4+0,9=1,3	1,0	0,6	1,0+0,6=1,6
	12	0	0,8	0,7	0	0,7+0=0,7	1,1	0	1,1+0=1,1	1,1	0	1,1+0=1,1
8	0	8		0	0,6	0+0,6=0,6	0	0,7	0+0,7=0,7	0	1,0	0+1,0=1,0
	4	4		0,3	0,4	0,3+0,4=**0,7***	0,6	0,4	0,6+0,4=**1,0***	0,8	0,6	0,8+0,6=**1,4***
	8	0	0,6	0,4	0	0,4+0=0,4	0,9	0	0,9+0=0,9	1,0	0	1,0+0=1,0
4	0	4		0	0,4	0+0,4=**0,4***	0	0,4	0+0,4=0,4	0	0,6	0+0,6=0,6
	4	0	0,4	0,3	0	0,3+0=0,3	0,6	0	0,6+0=**0,6***	0,8	0	0,8+0=**0,8***

Таблиця 7.3 — Підсумки умовної оптимізації

S_k	4-й крок (k=4)		3-й крок (k=3)		2-й крок (k=2)		1-й крок (k=1)	
	$Z^*_4(S_3)$	$x^*4(S_3)$	$Z^*_4(S_3)$	$x^*3(S_2)$	$Z^*2(S_1)$	$x^*2(S_1)$	$Z^*1(S_0)$	$x^*1(S_0)$
4	0,4	**4***	0,4	0	0,6	4	0,8	4
8	0,6	8	0,7	**4***	1,0	4	1,4	4
12	0,8	12	0,9	4	1,3	8(4)	1,8	4
16	1,3	16	1,3	0	1,6	**8***	2,1	4
20	1,6	20	1,8	20	1,9	4	**2,4***	**4***

Визначення оптимального варіанту виділення автомобілів (*безумовну оптимізацію*) провадимо у такому порядку.

1. Визначаємо максимальний прибуток, котрий може бути досягнутий при виділенні початкових S_0=20 автомобілів. Цей прибуток дорівнює 2,4 *тис. грн*. (стовпчик 8). За стовпчиком 9 визначаємо кількість виділених автомобілів першому підприємству (**П**$_1$)

$$x_1^*(20) = x_1^* = 4 \text{ автомобіля.}$$

2. Знаходимо залишок автомобілів перед виділенням другому підприємству (**П**$_2$)

$$S_1^* = S_0 - x_1^* = 20 - 4 = 16 \text{ автомобілів.}$$

У стовпчику 7 для $S_1^* = 16$ одержуємо $x_2^* = x_2^*(16) = 8$ автомобілів.

3. Знаходимо залишок автомобілів перед виділенням третьому підприємству (**П**$_3$)

$$S_2^* = S_1 - x_2^* = 16 - 8 = 8 \text{ автомобілів.}$$

У стовпчику 5 таблиці 7.3 одержуємо $x_3^* = x_3^*(8) = 4$ автомобіля.

5. Знаходимо залишок автомобілів перед виділенням четвертому підприємству (**П**$_4$)

$$S_3^* = S_2 - x_3^* = 8 - 4 = 4 \text{ автомобіля.}$$

Із стовпчика 3 таблиці 7.3 одержуємо $x_4^* = x_4^*(4) = 4$ автомобіля.

Отже, максимальний прибуток автотранспортного підприємства, який дорівнює 2,4 *тис. грн*., буде отриманий, якщо розподілити автомобілі між підприємствами таким чином: **П**$_1$ = 4 автомобіля ; **П**$_2$ = 8 автомобілів; **П**$_3$ = 4 автомобіля ; **П**$_4$ = 4 автомобіля.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.
2. За яких умов задачу можна представити у вигляді моделі динамічного програмування?
3. Дайте визначення адитивної та мультиплікативної цільової функції.
4. Дайте визначення параметру стану, змінної управління, умовно оптимальному рішенню в динамічному програмуванні.
5. У чому полягає умовна та безумовна оптимізація процесу?

Лабораторна робота №8

ЗАДАЧА ПРО ЗАВАНТАЖЕННЯ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ

Мета заняття: вивчення застосування методу динамічного програмування для розв'язування задачі про оптимальне завантаження транспортного засобу.

Стисла теоретична довідка

Задача оптимального завантаження транспортного засобу є різновидом класичної задачі «про ранець» та полягає у виборі такого варіанту завантаження транспортного засобу обмеженої вантажопідйомності різноманітними видами вантажів, який забезпечує максимальний прибуток (мінімальні витрати) від їх перевезення. Задача ефективно вирішується методом динамічного програмування.

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

Знайти варіант завантаження автомобіля номінальної вантажопідйомності $W = 9$ *тонн* трьома видами вантажів, який забезпечує максимальний прибуток від їх перевезення. Маса вантажів відповідно складає $q_1 = 1$ *т*, $q_2 = 2$ *т*, $q_3 = 3$ *т*. Прибуток від перевезення x_k одиниць k-го вантажу задається функцією $f_k(x_k)$ *грн.*, яка представлена у таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 — Прибуток від перевезення вантажів

Кількість завантажених одиниць x_k	Прибуток від перевезення вантажів за видами в залежності від їх завантаженої кількості, *грн.*		
	$q_1 = 1\ т$	$q_2 = 2\ т$	$q_3 = 3\ т$
1	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$
2	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$
3	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$
4	$f_1(4)$	$f_2(4)$	–
5	$f_1(5)$	–	–
6	$f_1(6)$	–	–
7	$f_1(7)$	–	–
8	$f_1(8)$	–	–
9	$f_1(9)$		

Вихідні дані для розв'язування задачі по варіантах у вигляді матриці, що представляє функцію прибутку, наведені на рис. 8.1.

$$1.\begin{bmatrix} 50 & 180 & 220 \\ 90 & 250 & 350 \\ 120 & 300 & 450 \\ 160 & 400 & \\ 200 & & \\ 220 & & \\ 250 & & \\ 350 & & \\ 400 & & \end{bmatrix};\ 2.\begin{bmatrix} 40 & 250 & 280 \\ 110 & 350 & 400 \\ 130 & 400 & 440 \\ 180 & 450 & \\ 210 & & \\ 240 & & \\ 320 & & \\ 360 & & \\ 410 & & \end{bmatrix};\ 3.\begin{bmatrix} 70 & 300 & 350 \\ 110 & 400 & 420 \\ 150 & 500 & 550 \\ 220 & 600 & \\ 280 & & \\ 350 & & \\ 410 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 4.\begin{bmatrix} 60 & 170 & 220 \\ 120 & 250 & 350 \\ 160 & 300 & 420 \\ 210 & 450 & \\ 230 & & \\ 290 & & \\ 330 & & \\ 420 & & \\ 500 & & \end{bmatrix};$$

$$5.\begin{bmatrix} 90 & 200 & 310 \\ 140 & 230 & 480 \\ 200 & 280 & 600 \\ 230 & 350 & \\ 280 & & \\ 340 & & \\ 410 & & \\ 430 & & \\ 480 & & \end{bmatrix};\ 6.\begin{bmatrix} 65 & 210 & 300 \\ 125 & 300 & 400 \\ 190 & 420 & 600 \\ 220 & 530 & \\ 260 & & \\ 310 & & \\ 380 & & \\ 410 & & \\ 440 & & \end{bmatrix};\ 7.\begin{bmatrix} 80 & 230 & 440 \\ 150 & 370 & 520 \\ 180 & 490 & 610 \\ 240 & 550 & \\ 300 & & \\ 400 & & \\ 510 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 8.\begin{bmatrix} 40 & 220 & 350 \\ 90 & 320 & 480 \\ 140 & 400 & 550 \\ 190 & 515 & \\ 210 & & \\ 280 & & \\ 320 & & \\ 440 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};$$

$$9.\begin{bmatrix} 70 & 180 & 350 \\ 100 & 350 & 600 \\ 180 & 430 & 700 \\ 250 & 600 & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 510 & & \\ 590 & & \\ 620 & & \end{bmatrix};\ 10.\begin{bmatrix} 85 & 250 & 315 \\ 115 & 410 & 490 \\ 195 & 530 & 670 \\ 280 & 580 & \\ 340 & & \\ 400 & & \\ 430 & & \\ 510 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};\ 11.\begin{bmatrix} 75 & 230 & 500 \\ 105 & 310 & 570 \\ 170 & 420 & 650 \\ 230 & 580 & \\ 340 & & \\ 350 & & \\ 390 & & \\ 440 & & \\ 560 & & \end{bmatrix};\ 12.\begin{bmatrix} 35 & 140 & 315 \\ 90 & 220 & 440 \\ 100 & 350 & 580 \\ 160 & 430 & \\ 230 & & \\ 320 & & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 490 & & \end{bmatrix};$$

$$13.\begin{bmatrix} 30 & 210 & 300 \\ 70 & 335 & 400 \\ 90 & 440 & 600 \\ 140 & 500 & \\ 180 & & \\ 260 & & \\ 370 & & \\ 400 & & \\ 450 & & \end{bmatrix};\ 14.\begin{bmatrix} 75 & 190 & 280 \\ 115 & 250 & 410 \\ 160 & 330 & 590 \\ 250 & 500 & \\ 350 & & \\ 380 & & \\ 410 & & \\ 440 & & \\ 490 & & \end{bmatrix};\ 15.\begin{bmatrix} 45 & 150 & 350 \\ 75 & 310 & 415 \\ 125 & 480 & 570 \\ 200 & 550 & \\ 230 & & \\ 280 & & \\ 350 & & \\ 415 & & \\ 470 & & \end{bmatrix};\ 16.\begin{bmatrix} 50 & 215 & 360 \\ 100 & 360 & 470 \\ 160 & 410 & 600 \\ 210 & 530 & \\ 250 & & \\ 280 & & \\ 350 & & \\ 420 & & \\ 500 & & \end{bmatrix}$$

$$17.\begin{bmatrix} 65 & 200 & 305 \\ 135 & 315 & 480 \\ 160 & 420 & 610 \\ 220 & 560 & \\ 280 & & \\ 330 & & \\ 400 & & \\ 490 & & \\ 530 & & \end{bmatrix};\ 18.\begin{bmatrix} 80 & 240 & 340 \\ 150 & 310 & 480 \\ 190 & 430 & 620 \\ 230 & 550 & \\ 250 & & \\ 350 & & \\ 370 & & \\ 420 & & \\ 480 & & \end{bmatrix};\ 19.\begin{bmatrix} 70 & 190 & 340 \\ 130 & 260 & 450 \\ 160 & 380 & 550 \\ 220 & 500 & \\ 250 & & \\ 310 & & \\ 340 & & \\ 430 & & \\ 480 & & \end{bmatrix};\ 20.\begin{bmatrix} 100 & 280 & 400 \\ 130 & 400 & 650 \\ 200 & 600 & 850 \\ 350 & 800 & \\ 440 & & \\ 490 & & \\ 530 & & \\ 615 & & \\ 700 & & \end{bmatrix}$$

$$21.\begin{bmatrix} 40 & 205 & 300 \\ 100 & 335 & 470 \\ 180 & 420 & 610 \\ 230 & 550 & \\ 280 & & \\ 310 & & \\ 375 & & \\ 440 & & \\ 470 & & \end{bmatrix};\ 22.\begin{bmatrix} 55 & 275 & 330 \\ 105 & 390 & 515 \\ 160 & 515 & 700 \\ 260 & 680 & \\ 315 & & \\ 380 & & \\ 440 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 23.\begin{bmatrix} 65 & 200 & 350 \\ 150 & 400 & 500 \\ 200 & 600 & 850 \\ 240 & 800 & \\ 310 & & \\ 480 & & \\ 515 & & \\ 590 & & \\ 630 & & \end{bmatrix};\ 24.\begin{bmatrix} 90 & 205 & 330 \\ 160 & 275 & 500 \\ 210 & 380 & 670 \\ 240 & 500 & \\ 270 & & \\ 305 & & \\ 330 & & \\ 380 & & \\ 400 & & \end{bmatrix}$$

$$25.\begin{bmatrix} 45 & 200 & 350 \\ 120 & 315 & 520 \\ 200 & 480 & 715 \\ 250 & 600 & \\ 315 & & \\ 380 & & \\ 440 & & \\ 500 & & \\ 550 & & \end{bmatrix};\ 26.\begin{bmatrix} 50 & 275 & 335 \\ 105 & 390 & 525 \\ 180 & 515 & 710 \\ 230 & 670 & \\ 290 & & \\ 390 & & \\ 410 & & \\ 550 & & \\ 600 & & \end{bmatrix};\ 27.\begin{bmatrix} 85 & 225 & 305 \\ 140 & 360 & 520 \\ 200 & 480 & 700 \\ 250 & 650 & \\ 295 & & \\ 350 & & \\ 440 & & \\ 480 & & \\ 570 & & \end{bmatrix};\ 28.\begin{bmatrix} 55 & 250 & 300 \\ 110 & 375 & 550 \\ 160 & 490 & 700 \\ 230 & 610 & \\ 300 & & \\ 340 & & \\ 400 & & \\ 450 & & \\ 500 & & \end{bmatrix}$$

$$29. \begin{bmatrix} 75 & 225 & 345 \\ 150 & 360 & 515 \\ 200 & 475 & 625 \\ 280 & 575 & \\ 340 & & \\ 375 & & \\ 405 & & \\ 470 & & \\ 520 & & \end{bmatrix}; \qquad 30. \begin{bmatrix} 50 & 220 & 300 \\ 120 & 330 & 450 \\ 170 & 440 & 630 \\ 230 & 550 & \\ 300 & & \\ 340 & & \\ 390 & & \\ 420 & & \\ 495 & & \end{bmatrix}.$$

Рисунок 8.1 — Вихідні дані до виконання лабораторного заняття 8

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за функції прибутку від перевезення вантажів, поданої в табл. 8.2.

Математична модель задачі виглядає таким чином:

максимізувати

$$Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 9; \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 9; \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 4; \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant 3.$$

Таблиця 8.2 — Вихідні дані

Кількість завантажених одиниць x_k	Прибуток від перевезення вантажів за видами в залежності від їх завантаженої кількості, *грн*.		
	$q_1 = 1\ m$	$q_2 = 2\ m$	$q_3 = 3\ m$
1	60	220	350
2	110	230	500
3	140	400	700
4	170	540	–
5	210	–	–
6	250	–	–
7	300	–	–
8	400	–	–
9	500	–	–

Процес завантаження автомобіля містить *три* кроки (кількість кроків задачі відповідає кількості видів вантажів). Стан S_{k-1} на початку k-го кроку визначає *недовантаження* автомобіля до повної вантажопідйомності. Управління U_k — кількість завантажених одиниць вантажу x_k k-го виду.

Основні функціональні рівняння матимуть вигляд:

крок 3: $Z_3^*(S_2) = \max\limits_{0 \leqslant x_3 \leqslant [S_2/3]} f_3(x_3);$

крок 2: $Z_2^*(S_1) = \max\limits_{0 \leqslant x_2 \leqslant [S_1/2]} \left\{ f_2(x_2) + Z_3^*(S_1 - 2x_2) \right\}$;

крок 1: $Z_1^*(S_0) = \max\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant S_0} \left\{ f_1(x_1) + Z_2^*(S_0 - x_1) \right\}$.

Через $[S_i/q_i]$ позначена ціла частина відношення S_i/q_i.
Умовна оптимізація процесу наведена у таблиці 8.3.

Таблиця 8.3 – Умовна оптимізація процесу

S_{k-1}	$k = 3$, $Z^*_3(S_2)$		$k = 2$; $Z^*_2(S_1)$			$k = 1$; $Z^*_1(S_0)$		
	x_3	$f_3(x_3)$	x_2	$S_2=S_1-2x_2$	$f_2(x_2)+Z^*_3(S_2)$	x_1	$S_1=S_0-x_1$	$f_1(x_1)+Z^*_2(S_1)$
9	0	0	0	9	0 + 700 = 700	0	9	0 + 750 = 750
	1	350	1	7	220 + 500 = 720	1	8	60 + 720 = **780***
	2	500	2	5	230 + 350 = 580	2	7	110 + 580 = 690
	3	**700***	3	3	400 + 350 = **750***	3	6	140 + 570 = 710
			4	1	540 + 0 = 540	4	5	170 + 570 = 740
						5	4	210 + 350 = 560
						6	3	250 + 350 = 600
						7	2	300 + 220 = 520
						8	1	400 + 0 = 400
						9	0	500 + 0 = 500
8	0	0	0	8	0 + 500 = 500			
	1	350	1	6	220 + 500 = **720***			
	2	**500***	2	4	230 + 350 = 580			
			3	2	400 + 0 = 400			
			4	0	540 + 0 = 540			

Продовження таблиці 8.3

7	0	0	0	7	0 + 500 = 500			
	1	350	1	5	220 + 350 = 570			
	2	**500***	2	3	230 + 350 = **580***			
			3	1	400 + 0 = 400			
6	0	0	0	6	0 + 500 = 500			
	1	350	1	4	220 + 350 = **570***			
	2	**500***	2	2	230 + 0 = 230			
			3	0	400 + 0 = 400			
5	0	0	0	5	0 + 350 = 350			
	1	**350***	1	3	220 + 350 = **570***			
			2	1	230 + 0 = 230			
4	0	0	0	4	0 + 350 = **350***			
	1	**350***	1	2	220 + 0 = 220			
			2	0	230 + 0 = 230			
3	0	0	0	3	0 + 350 = **350***			
	1	**350***	1	1	220 + 0 = 220			
2	0	**0***	0	2	0 + 0 = 0			
			1	0	220 + 0 = **220***			
1	0	**0***	0	0	0 + 0 = **0***			

Результати умовної оптимізації процесу зводимо до таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 — Підсумки умовної оптимізації

S_{k-1}	$k = 3$		$k = 2$		$k = 1$	
	$x^*_3(S_2)$	$Z^*_3(S_2)$	$x^*_2(S_1)$	$Z^*_2(S_1)$	$x^*_1(S_0)$	$Z^*_1(S_0)$
1	0	0	0	0		
2	0	0	1	220		
3	1	350	0	350		
4	1	350	0	350		
5	1	350	1	570		
6	**2**	**500**	1	570		
7	2	500	2	580		
8	2	500	**1**	**720**		
9	3	700	3	750	**1**	**780**

Отже маємо оптимальний варіант завантаження має вигляд: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Тобто необхідно завантажити один вантаж масою 1 *т*, один вантаж масою 2 *т* та два вантажі масою 3 *т*. При цьому досягається максимальний прибуток від перевезення $Z_{\max} = 780$ *грн*.

Лабораторна робота №9

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ГРУПОВИМ НАДХОДЖЕННЯМ ВИМОГ

Мета заняття: засвоєння розрахунку основних характеристик функціонування розімкненої багатоканальної системи масового обслуговування з очікуванням та груповим надходженням вимог.

Стисла теоретична довідка

У таких СМО вимоги надходять на обслуговування групами. Система масового обслуговування складається з n каналів обслуговування. Всі канали мають однакову продуктивність, яка характеризується інтенсивністю обслуговування μ. Тривалість обслуговування підлягає експоненціальному закону розподілу. До системи надходить пуасонівський потік вимог з щільністю λ груп вимог в одиницю часу. У кожній групі міститься m вимог. Якщо вимоги, що надійшли до системи, застануть всі канали обслуговування зайнятими, вони стають до черги та очікують, поки хоча б один з каналів обслуговування не звільниться. Якщо ж при надходженні вимог є вільні канали обслуговування, вимоги одразу приймаються до обслуговування.

Розрахункові формули, що отримані для стаціонарного стану системи масового обслуговування з груповим надходженням вимог, наведені у таблиці 11.1.

Таблиця 11.1 — Розрахункові формули для системи масового обслуговування з груповим надходженням вимог

Показник	Значення показника
1. Параметр завантаження системи	$\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$
2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні	$P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k}$ де f_k — відношення P_k/P_0 для всіх можливих станів системи $f_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0; \\ \dfrac{\lambda + (k-1)\mu}{k\mu} f_{k-1}, & \text{при } k = 0 \ldots m-1; \\ \dfrac{\lambda + (k-1)\mu}{k\mu} f_{k-1} + \dfrac{\lambda}{k\mu} f_{k-m}, & \text{при } k = m \ldots n; \\ \dfrac{\lambda + n\mu}{n\mu} f_{k-1} - \dfrac{\lambda}{n\mu} f_{k-m}, & \text{при } k > n. \end{cases}$

Продовження таблиці 11.1

3. Середня довжина черги	$M_{оч} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)P_k$
4. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування	$\bar{t}_{оч} = \frac{M_{оч}}{\lambda}$
5. Середня кількість вимог у системі	$M_с = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$
6. Середня кількість вільних каналів обслуговування	$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k$

Зміст лабораторного заняття та вихідні дані до його виконання

На n колій зливу залізничної станції з інтенсивністю λ подач на добу надходять цистерни з нафтопродуктами. Кожна подача складається з m цистерн. Інтенсивність зливу нафтопродуктів така, що за добу на кожній колії розвантажується в середньому μ цистерн.

Необхідно оцінити роботу колій зливу станції, якщо кожна цистерна подачі може розвантажуватися на будь-якій вільній колії зливу нафтопродуктів.

Вихідні дані для виконання завдання за варіантами наведені у таблиці 11.2.

Таблиця 11.2 — Вихідні дані до лабораторна робота 9

Вар.	λ	μ	*n*	*m*	Вар.	λ	μ	*n*	*m*
1	3	3	6	4	5	5	3	4	2
2	2	3	5	3	6	5	4	6	3
3	4	2	7	3	7	6	3	8	3
4	3	4	6	4	8	2	3	8	6
9	1	2	7	5	20	2	2	6	4
10	4	3	5	3	21	4	3	3	5
11	6	2	7	2	22	5	3	8	4
12	5	3	8	3	23	2	2	7	5
13	4	2	8	3	24	2	1	8	3
14	3	3	5	4	25	4	5	8	5
15	6	4	6	3	26	3	6	6	5
16	1	2	7	6	27	3	5	5	6
17	3	4	5	4	28	4	5	5	6
18	6	3	5	2	29	4	3	7	4
19	7	4	8	3	30	5	2	8	3

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: $\lambda = 3$ *подачі/добу*; $\mu = 2$ *цистерни/добу*; $n = 6$; $m = 3$.

Розв'язок.

1) розраховуємо параметр завантаження системи

$$\alpha = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Подальші розрахунки за формулами (2) таблиці 11.1 подані у таблиці 11.3. Розрахунок значень f_k припиняємо, коли його значення стає меншим за 0,01;

2) імовірність того, що всі колії зливу вільні

$$P_0 = \frac{1}{9{,}857} = 0{,}101;$$

Таблиця 11.3 — Розрахунок СМО з груповим надходженням вимог

k	$f_k = P_k/P_0$	P_k	kP_k	$(k-n)P_k$	$(n-k)P_k$
0	1,000	0,101	0	–	0,606
1	1,500	0,067	0,067	–	0,355
2	1,875	0,189	0,378	–	0,756
3	1,687	0,170	0,510	–	0,510
4	1,335	0,135	0,540	–	0,270
5	0,907	0,092	0,460	–	0,092
6	0,560	0,057	0,342	–	–
7	0,366	0,037	0,259	0,037	–
8	0,231	0,023	0,184	0,040	–
9	0,149	0,025	0,135	0,045	–
10	0,095	0,010	0,100	0,040	–
11	0,061	0,006	0,066	0,030	–
12	0,039	0,004	0,048	0,024	–
13	0,0251	0,003	0,039	0,021	–
14	0,0162	0,002	0,029	0,016	–
15	0,0103	0,001	0,025	0,014	–
$\sum$	**9,857**		**3,307**	**0,345**	**2,57**

3) середня кількість цистерн, що очікують зливу (середня довжина черги) є сумою значень п'ятого стовпчика таблиці 11.3:

$$M_{\text{оч}} = 0{,}345 \textit{ цистерн};$$

4) середня кількість цистерн на станції (середня кількість вимог у системі) дорівнює сумі значень четвертого стовпчика таблиці 11.3

$$M_{\text{с}} = 3{,}307\ \textit{цистерн};$$

5) середня кількість вільних колій зливу (середня кількість вільних каналів обслуговування) — сума значень останнього стовпчику таблиці 11.3

$$N_0 = 2{,}57\ \textit{колій};$$

6) середня тривалість очікування цистерною початку зливу

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0{,}345}{3} = 0{,}115\ \textit{доби} = 2{,}76\ \textit{год}.$$

Контрольні запитання

1. У чому полягають особливості функціонування розімкненої системи масового обслуговування з очікуванням та груповим надходженням вимог?
2. Які вихідні дані необхідні для розрахунку СМО з очікуванням та груповим надходженням вимог?
3. Як розраховуються імовірності можливих станів СМО з груповим надходженням вимог?

Список використаної літератури

1. Dzyura V. Ways of improvement of the city road network functioning / V. Dzyura // Journal of Sustainable Development of Transport and Logistics, 2016. – Vol. 1, No. 1. – p. 11-15.
2. Tson O. Analytical evaluation of technical and operational indicators impact on the transportation technology by automobile trailers / O. Tson // Journal of Sustainable Development of Transport and Logistics, 2016. – Vol. 1, No. 1. – pp. 23-26. doi:10.14254/jsdtl.2016.1-1.4.
3. Vovk Y. Crisis of relationship in general theory of crisis / Andrushkiv, B., Vovk, Y., Pohaydak, O., Fedyshyn, I. // Journal of International Studies, 2011. – Vol. 4, No 1. – pp. 18-25. DOI: 10.14254/2071-8330.2011/4-1/2
4. Vovk Y. Resource-efficient intelligent transportation systems as a basis for sustainable development. Overview of initiatives and strategies / Y. Vovk // // Journal of Sustainable Development of Transport and Logistics, 2016. – Vol. 1, No. 1. – p. 6-10. (Польща).
5. Вангер Г. Основы исследованния операций. Том 1. – М.: Мир, 1972. – 335 с.
6. Вангер Г. Основы исследованния операций. Том 2. – М.: Мир, 1973. – 486 с.
7. Вовк Ю. Аналіз стану транспортної системи України та перспективи її розвитку / Юрій Вовк // Соціально-економічні проблеми і держава. – 2015. – Вип. 2 (13). – С. 5-15.
8. Вовк Ю. Вплив трансферу технологій на інноваційні процеси: український та зарубіжний досвід [Електронний ресурс] / Ю. Вовк, І. Нагорняк, Г. Нагорняк // Соціально-економічні проблеми і держава. – 2013. – Вип. 2 (9). – С. 117-127.
9. Вовк Ю.Я. Пути формирования ресурсоэффективной транспортной системы / Ю.Я. Вовк // Экономические тенденции, 2017. – Вып. 1, № 1. – С. 22-29. (Білорусь).
10. Вовк Ю.Я. Ресурсономіка: теоретичні та прикладні аспекти: Монографія / Андрушків Б.М., Вовк Ю.Я., Вовк І.П., Паляниця В.А. та ін. – Тернопіль: ТОВ "Терно-Граф", 2012. – 456 с. (0,2 внесок автора).
11. Дегтярь В.Г., Цуканов І. М. Елементи теорії випадкових процесів та їх застосування для прийняття рішень. – К.:УТУ, 1999. – 79 с.
12. Деордица Ю.С., Савченко В.Т. Компьютерные технологии в экономике и менеджменте: Учеб .пособие. – Луганськ:ВУГУ,1999.
13. Дзюра В.О. Обгрунтування швидкості руху на міських вулицях і дорогах / В.О. Дзюра // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – Луцьк, 2016. – Вип. №55. – С. 112-116.
14. Дзюра В.О. Порушення при облаштуванні прибудинкових територій, зокрема місць для зберігання індивідуальних транспортних засобів в межах населених пунктів / В.О. Дзюра // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка присвячений 25 річчю ННІ ТС. – 2016. – Вип. 169 «Деревооброблювальні технології та системотехніка лісового комплексу» «транспортні технології». – Харків : ХНТУС, 2016. – С. 228-232.
15. Доля В. К. Пасажирські перевезення / В. К. Доля. – Х. : Вид-во „Форт”, 2011. –

507 с.
16. Зайцев М. Г. Количественные методы в менеджменте. Часть 1. Принятие решений в условиях определенности. – М.: Академия Народного Хозяйства при правительстве РФ. – 235 с.
17. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. – К: ВІПОЛ,2000.
18. Карпенко О. Проблеми функціонування механізму трансферу наукових технологій освітньої діяльності в логістиці / Олена Карпенко, Світлана Ковальчук, Юрій Вовк, Ігор Гирила, Оксана Шевчук, Мар'яна Януш // Соціально-економічні проблеми і держава. – 2016. – Вип. 2 (15). – С. 114-119.
19. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
20. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. / Словарь современной экономической науки. Издание 4-е, переработанное и дополненное. – Г.: Издательство «ABF»,1996. – 704с.
21. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Основи теорії транспортних процесів та систем“ для студентів 4 курсу денної форми навчання 6.070101 «Транспортні технології» (автомобільний транспорт) / Укл.: Ю.Я. Вовк, В.О. Дзюра, П.В. Попович та ін. – Тернопіль: СтереоАрт, 2016. – 38 с.
22. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Автоматизована система управління на транспорті» (для студентів 4 курсу денної форми навчання 6.070101 Транспортні технології). Укл.: Ю.Я. Вовк, В.О. Дзюра, П.В. Попович та ін. – Тернопіль: СтереоАрт, 2016. – 24 с.
23. Мур Дж., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
24. Поліщук В. П. Теорія транспортного потоку : методи та моделі організації дорожнього руху / В. П. Поліщук, О. П. Дзюба. – К. : Знання України, 2008. – 175 с.
25. Попович П. В. Дослідження тенденцій розвитку ринку вантажних автомобільних перевезень в сучасних умовах / П.В. Попович, О.С. Шевчук, А.Й. Матвіїшин, В.Н. Лотоцька // Науковий журнал. Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки. – Житомир, 2016. – №2(77). – С. 224-228.
26. Попович П.В. Аналітичні технології в забезпеченні економічної ефективності логістичних систем / Попович П. // Вісник ХНТУСГ. – Харків, 2016. – Вип. № 169. – С. 223 - 225.
27. Попович П.В. Економічні аспекти використання послуг 3PL операторів вітчизняними підприємствами / П.В. Попович. // Науковий журнал. – Луцьк: Луцький НТУ, 2016. – № 2. - С. 125-129.
28. Попович П.В. Проблематика імітаційного моделювання в оцінці економічної ефективності у логістиці / П. Попович // Вісник ХНТУСГ. – Харків, 2016. – Вип. № 169. – С. 226-229.
29. Ржевський С.В. Елементи теорії дослідження операцій. – К.: ЄУФІМБ,1999. – 120 с.
30. Хемди А. Таха. Введение в исследование операцій, 7-е издание.: Пер.с англ.- М: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 913 с.
31. Цьонь О.П. Правові аспекти організації перевезень вантажів у міжнародному сполученні / О.П. Цьонь // Вісник Харківського національного технічного

університету сільського господарства імені Петра Василенка. Випуск 169. «Деревооброблювальні технології та системотехніка лісового комплексу», «Транспортні технології» Х.: ХНТУСГ імені Петра Василенка, 2016. – С. 209-211.

32. Цьонь О.П. Шляхи визначення оптимальних відстаней між пунктами транспортної мережі / Цьонь О.П. // Міжвузівський збірник “Наукові нотатки”. Випуск №55. – Луцьк.: ЛНТУ, 2016. – С. 418-421.
33. Четверухін Б. М. Дослідження операцій в транспортних системах. Частина 1. Методи лінійного програмування та їх застосування. Навчальний посібник. – К.: УТУ, 2000. – 100 с.
34. Четверухін Б.М., Бакуліч О.О., Радкевич С.Д. Дослідження операцій в транспортних системах. Частина 2. Системи масового обслуговування. Навчальний посібник. – К.: НТУ, 2001. – 141 с.