

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФІЛЬТРУВАННЯ МАЛОКОНЦЕНТРОВАНИХ СУСПЕНЗІЙ

Ю.Т. Орлюк, к.т.н., ст.н.с., завідувач відділом масло- та сироробства

Інститут продовольчих ресурсів НААН України

М. М. Шинкарик, к.т.н., доц., професор кафедри обладнання харчових технологій

О.І. Кравець, к.т.н., старший викладач кафедри обладнання харчових технологій

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Метою роботи була побудова математичної моделі процесу фільтрування малокоцентрованої суспензії при закупорювання пор багатьма частинками і постійній висоті шару осаду. Запропоновано коефіцієнти, які дозволяють враховувати відхилення форми капілярів від циліндричної та кількість частинок, що закупорюють дані капіляри. Математична модель дозволяє визначати тривалість процесу фільтрування виходячи із об'єму суспензії та встановлювати раціональний період між регенераціями самоочисного фільтрувального елемента. Порівняння параметрів отриманих шляхом математичного моделювання із реальним процесом фільтрування молочної сироватки свідчить, що математична модель адекватно відображає процес розділення суспензії на фільтрі із самоочисним фільтрувальним елементом при об'ємі фільтрату до 10 м^3 на 1 м^2 фільтрувальної поверхні. Середнє відносне відхилення результатів отриманих з допомогою математичної моделі від експерименту становить 19 %. Математична модель може бути застосована при розрахунку параметрів процесу фільтрування суспензій.

Ключові слова: суспензія, фільтрування, капіляр, пори, регенерація.

THE MATHEMATICAL MODEL OF FILTERING PROCESS AT LOW CONCENTRATION SUSPENSION

Y. Orlyuk, Ph.D., S. Res. of the Dep. of butter and cheese production

Institute of Food Resources NAAS

M. Shynkaryk, Assoc. Prof., Lecturer of the Dep. of Food Technologies Equipment

O. Kravets, Ph.D., Lecturer of the Dep. of Food Technologies Equipment

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

The aim of the work was to build a mathematical model of filtering process at low concentration suspension with many particles clogging pores and constant height of sediment layer is presented. The coefficients which allow to consider the deviation from cylindrical form capillaries and the number of particles that clog given capillaries is offered. The mathematical model allows to determine the length of the filtering process based on the volume of suspension, and to set the rational period between regenerations of self-purifier filter element. Comparing the parameters obtained by mathematical modelling with the real process of filtering milk whey indicates that the mathematical model adequately reflects the separation process of suspension on the filter with self-purifier filter element with the volume of filtrate from 0 to 10 m^3 per 1 m^2 filter surface - the average relative deviation of the results obtained with the help of the mathematical model of the experiment is 19%. The mathematical model can be applied in calculating parameters of the process of suspension filtering on the filter with self-purifier filter element.

Key words: suspension, filtration, capillary, pores, regeneration.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРОВАНИЯ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СУСПЕНЗИЙ

*Ю.Т. Орлюк, к.т.н., ст.н.с., заведующий отделом масло- и сыроделия
Институт продовольственных ресурсов НААН Украины*

*М. Н. Шинкарик, к.т.н., доц., профессор кафедры оборудования пищевых технологий
О.И. Кравец, к.т.н., старший преподаватель кафедры оборудования пищевых технологий
Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя*

Целью работы было построение математической модели процесса фильтрации малоцентрированной суспензии при закупорке пор многими частицами и постоянной высоте слоя осадка. Математическая модель позволяет определять продолжительность процесса фильтрации исходя из объема суспензии и устанавливать оптимальный период между регенерациями самоочищающегося фильтрующего элемента. Предложено коэффициенты, позволяющие учитывать отклонения формы капилляров от цилиндрической и количество частиц, которые закупоривают данные капилляры. Сравнение параметров полученных путем математического моделирования с реальным процессом фильтрации молочной сыворотки свидетельствует, что математическая модель адекватно отражает процесс разделения суспензии на фильтре с самоочищающимся фильтрующим элементом при объеме фильтрата от до 10 м^3 на 1 м^2 фильтрующей поверхности. Среднее относительное отклонение результатов полученных с помощью математической модели от эксперимента составляет 19%. Математическая модель может быть применена при расчете параметров процесса фильтрации суспензий.

Ключевые слова: суспензия, фильтрация, капилляр, поры, регенерация.

В умовах подорожчання сировини, а також коли незначна частина компонентів, потрапляючи в навколишнє середовище, створює екологічні проблеми, стає необхідним і економічно обґрунтованим розділення суспензій навіть при невеликій концентрації твердих частинок. Безліч різних за своїм складом і властивостями суспензій вимагають різних ефективних методів поділу.

До малоцентрированих суспензій можна віднести молочну сироватку, дисперсною фазою якої є дрібні частинки казеїну, утворені в процесі механічної обробки білка при виробництві твердих сирів і кисломолочного сиру. Маса частинок білка становить близько 1-3% від загальної маси сироватки, а величина – 0,2-2,0 мм [1, с. 267]. Що стосується їх фізико-механічних характеристик, то вони володіють низькою міцністю та високими адгезійними властивостями [2, с. 71-74].

Вивчені фільтраційно-компресійних властивостей частинок білка [3, с. 477-484] свідчать про стисливість осаду і залежності пористості осаду ε і питомої опору фільтрування τ_0 від тиску, що також спостерігається для багатьох псевдо-пластичних середовищ.

Рішення рівняння фільтрування з урахуванням стисливість осаду, в цілому, а також окремих його частин (вторинна консолідація) представлені в роботі [4, с. 4762.].

Істотний вплив на перебіг процесу фільтрування створюють ще два фактори - зростання в процесі фільтрування висоти шару осаду і закупорювання пор фільтрувальної поверхні дрібними частинками осаду, одне та інше призводить до збільшення опору фільтрування та сповільнення процесу.

Рішення рівняння фільтрування із врахуванням збільшення висоти шару осаду (задача Стефана) представлені в роботі [5, с. 12]. Що стосується закупорювання пор, то тут розглядаються два випадки: закупорювання кожної пори окремою частинкою і поступове закупорювання однієї пори багатьма частинками [6].

Однак, у багатьох випадках практичних завдань фільтрування опір фільтрувальної поверхні набагато менший від опору осаду і його не враховують. В даному випадку роль фільтрувальної поверхні виконує сам осад. Тому доцільно розглянути задачу фільтрування із закупорюванням пор осаду його частинками, які рухаються разом з фільтратом при постійній висоті шару осаду, яка спостерігається в практиці поділу суспензій при безперервному транспортуванні осаду, наприклад, шнеком. При сталому процесі фільтрування коефіцієнт фільтрування (з урахуванням його залежності від тиску) буде постійним, і на його зміну впливатиме тільки закупорювання пор.

Метою роботи була побудова математичної моделі процесу фільтрування малокоцентрованої суспензії при закупорювання пор багатьма частинками і постійній висоті шару осаду.

Для теоретичного аналізу процесу фільтрування були прийняті наступні допущення: з огляду на малу концентрацію суспензії, кількість суспензії і фільтрату приймали рівними; висоту осаду на фільтрувальній поверхні приймали постійною; питомий опір фільтрування осаду залежить від тиску фільтрування і визначається залежністю $\tau = f(P)$; так як опір фільтрувальної поверхні набагато менший від опору осаду, приймали що він дорівнює нулю; кількість капілярів в осаді в процесі фільтрування залишається постійним; рух рідини по капілярах відбувається в ламінарному режимі.

У відповідність з рівнянням Гагена-Пуазейля швидкість рідини в одному капілярі становить [5, с. 12]:

$$A = \frac{\pi r^4 P}{8\mu h} \quad (1)$$

де A – швидкість рідини в капілярі, м³/с;
 r – радіус капіляра, м;
 P – тиск фільтрування, Па;
 μ – динамічна в'язкість, Па·с;
 h – висота шару осаду, м.

Початкова швидкість фільтрування :

$$W_0 = NA, \quad (2)$$

де N – кількість капілярів на 1 м² фільтрувальної поверхні.

Виходячи із поняття пористості кількість капілярів на 1 м² площі фільтрувальної поверхні можна визначити наступним чином:

$$N = \frac{\varepsilon}{\pi r^2 h}, \quad (3)$$

де ε – пористість осаду, м³.

Підставляючи в формулу (2) вирази швидкості рідини в одному капілярі (1) і кількості капілярів (3) отримуємо швидкість фільтрування:

$$W_0 = \frac{\varepsilon P}{8\mu h^2} r^2. \quad (4)$$

Позначимо:

$$K = \frac{\varepsilon P}{8\mu h^2}, \quad (5)$$

тоді:

$$W_0 = Kr^2. \quad (6)$$

В процесі фільтрування:

$$W = Kr_t^2, \quad (7)$$

де r_t – поточний радіус капіляра.

При проходженні суспензії в кількості ∂V (m^3) на стінках капілярів відкладеться кількість осаду $c\partial V$ і відповідно зміниться пористість на величину:

$$c\partial V = -2N\pi r h dr; \quad (8)$$

де c – концентрація частинок в суспензії, які затримуються в капілярах шару осаду, m^3/m^3 .

Інтегруючи рівняння (8) і враховуючи, що при $r_1 = r$, $V = 0$, отримаємо:

$$V = \frac{N\pi h}{c}(r^2 - r_t^2). \quad (9)$$

Підставимо в рівняння (9) значення r^2 і r_t^2 із (6) і (7) відповідно:

$$V = \frac{N\pi h}{c}\left(\frac{W_0}{K} - \frac{W}{K}\right), \quad (10)$$

або

$$W = W_0 - \frac{cVK}{N\pi h}. \quad (11)$$

Підставляючи значення K із (5) та N із (3), отримаємо:

$$W = W_0\left(1 - \frac{c}{\varepsilon}V\right). \quad (12)$$

Здійснимо заміну W на $\frac{dV}{d\tau}$:

$$\frac{dv}{W_0\left(1 - \frac{c}{\varepsilon}V\right)} = d\tau. \quad (13)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\tau = -\frac{1}{W_0} \frac{\varepsilon}{c} \ln\left(1 - \frac{c}{\varepsilon}V\right). \quad (14)$$

Отримані рівняння (12) і (14) дають можливість визначити швидкість фільтрування і час, необхідний для фільтрування заданого об'єму суспензії V . Однак, це пов'язано з адекватним визначенням початкової швидкості фільтрування і пористості.

Необхідно також врахувати і той факт, що не всі частинки, радіус яких менший радіуса капіляра, будуть закупорювати пори, частина їх буде надходити в фільтрат. Кількість частинок, які закупорюють капіляри, запропоновано враховувати коефіцієнтом α , який визначали наступним чином:

$$\alpha = \frac{R'}{r_{av}}, \quad (15)$$

де r_{av} – середній радіус капілярів, мм;
 R' – середній радіус частинок дисперсної фази, радіус яких менший від середнього радіуса капілярів, мм.

При визначенні радіуса капіляра враховували, що він залежить від розмірів частинок осаду. При щільному укладенні однакових за розміром сферичних частинок осаду радіус капіляра можна визначити як:

$$r = 0,52R \quad (16)$$

де R – радіус частинки осаду, м.

Проте радіус всіх частинок осаду i , відповідно, радіус капілярів, не є однаковим. Очевидно, що про розподіл капілярів по радіусу можна судити виходячи з розмірів частинок осаду. На початку процесу фільтрування осад утворюють лише частинки, що мають більші розміри від отворів фільтрувальної поверхні. При відомих значеннях середніх розмірів фракцій частинок дисперсної фази за допомогою формули (16) можна отримати n значень радіусів капілярів. З урахуванням розподілу частинок по фракціях, середній радіус капіляра для всього шару становить:

$$r_{av} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i g_i)}{\sum_{i=1}^n g_i}, \quad (17)$$

де g_i – частка i -ої фракції, %.

Середній радіус частинок дисперсної фази, радіус яких менший від середнього радіуса капілярів, визначали за формулою:

$$R' = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i g'_i)}{\sum_{i=1}^n g'_i}, \quad (18)$$

де g'_i – частка i -ої фракції частинок дисперсної фази, радіус яких менший r_{av} , %.

Відхилення форми капілярів від циліндричної враховували коефіцієнтом φ :

$$\varphi = \frac{r_{av}}{R''}, \quad (19)$$

де R'' – середній радіус частинок дисперсної фази, радіус яких більший від середнього радіуса капілярів, мм:

$$R'' = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i g''_i)}{\sum_{i=1}^n g''_i}, \quad (20)$$

де g''_i – частка i -ої фракції частинок дисперсної фази, радіус яких перевищує $r_{сер}$, %.

Коефіцієнт φ підставляли в рівняння (13) і (14):

$$W = W_0 \left(1 - \frac{c}{\varphi \varepsilon} V\right); \quad (21)$$

$$\tau = -\frac{1}{W_0} \frac{\varphi \varepsilon}{c} \ln \left(1 - \frac{c}{\varphi \varepsilon} V\right). \quad (22)$$

З метою перевірки на адекватність отриманої математичної моделі проведено порівняння результатів математичного моделювання процесу фільтрування із експериментальними даними.

Для цього попередньо проведено експериментальне дослідження процесу фільтрування на фільтрі із самоочисним фільтрувальним елементом. В якості дослідної суспензії використовували молочну сироватку, отриману при виробництві сиру кисломолочного. Концентрацію дисперсної фази в сироватці визначали шляхом центрифугування проб з подальшим висушуванням осаду в сушильній шафі.

Здійснено порівняння графічної залежності тривалості фільтрування від об'єму фільтрату для реального процесу фільтрування молочної сироватки із аналогічною залежністю, що була побудована за формулою (22) (рис. 1). Встановлено, що відносна похибка складає 19%.

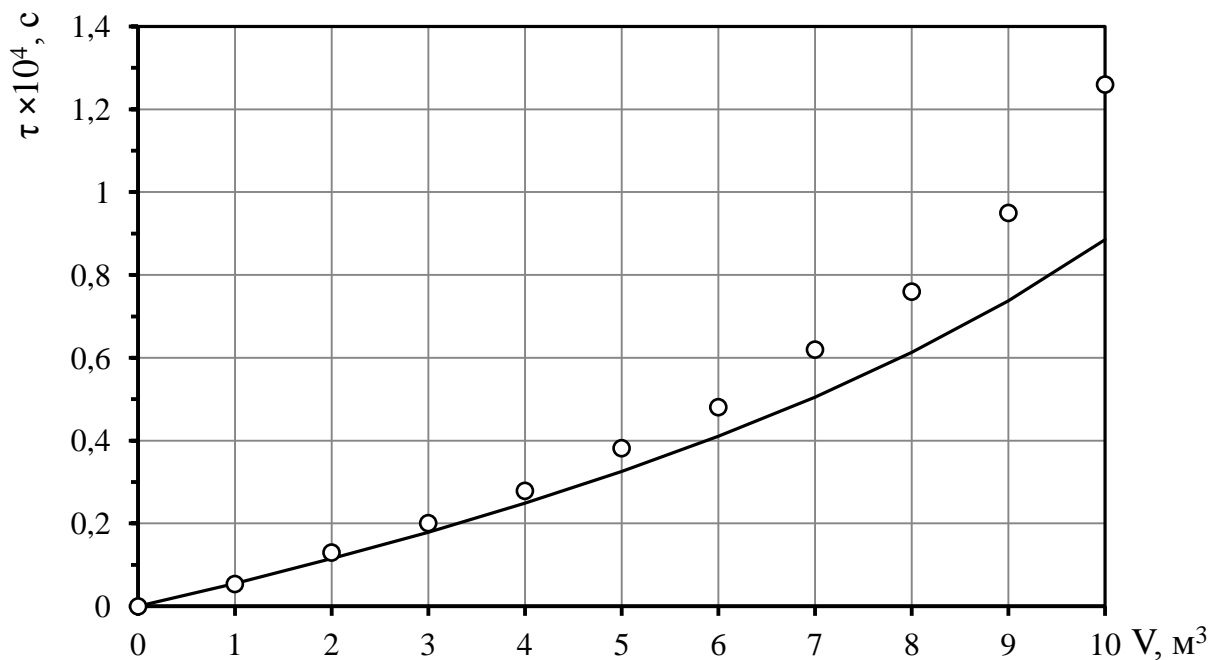


Рисунок 1. Залежність тривалості процесу фільтрування від обсягу фільтрату.
Точки - експеримент, лінії - розрахунок за формулою (22).

Висновки.

Запропонована модель процесу фільтрування молочної сироватки на основі рівняння Гегена-Пуазейля із закупорюванням пор фільтрувальної перегородки багатьма частинками може бути використана в технологічних розрахунках процесу фільтрування молочної сироватки та інших малоконцентрованих суспензій. Дозволяє прогнозувати тривалість фільтрування в залежності від об'єму отриманого фільтрату та встановлювати раціональне значення періоду регенерації фільтрувального елемента.

Математична модель адекватно відображає процес розділення суспензії на фільтрі із самоочисним фільтрувальним елементом при об'ємі фільтрату від 0 до 10 м³ на 1 м²

фільтрувальної поверхні – середнє відносне відхилення результатів отриманих з допомогою математичної моделі від експерименту становить 19 %.

Математична модель може бути використана при розрахунку процесу регенерації самоочисного фільтрувального елемента та при проектуванні нових фільтрувальних установок.

Література

1. Шинкарик, М.М. Аналіз гранулометричного складу білкової дисперсної фази / М.М. Шинкарик, О.І. Кравець // Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій. – 2011. – Т. 2, № 40. – С. 266-269.
2. Кравець, О.И. Влияние реологических характеристик сырной пыли на процесс фильтрования молочной сыворотки / О.И. Кравець, М.Н. Шинкарик. // Известия вузов. Пищевая технология. – 2013. – № 5-6. – С. 71-74.
3. Шинкарик М.М. Дослідження компресійно-фільтраційних характеристик білкової дисперсної фази / М.М. Шинкарик, О.І. Кравець // Прогресивна техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі. – 2012. – №1(15). – С.476-484.
4. Numerical and analytical modeling of solid–liquid expression from soft plant materials / M. Petryk E. Vorobiev // AIChE Journal. – 2013. – V. 59, № 12. – P. 4762.
5. Воробьев Е.И. О фильтровании пищевых суспензий со сжимаемыми осадками / Е.И. Воробьев, И.М. Федоткин // Изв. вузов СССР. Пищевая технология, – 1982. – С. 12.
6. Малиновская Т.А. Разделение суспензий в химической промышленности / Т.А. Малиновская, И.А. Кобринский, О.С. Кирсанов, В.В. Рейнфарт. – М.: Химия, 1983. – 264 с.