Міністерство освіти і науки України
Тернопільський державний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра
вищої математики

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Функції комплексної змінної. Операційне числення. Теорія ймовірностей та математична статистика

Тернопіль
2009р.

Навчальний посібник - Функції комплексної змінної. Операційне числення. Теорія ймовірностей та математична статистика / уклад. Самборська О.М., Шелестовський Б.Г., Фурсевич Л.В., Габрусєв Г.В. Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2009. - 115 с.

Укладачі: к.ф. - м.н., доц. Б.Г. Шелестовський
к.ф. - м.н.. доц. Л.В. Фурсевич
к.ф. – м.н. доц. О.М.Самборська
ст.викл. Г.В. Габрусєв

Відповідальний за випуск: к.ф. – м.н., доц. Б.Г. Шелестовський

Рецензенти: докт.фіз. - мат. наук, проф. Д.І. Боднар
докт. тех. наук, проф. М.П. Карпінський

Навчальний посібник розглянуто і затверджено
на засіданні кафедри вищої математики
протокол №3 від 14 листопада 2008 р.

Схвалено і рекомендовано до друку науково-методичною
Радою Тернопільського державного технічного університету
імені Івана Пулюя
протокол № 3 від 12 грудня 2008 р.

ВСТУП

Сучасний рівень науки та використання новітніх технологій у виробництві вимагає від спеціалістів володіння широким математичним апаратом. Завдяки останнім досягненням обчислювальної техніки математичні методи досліджень знаходять застосування в усіх галузях науки і техніки. Зокрема, студентам необхідно оволодіти знаннями з теорії функцій комплексної змінної, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики і вміти використовувати набуті знання при розв'язанні інженерних задач.

Основне завдання студентів – навчитись працювати самостійно, використовуючи при цьому різноманітні джерела інформації. Метою даного навчального посібника є надання допомоги студентам денної та заочної форми навчання при вивченні вказаних розділів вищої математики.

Кожний розділ посібника містить як основні теоретичні відомості та формули, так і приклади розв'язання типових задач. Значна частина розв'язаних у посібнику задач має технічний зміст.

Посібник укладено відповідно до програми курсу вищої математики для вищих технічних навчальних закладів і може бути використаний при здобутті знань з математики та розв'язуванні технічних задач.

1. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1.1. Комплексні числа, дії над ними

Комплексне число z має вигляд:

$$z = a + ib, \tag{1}$$

де a і b – будь-які дійсні числа, а i – так звана уявна одиниця $\left(i^2 = -1\right)$; число a називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $a = \operatorname{Re} z$, а число b – уявною частиною і позначається $b = \operatorname{Im} z$.

Дійсні числа складають частину комплексних чисел, а саме, дійсне число – це таке комплексне число, уявна частина якого дорівнює нулю.

Два комплексних числа $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ рівні одне одному $\left(z_1 = z_2\right)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + ib$ можна зобразити точкою площини XOY (рис. 1); абсциса цієї точки дорівнює дійсній, а ордината – уявній частині комплексного числа. Тому вісь OX називається дійсною віссю, а вісь ординат – уявною віссю; площину, на якій зображуються комплексні числа, називають комплексною площиною. Якщо точка зображує число z, то її називають точкою z.

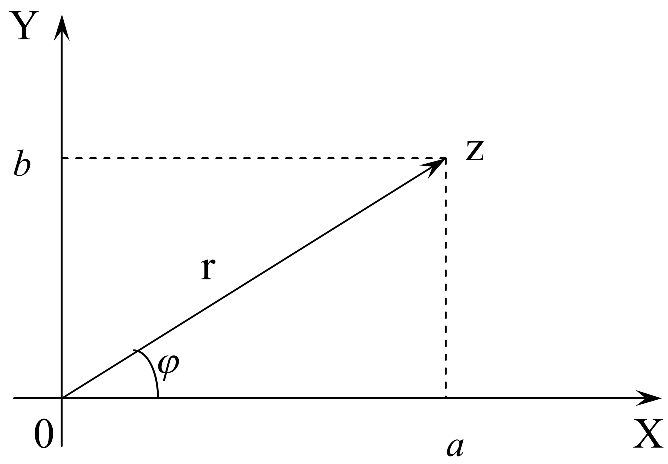


Рис. 1.

Можна зобразити комплексне число радіусом-вектором точки z; його координатами будуть відповідно дійсна і уявна частини числа z.

Положення точки, яка зображує комплексне число z, можна визначити і за допомогою полярних координат r і φ (рис. 1). При цьому $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ називається модулем, а φ – аргументом комплексного числа z, $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$; вони позначаються так:

$$r = \left| z \right|, \; \varphi = Argz. \tag{2}$$

Величина $Argz$ визначена з точністю до доданку $2k\pi$, де k – ціле число. Значення φ, яке визначається нерівностями $-\pi < \varphi \le \pi$, називається головним значенням аргумента і позначається $\arg z$.

Якщо $z = a + ib$, то комплексне число $a - ib$ називається спряженим до z і позначається $\overline{z}$. Очевидно, що $|\overline{z}| = |z|$, $\arg\overline{z} = -\arg z$.

Права частина у формулі (1) називається арифметичною формою комплексного числа. Враховуючи те, що $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ можна комплексне число записати в так званій тригонометричній формі:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (3)$$

Дії над комплексними числами виконують за формулами:

1. $\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$; (4)
2. $\left(a_1 + ib_1\right) - \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 - a_2\right) + i\left(b_1 - b_2\right)$; (5)
3. $\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1a_2 - b_1b_2\right) + i\left(a_1b_2 + a_2b_1\right)$; (6)

Якщо множники записані в тригонометричній формі, то одержиться формула:

$$r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) \cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]. \quad (6')$$

Як наслідок формули (6') одержується формула Муавра:

$$\left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \qquad (6'')$$

де n – ціле додатне число.

4. $\dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \dfrac{\left(a_1 + ib_1\right)\left(a_2 - ib_2\right)}{\left(a_2 + ib_2\right)\left(a_2 - ib_2\right)} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$; (7)

вважається, що $a_2 + ib_2 \neq 0$.

Якщо ділене і дільник записані в тригонометричній формі, то одержиться формула:

$$\frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]. \qquad (7')$$

Зауважимо, що арифметичні дії над комплексними числами виконуються за звичайними правилами дій над многочленами з врахуванням того, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ і т. д.

5. $\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$. (8)

В останній формулі n – ціле додатне число; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня з r; k – довільне ціле число. Надаючи k значення $0, 1, 2, ..., n-1$, одержимо n різних значень кореня. При інших цілих значеннях будуть повторюватися значення кореня, які одержані при $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Приклад 1. Записати в тригонометричній формі числа:

а) $z = 1 + i$; б) $z = 1$; в) $z = -3i$.

Розв'язання. а) $1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $1 = 1 \cdot \left(\cos 0 + i\sin 0\right)$;

в) $-3i = 3 \cdot \left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

При розв'язанні прикладів ми використали формулу (2) і (3).

Приклад 2. Обчислити $\left(\frac{i}{1+i}\right)^2$.

Розв'язання. Спочатку виконаємо дію ділення: $\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$.

Для одержаного комплексного числа знаходимо: $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Тоді можемо записати: $\frac{i}{1+i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Нарешті, використавши формулу (6"), одержуємо:

$$\left(\frac{i}{1+i}\right)^2=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{i}{2}.$$

Приклад 3. Обчислити всі значення $\sqrt[3]{-8}$.

Розв'язання. Запишемо підкореневий вираз у тригонометричній формі: $-8=8\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$, звідки

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right).$$

При $k=0, 1, 2$ одержимо: $\sqrt[3]{-8}=\begin{cases}1+i\sqrt{3},\\ -2,\\ 1-i\sqrt{3}.\end{cases}$

Приклад 4. Де розміщені точки $z=x+iy$ для яких $\left|z^2\right|=4$.

Розв'язання. $\left|z^2\right|=|z|^2$; $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; $\left|z^2\right|=x^2+y^2$.

Таким чином, згідно з умовою точки z розміщені на колі $x^2+y^2=4$.

1.2. Основні поняття теорії функцій комплексного аргумента

Функції комплексного аргумента

Якщо кожній точці z деякої множини точок комплексної змінної z поставлено у відповідність одне (у випадку однозначної функції), або декілька (у випадку багатозначної функції) значень w, то цим самим задано $w=f(z)$ як функцію від z.

Множина точок, на якій задана (визначена) функція $w=f(z)$ буде, як правило, або сукупністю всіх точок площини, або всією площиною, за винятком окремих її точок, або однозв'язною чи багатозв'язною областю, яка є частиною площини, обмеженою однією, чи декількома гладкими або кусково-гладкими кривими, із якої можуть бути вилучені окремі точки.

Наприклад, функція $w=z^2$ однозначна і визначена на всій площині; функція $w=\arg z$ багатозначна і визначена на всій площині, за винятком точки $z=0$.

Позначаючи $f(z)=u+iv$, ми бачимо, що задання функції $f(z)$ комплексної змінної $z=x+iy$ рівносильне заданню двох функцій $u=u(x,y), v=v(x,y)$ дійсних аргументів x і y. Тому функція $f(z)$ може бути записана у вигляді:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \qquad (9)$$

Наприклад, нехай $w=z^3$. Тоді, враховуючи, що $z=x+iy$, знаходимо:

$$w=(x+iy)^3=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right).$$

Тут $u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

Нехай значення змінної z зображається на деякій площині (площині z), а значення функції на другій площині (площині w), тоді функція $w=f(z)$ встановлює відповідність між точками площини z в яких ця функція визначена, і точками площини w. Тобто, функція $w=f(z)$ здійснює відображення точок площини z на відповідні точки площини w.

Приклад. Функція $w=z^2$ здійснює однозначне відображення внутрішності круга на площині z з радіусом $R_1=2$ і центром в початку координат на внутрішність круга на площині w з центром в початку координат і радіусом $R_2=4$.

Дійсно, точки круга на площині z визначені нерівністю $|z|<2$. Але якщо $w=z^2$, то нерівність $|z|<2$ рівносильна нерівності $|w|<4$, яка визначає сукупність точок, що лежать в середині круга на площині w з радіусом $R_2=4$ і центром в початку координат.

Границя. Неперервність

Околом точки z_0 будемо називати внутрішність круга з центром в цій точці.

δ – околом точки z_0 називається внутрішність круга радіуса δ з центром в точці z_0, тобто сукупність точок, що задовольняють нерівність $|z-z_0|<\delta$.

<u>Означення.</u> Число z_0 називають границею послідовності комплексних чисел $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ і пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ можна підібрати таке натуральне число N (яке залежить від ε), що при $n>N$ буде виконуватися нерівність:

$$|z_n-z_0|<\varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то яким би малим не був ε – окіл точки z_0, зовні цього околу може залишатися лише скінченна кількість точок послідовності $\{z_n\}$.

Існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, де $z_n=x_n+iy_n$, рівносильне існуванню двох границь:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\ \ (x_0+iy_0=z_0).$$

Яким би великим не було додатне число M, до нього можна підібрати натуральне N, що $|z_n| > M$ при $n > N$,то кажуть, що така послідовність $\{z_n\}$ прямує до нескінченності: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. В цьому випадку говорять, що послідовність $\{z_n\}$ збігається до нескінченно віддаленої точки; околом цієї точки називається зовнішність круга достатньо великого радіуса R з центром в точці $z = 0$.

Означення. Комплексне число w_0 називається границею функцій $f(z)$ при $z \to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок z, які задовольняють умову $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Означення. Якщо функція $w = f(z)$ визначена в точці z_0 і в деякому її околі існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ і

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{10}$$

то функція $f(z)$ називається неперервною в точці z_0.

Якщо позначати $z - z_0 = \Delta z$, $f(z) - f(z_0) = \Delta w$, то умову (10) можна записати у вигляді:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta w = 0. \tag{10′}$$

1.3. Основні трансцендентні функції комплексної змінної

Показникова, тригонометричні і гіперболічні функції

Згідно означення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ $(z = x + iy)$ приймаються суми таких рядів:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots; \tag{11}$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots; \tag{12}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \tag{13}$$

Ряди, записані вище, збігаються абсолютно при будь-якому значенні z.

Мають місце такі співвідношення:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z; \tag{14}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \tag{15}$$

$$e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right),\ \left|e^z\right| = e^x,\ Arge^z = y; \qquad (16)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2},\ e^{z+2\pi i} = e^z,\ \left(e^z\right)^m = e^{zm}\ (m - \text{ціле число}). \qquad (17)$$

Співвідношення (16) дозволяє обчислювати значення функції e^z, а співвідношення (15) – функцій $\sin z$ і $\cos z$ при будь-якому значенні z. Легко перевірити, що $\cos\left(z+2\pi\right)=\cos z$, $\sin\left(z+2\pi\right)=\sin z$.

Неважко переконатись, що для функцій $\sin z$ і $\cos z$ зберігаються основні співвідношення, які зв'язують їх у випадку дійсного аргумента.

Функції $tg\,z$ і $ctg\,z$ визначаються за допомогою співвідношень:

$$tg\,z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)},\ ctg\,z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{e^{iz}-e^{-iz}}; \qquad (18)$$

Гіперболічні функції $sh\,z$, $ch\,z$, $th\,z$, $cth\,z$ визначаються за допомогою формул:

$$sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z},\ cth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z}. \qquad (19)$$

Зауважимо, що гіперболічні функції можуть бути виражені через тригонометричні:

$$sh\,z = -i\sin iz,\ ch\,z = \cos iz,\ th\,z = -i\,tg\,iz,\ cth\,z = i\,ctg\,iz. \qquad (20)$$

Приклад 5. Знайти $\sin\left(1+2i\right)$.

$\sin\left(1+2i\right) = \sin 1\cos 2i + \cos 1\sin 2i = \sin 1\,ch 2 + i\cos 1\,sh 2$. Обчислюючи $\sin\left(1+2i\right)$ ми використали формулу $\sin\left(z_1+z_2\right)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$ і формули (20).

Логарифмічна функція. Обернені тригонометричні та обернені гіперболічні функції

Якщо $e^w = z$, де $z\neq 0$, то w називається логарифмом числа z і позначається

$$w = Ln\,z.$$

Обчислюється $Ln\,z$ за формулою:

$$Ln\,z = \ln\left|z\right| + iArg\,z = \ln\left|z\right| + i\arg z + 2k\pi i,\ \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right). \qquad (21)$$

Головним значенням логарифма числа z (позначається $\ln z$) називається те його значення, яке відповідає головному значенню аргумента числа z. З формули (21) головне значення логарифма одержимо при $k=0$. Таким чином,

$$\ln z = \ln\left|z\right| + i\arg z. \qquad (21')$$

Приклад 6. Знайти $\ln\left(-1\right)$ і $Ln\left(-1\right)$.

Розв'язання. $\ln\left(-1\right) = \ln 1 + \pi i = \pi i$.

$Ln\left(-1\right) = \pi i + 2k\pi i = \left(2k+1\right)i\pi$, $\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right)$.

Узагальнена на випадок комплексного аргумента логарифмічна функція має такі ж властивості, як логарифмічна функція дійсного аргумента.

Щоб визначити дію піднесення до комплексного степеня z комплексного числа ξ, $\xi \neq 0$, зауважимо, що для будь-якого комплексного ξ: $e^{Ln\xi} = \xi$. Тому вираз ξ^z визначається формулою:

$$\xi^z = e^{zLn\xi}. \tag{22}$$

Приклад 7. Знайти i^i.

Розв'язання.

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Якщо $z = \sin w$, то w називається арксинусом числа z і позначається $w = Arc\sin z$. Аналогічно, якщо $z = \cos w$, то w називається арккосинусом z і позначається $w = Arc\cos z$; якщо $z = tg\, w$, то w називається арктангенсом z і позначається $w = Arctg\, z$; якщо $z = ctg\, w$, то w називається арккотангенсом z і позначається $w = Arcctg\, z$.

Обернені тригонометричні функції обчислюються за формулами:

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right); \tag{23}$$

$$Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \tag{24}$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2}Ln\frac{i-z}{i+z}; \; Arcctg\, z = \frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}. \tag{25}$$

Зауважимо, що у формулах (23), (24) потрібно врахувати всі значення коренів.

Якщо $z = sh\, w$, то $w = Arsh\, z$. Аналогічно, якщо $z = ch\, w$, то $w = Arch\, z$; якщо $z = tg\, w$ то $w = Arth\, z$; якщо $z = cth\, w$, то $w = Arcth\, z$. Функції $Arsh\, z$, $Arch\, z$, $Arth\, z$, $Arcth\, z$ називаються оберненими гіперболічними функціями, вони визначаються формулами:

$$Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right); \tag{26}$$

$$Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \tag{27}$$

$$Arth\; z = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}, \; Arcth\; z = \frac{1}{2}Ln\frac{z+1}{z-1}. \tag{28}$$

Приклад 8. Знайти $Arc\sin 2$.

Розв'язання.

$$Arc\sin 2 = -iLn\left(2i \pm i\sqrt{3}\right) = -iLn\left[\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i\right] = -i\left[\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

1.4. Диференціювання функцій комплексної змінної

Похідна і диференціал функцій комплексної змінної

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в деякому околі точки z. Надамо незалежній змінній z приросту Δz і обчислимо приріст функції

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Означення. Якщо існує скінченна границя відношення $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при прямуванні Δz до нуля довільним способом, то ця границя називається похідною функції $f(z)$ в точці z і позначається

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{30}$$

Функція $f(z)$, яка має похідну в точці z, називається диференційовною в цій точці.

Означення. Лінійна відносно Δz частина приросту функції $f(z)$ називається її диференціалом і позначається $df(z)$. Диференціал функції знаходиться за формулою:

$$df(z) = f'(z)\,\Delta z.$$

Теорема. Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційовною в точці $z = x + iy$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були диференційовні в точці (x, y) як функції двох змінних і щоб виконувалися умови

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \tag{31}$$

які називаються умовами Коші-Рімана.

Приклад 9. Встановити чи диференційовна функція $f(z) = z^2$.

Розв'язання.

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2,\ v(x, y) = 2xy.$$

Легко перевірити, що умови (31) виконуються в усіх точках площини z, функція диференційовна в усіх точках цієї площини.

Для відшукання похідної $f'(z)$ можна використати одну із таких формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};\ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{32}$$

Означення. Якщо однозначна функція диференційовна в точці z і в деякому її околі, то вона називається аналітичною в цій точці.

Функція, диференційовна в усіх точках деякої області, називається аналітичною в цій області.

Точки, в яких функція $f(z)$ аналітична, називаються правильними точками цієї функції. Точки, в яких функція не є аналітичною (зокрема, де вона не визначена), називаються особливими.

Правила диференціювання. Зв'язок аналітичних функцій з гармонічними

Нехай функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ диференційовні в точці z. Для функцій комплексної змінної зберігаються всі відомі з математичного аналізу правила диференціювання:

1) $\left[f_1(z) \pm f_2(z)\right]' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$;

2) $\left[cf(z)\right]' = cf'(z)$;

3) $\left[f_1(z) \cdot f_2(z)\right]' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_2'(z) \cdot f_1(z)$;

4) $\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \dfrac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_2'(z) \cdot f_1(z)}{\left[f_2(z)\right]^2}$;

5) Нехай функція $\omega = \psi(z)$ диференційовна в точці z, а функція $w = f(\omega)$ диференційовна в точці $\omega = \psi(z)$. Тоді складна функція $w = f\left[\psi(z)\right]$ диференційовна в точці z і її похідна знаходиться за формулою:

$$\left\{f\left[\psi(z)\right]\right\}_z' = f_\omega'\left[\psi(z)\right] \cdot \psi'(z).$$

Дійсна і уявна частини функції $f(z) = u + iv$, аналітичної в деякій області D, задовільняють в цій області рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \text{ тобто } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ і } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язки рівняння Лапласа називаються гармонічними функціями. Отже, дійсна і уявна частини аналітичної функції є гармонічні функції. Однак, для будь-яких двох гармонічних функцій u і v функція $u + iv$ не буде, взагалі кажучи, аналітичною, бо умови (31) можуть не виконуватися.

Аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ми одержимо, якщо задамо одну із двох гармонічних функцій u, v, а іншу підберемо так, щоб виконувалися умови Коші-Рімана (31), тобто визначимо другу функцію за її двома частинними похідними.

Дві гармонічні функції, які задовільняють умови Коші-Рімана, називаються взаємно спряженими гармонічними функціями.

Приклад 10. Знайти аналітичну функцію, якщо відома її уявна частина $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

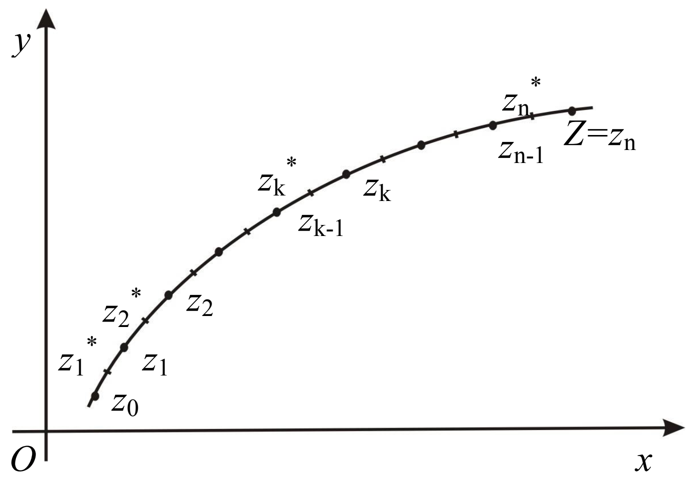
Розв'язання. Так як $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то із умов Коші-Рімана знаходимо: $\frac{\partial u}{\partial x} = -4y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1$. Скориставшись першою із двох останніх умов знаходимо: $u = \int(-4y)\,dx = -4xy + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – поки що довільна функція. Продиференціюємо знайдену функцію u по y і підставимо у формулу $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1$. Одержимо $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1$. $\varphi'(y) = -1$; $\varphi(y) = -y + c$. Отже, $u = -4xy - y + c$. Остаточно знаходимо:

$$w = u + iv = -4xy - y + c + i\left(2x^2 - 2y^2 + x\right) = 2i\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + i(x + iy) + c =$$
$$= 2iz^2 + iz + c.$$

1.5. Інтегрування функцій комплексної змінної

Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена на деякій лінії Γ з початком в точці z_0 і з кінцем в точці z. Розіб'ємо дугу Γ на n – складових частин довільно вибраними точками $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ і приймемо, що $z = z_n$.



Позначимо $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$. Число Δz_k зображується вектором, початок якого в точці z_{k-1}, а кінець в точці z_k; $|\Delta k|$ – довжина цього вектора, тобто довжина хорди, що стягує k-ту часткову дугу. На кожній частковій дузі з кінцями в точках z_{k-1}, z_k ($k = \overline{1, n}$) довільно виберемо точку z_k^* і складемо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(z_k^*\right)\Delta z_k, \tag{33}$$

яка називається інтегральною сумою функції $f(z)$, побудованою для даного розбиття дуги Γ на частини і даного вибору точок z_k^*. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (33) при $\max|\Delta z_k| \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття дуги Γ на складові частини, ні від вибору точок z_k^*, то цю границю називають інтегралом від функції $f(z)$ по кривій Γ і позначають

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(z_k^*\right)\Delta z_k . \qquad (34)$$

Теорема. Якщо крива Γ кусково-гладка, а функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ неперервна на кривій Γ, то інтеграл від функції $f(z)$ по кривій Γ існує і обчислюється за формулою:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy , \qquad (35)$$

де $\int_\Gamma udx - vdy$, $\int_\Gamma vdx + udy$ – криволінійні інтеграли по координатах.

Якщо дуга Γ задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$, ($t_0 \le t \le T$) і функції $x(t), y(t)$ неперервно диференційовані при $t_0 \le t \le T$, то в цьому випадку

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt , \qquad (36)$$

де $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Нехай Γ – замкнений контур. Додатним напрямом на контурі Γ називають напрям, при якому область, що обмежена цим контуром, залишається зліва.

З формули (35) випливає, що інтеграл від функції комплексної змінної $f(z)$ по кривій Γ має такі ж властивості, як криволінійний інтеграл по координатах:

1) $\int_\Gamma \left[f_1(z) + f_2(z)\right] = \int_\Gamma f_1(z)dz + \int_\Gamma f_2(z)dz$;
2) $\int_\Gamma cf(z)dz = c\int_\Gamma f(z)dz$,
   (c – дійсна або комплексна стала);
3) $\int_{\overline{\Gamma}} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$,
   (дуга $\overline{\Gamma}$ геометрично співпадає з дугою Γ, але має протилежний напрям);
4) якщо дуга Γ складається з дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$, то $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\Gamma_n} f(z)dz$;
5) $\int_\Gamma dz = z - z_0$,
   де z_0 – початок, z – кінець дуги Γ.

Приклад 11. Обчислити $\int_\Gamma z \operatorname{Re} z dz$, де Γ – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + 3i$.

Розв'язання. Рівняння прямої, що з'єднує точки z_1, z_2 має вигляд: $y = 3x$. Запишемо параметричні рівняння цієї прямої: $x = t, y = 3t$. Звідси

$z = x + iy = (1+3i)t$. Очевидно, що параметр t змінюється на даному відрізку від 0 до 1. Скориставшись формулою (36), одержимо:

$$\int_{\Gamma} z \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 (1+3i)t \cdot t \cdot (1+3i) dt = (1+3i)^2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{-8+6i}{3} = -\frac{8}{3} + 2i.$$

Приклад 12. Обчислити $\int_L \frac{dz}{z - z_0}$, де L – коло з центром в точці z_0 і радіусом R, яке обходиться в додатному напрямі.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Параметричні рівняння кола L такі: $x = x_0 + R\cos t$; $y = y_0 + R\sin t$ ($0 \le t \le 2\pi$). Тому $z = z_0 + Re^{it}$ ($0 \le t \le 2\pi$).

Згідно з формулою (36) одержимо:

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{R\, i\, e^{it} dt}{R e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Основна теорема Коші. Інтегральна формула Коші

Теорема Коші (для однозв'язної області).

Якщо функція $f(z)$ аналітична на замкненому контурі L і в однозв'язній області D, обмеженій цим контуром, то

$$\int_L f(z) dz = 0. \tag{37}$$

Теорема Коші для багатозв'язної області.

Нехай функція $f(z)$ аналітична як в багатозв'язній області D, обмеженій зовнішнім контуром Γ_0 і внутрішніми контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$, так і на самих контурах. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \tag{37$'$}$$

де Γ – складний контур, який обмежує область D і складається із контурів $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$. Напрям інтегрування на кожному контурі вибраний так, щоб область D при обході контурів залишалася зліва.

Якщо на кожному внутрішньому контурі $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ вибрати такий напрям інтегрування, при якому область, яка обмежена цим контуром, залишається зліва, то формулу (37′) можна записати у такому вигляді:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \tag{38}$$

В частинному випадку, якщо $f(z)$ аналітична на контурах Γ_0 і Γ_1 і в двозв'язній області, обмеженій цими контурами, то формулу (38) можна записати так:

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz. \tag{38$'$}$$

Якщо $\Phi(z)$ – деяка функція, для якої $\Phi'(z)=f(z)$, де $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D, і точки z_1 та z_2 лежать всередині області D, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1). \qquad (39)$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична на деякому замкненому контурі Γ і в однозв'язній області D, обмеженій цим контуром, то для будь-якої точки z області D справджується формула:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}; \qquad (40)$$

(обхід контура здійснюється в додатному напрямі). Ця формула називається інтегральною формулою Коші, а інтеграл справа – інтегралом Коші.

Формула (40) дозволяє знаходити значення аналітичної функції в довільній точці, що лежить всередині області D якщо відомі значення функції на контурі Γ, який обмежує область D.

Якщо функція $f(z)$ аналітична на деякому замкненому контурі Γ і в області D, обмеженій цим контуром, то для будь-якої точки z області D справджується формула:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}, \qquad (41)$$

де $f^{(n)}(z)$ – похідна n-го порядку функції $f(z)$.

Таким чином, з аналітичної функції $f(z)$ в деякій точці, тобто з існування похідної першого порядку даної функції в деякому околі цієї точки, випливає існування в околі цієї ж точки похідних даної функції будь-якого порядку, а, отже, і аналітичність цих похідних.

Формули (40) і (41) можуть бути використані для обчислення інтегралів по замкнутих контурах.

Приклад 13. Обчислити $\int_{\Gamma} z\sin 2zdz$, де Γ – довільна лінія, яка з'єднує точки $z_1=-i$, $z_2=0$.

Розв'язання. Функція $z\sin 2z$ аналітична в усій площині z, допомогою формули (39):

$$\int_{-i}^{0} z\sin 2z=\left(-\frac{z}{2}\cos 2z+\frac{1}{4}\sin 2z\right)\Big|_{-i}^{0}=-\left(\frac{i}{2}\cos 2i-\frac{1}{4}\sin 2i\right)=$$

$$=-\left(\frac{i}{2}ch2-\frac{i}{4}sh2\right)=\frac{i}{4}(sh2-2ch2).$$

Приклад 14. Обчислити $\int_{\Gamma}\frac{e^z dz}{z(z+3i)}$, де Γ – коло $|z+3i|=1$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ аналітична на контурі Γ і в області, обмеженій цим контуром. Застосувавши до функції $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ інтегральну формулу Коші (40), одержимо:

$$\int_\Gamma \frac{e^z dz}{z(z+3i)}=\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z+3i}=2\pi i f(-3i)=2\pi i\frac{e^{-3i}}{-3i}=-\frac{2\pi}{3}(\cos 3-i\sin 3).$$

Приклад 15. Обчислити $\int_\Gamma \dfrac{\cos z\, dz}{(z-i)^3}$, де Γ – коло $|z|=2$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\cos z$ аналітична в області $|z|\le 2$. Застосувавши до функції $f(z)=\cos z$ формулу (41), знаходимо:

$$\int_\Gamma \frac{\cos z\, dz}{(z-i)^3}=\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2(\cos z)}{dz^2}\Big|_{z=i}=-\pi i\cos i=-\pi i ch1.$$

Приклад 16. Обчислити $\int_\Gamma \dfrac{dz}{z^2+4}$, де Γ – коло $|z|=3$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $F(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$ аналітична в області $|z|\le 3$ всюди, крім точок $z_1=-2i$, $z_2=2i$. Побудуємо кола γ_1 і γ_2 з центром в точках $z_1=-2i$ та $z_2=2i$ з настільки малими радіусами, щоб ці кола не перетинались і повністю лежали в крузі $|z|<3$. У тризв'язній області, обмеженій контурами Γ, γ_1 і γ_2, функція $F(z)$ аналітична. Застосуємо до функції $F(z)$ теорему Коші для багатозв'язної області:

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+4}=\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2+4}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2+4}.$$

До кожного з інтегралів справа застосуємо інтегральну формулу Коші (40).

$$\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2+4}=\int_{\gamma_1}\frac{\frac{1}{z-2i}dz}{z+2i}=2\pi i\frac{1}{z-2i}\Big|_{z=-2i}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2+4}=\int_{\gamma_2}\frac{\frac{1}{z+2i}dz}{z-2i}=2\pi i\frac{1}{z+2i}\Big|_{z=2i}=\frac{\pi}{2}.$$

Остаточно одержимо: $\int_\Gamma \dfrac{dz}{z^2+4}=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=0$.

Зауваження: в прикладах 14–16 обхід замкнених контурів відбувається в додатному напрямі.

1.6. Ряди

Числові ряди з комплексними членами

Ряд $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,$ (42)

де z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – комплексні числа, називається числовим рядом з комплексними членами.

Сума $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ називається n-ною частинною сумою ряду (42). Складемо послідовність частинних сум цього ряду: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$. Ряд (42) називається збіжним, якщо існує скінченна границя S послідовності його частинних сум при необмеженому зростанні номера n, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S; \qquad (43)$$

S називається сумою цього ряду.

Якщо границя послідовності частнних сум нескінченно велика або не існує, то ряд (42) називається розбіжним.

Наведемо деякі теореми про числові ряди з комплексними членами.

Теорема 1. Для того, щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, де $z_n = x_n + iy_n$ збігався, необхідно і достатньо, щоб збігалися ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Таким чином, щоб дослідити на збіжність ряд (42), потрібно дослідити на збіжність ряди з дійсними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Теорема 2. (Необхідна умова збіжності). Якщо ряд (42) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Теорема 3. Якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, утворений з модулів членів ряду (42), то збігається також ряд (42).

В цьому випадку ряд (42) називається абсолютно збіжним.

Якщо ряд (42) збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ розбігається, то ряд (42) називається умовно збіжним.

Для дослідження збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ застосовуються ознаки, які вивчалися в курсі математичного аналізу (для рядів з дійсними членами).

Приклад 17. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}. \qquad (44)$$

Розв'язання. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i|^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad (44')$$

Ряд (44′), як відомо, розбігається (гармонічний ряд). Значить ряд (44) не є абсолютно збіжним.

Розглянемо ряди, утворені відповідно дійсними і уявними частинами членів ряду (44):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

На основі теореми Лейбніца ці ряди збігаються. Таким чином, ряд (44) збігається умовно.

Ряди функцій комплексної змінної

Ряд

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots, \tag{45}$$

де $f_n(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ – функції комплексної змінної, визначені в деякій області D, називається функціональним рядом. Його n-на часткова сума $S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)$ є функцією від z в області D. Якщо в кожній точці z з області D існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)=f(z)$, то ряд (45) називається збіжним в області D; $f(z)$ – сума цього ряду.

Функціональний ряд називається рівномірно збіжним в області D до функції $f(z)$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, який залежить тільки від ε (і не залежить від $z\in D$), що при $n>N$ для всіх $z\in D$ виконується нерівність:

$$\left|f(z)-S_n(z)\right|<\varepsilon.$$

Теорема Вейєрштрасса. Якщо члени $f_n(z)$ ряду (45) при всіх $z\in D$ задовольняють умови

$$\left|f_n(z)\right|\le a_n \quad (n=1,2,\ldots),$$

де a_n – додатні числа, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, то даний функціональний ряд (45) збігається рівномірно в області D.

Для рівномірно збіжних функціональних рядів з комплексними членами мають місце такі ж теореми, як і для функціональних рядів з дійсними членами.

Степеневі ряди з комплексними членами

Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(z-z_0\right)^n, \tag{46}$$

де C_n – сталі комплексні числа, z_0 – фіксоване комплексне число, z – комплексна змінна, називається степеневим рядом.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (46) збігається в точці $z_1 \neq z_0$, то він абсолютно збігається в крузі $\left|z - z_0\right| < \left|z_1 - z_0\right|$; якщо ряд (46) розбігається при $z = z_2$ то він розбігається і в будь-якій точці z, для якої $\left|z - z_0\right| > \left|z_2 - z_0\right|$.

На основі теореми Абеля одержується такий результат: для кожного степеневого ряду існує таке число $R \geq 0$, що при $\left|z - z_0\right| < R$ ряд абсолютно збігається, а при $\left|z - z_0\right| > R$ – розбігається. Це число R називається радіусом збіжності ряду (46), а круг $\left|z - z_0\right| < R$ – кругом його збіжності.

Радіус збіжності R обчислюється за такими формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \tag{47}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|C_n\right|}}. \tag{48}$$

Радіус збіжності R може дорівнювати, зокрема, і нескінченності; в цьому випадку степеневий ряд (46) збігається абсолютно в усій комплексній площині.

Приклад 18. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

Розв'язання. В даному випадку $C_n = \frac{1}{2^n} = \left|C_n\right|$. Тоді

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|C_n\right|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Ряд Тейлора

Якщо функція $f(z)$ – аналітична в крузі $\left|z - z_0\right| < R$, то вона єдиним способом розкладається в цьому крузі в степеневий ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z - z_0\right)^n, \tag{49}$$

де коефіцієнти C_n визначаються за формулами

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{f(z)\,dz}{\left(z - z_0\right)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{50}$$

ℓ – будь-який кусково-гладкий замкнений контур, що повністю лежить в крузі $\left|z - z_0\right| < R$ і містить всередині себе точку z_0. Ряд у виразі (49) називається рядом Тейлора для функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$; якщо $z_0 = 0$, то даний ряд називається рядом Маклорена.

Радіус збіжності ряду Тейлора для будь-якої аналітичної в околі точки z_0 функції дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки цієї функції.

Якщо $f(z_0)=0$, то точка z_0 називається нулем функції $f(z)$. В цьому випадку розклад функції в ряд Тейлора в околі точки z_0 має вигляд:

$$f(z)=C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\dots.$$

Якщо в розкладі (49) функції $f(z)$ $C_0=C_1=\dots=C_{n-1}=0$, але $C_n\neq 0$ і, отже розклад має вигляд

$$f(z)=C_n(z-z_0)^n+C_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\dots,$$

то точка z_0 називається нулем функції $f(z)$ порядку (або кратності) n. Якщо $n=1$, то нуль називається простим. З формул (50) для коефіцієнтів ряду Тейлора випливає, що якщо точка z_0 є нулем порядку n функції $f(z)$, то $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(n-1)}(z_0)=0$, $f^{(n)}(z_0)\neq 0$.

Ряд Лорана

Рядом Лорана називається ряд виду

$$C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\dots+C_n(z-z_0)^n+\dots+$$
$$+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\dots. \tag{51}$$

Ряд Лорана можна записати ще так:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n. \tag{52}$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $R_1<|z-z_0|<R_2$, то вона єдиним способом розкладається в цьому кільці в ряд Лорана (51), коефіцієнти C_n визначаються формулами:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\dots), \tag{53}$$

де ℓ – будь-який кусково-гладкий замкнений контур, що повністю лежить в кільці $R_1<|z-z_0|<R_2$ і обходить точку z_0 проти годинникової стрілки.

Якщо в точці $z=z_0$ функція $f(z)$ аналітична, то круг з центром в точці $z=z_0$, радіус якого дорівнює віддалі точки z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$, також є одним із "кілець", де можна розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)$. В цьому випадку $C_n=0$ при $n=-1,-2,\dots$. Тому ряд Лорана перетворюється в ряд Тейлора, який є частковим випадком ряду Лорана.

Формули (53), що визначають коефіцієнти ряду Лорана, недостатньо зручні для обчислення. В деяких випадках можна скористатися простішими способами.

1) Нехай $f(z)$ є правильна дробово-раціональна функція

$$f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+...+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n},\ m<n.$$

Як відомо, таку функцію можна представити у вигляді суми елементарних дробів вигляду $\frac{A}{(z-z_0)^k}$ де A, z_0 – комплексні числа, k – ціле число ≥ 1.

Таким чином, розклад правильної дробово-раціональної функції в ряд Лорана зводиться до розкладу в ряд Лорана функції $\frac{1}{(z-z_0)^k}$.

Елементарний дріб $\frac{1}{(z-z_0)}$ розкладається в ряд, члени якого утворюють геометричну прогресію, а дріб $\frac{1}{(z-z_0)^k}$ – ряд, який одержується за допомогою $(k-1)$ – кратного диференціювання ряду геометричної прогресії.

Приклад 19. Функцію $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ розкласти в ряд Лорана в таких областях:

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>2$.

Розв'язання. Представимо функцію $f(z)$ у вигляді:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Розглянемо ряд, члени якого утворюють геометричну прогресію

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+...+z^n+... \tag{54}$$

Радіус збіжності ряду (54) $R=1$, тому цей ряд збігається абсолютно в крузі $|z|<1$. Як і у випадку дійсної змінної, легко встановити, що сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії $S=\frac{1}{1-z}$. Отже,

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+...+z^n+...\ (|z|<1). \tag{55}$$

Для того, щоб розкласти дану функцію $f(z)$ в ряд Лорана, застосуємо формулу (55).

а) Нехай $|z|<1$. Функція $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ має дві особливі точки $z_1=1$, $z_2=2$. Отже, вона аналітична в крузі $|z|<1$ і розкладається в цій області в ряд Тейлора.

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+...+z^n+...;$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Розклад функції $f(z)$ в крузі $|z|<1$ має вигдяд:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)+1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

б) Нехай $1<|z|<2$. В цьому випадку, оскільки $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right),\ \left|\frac{1}{z}\right|<1.$$

Отже, в кільці $1<|z|<2$ розклад функції $f(z)$ такий:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

в) Нехай $|z|>2$. В цьому випадку

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right),\ \left|\frac{2}{z}\right|<1.$$

Таким чином, при $|z|>2$ розклад має вигляд:

$$f(z)=\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^{n+1}}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\ldots+\frac{2^n-1}{z^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}.$$

2) При розкладі в ряд Лорана ірраціональних і трансцендентних функцій інколи можна використати розклади в ряд Тейлора функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$ і інші відомі розклади.

Приклад 20. В околі точки $z=0$ розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Розв’язання. Точка $z=0$ є особливою точкою цієї функції. Використовуючи розклад

$$e^{w}=1+\frac{w}{1!}+\frac{w^{2}}{2!}+\ldots+\frac{w^{n}}{n!}+\ldots,$$

справедливий на всій комплексній площині w, і покладаючи $w=\frac{1}{z}$, одержимо:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^{2}}+\ldots+\frac{1}{n!z^{n}}+\ldots.$$

Одержаний ряд збігається при всіх z, крім $z=0$.

1.7. Ізольовані особливі точки аналітичної функції

Особлива точка z_0 аналітичної функції $f\left(z\right)$ називається ізольованою, якщо в деякому її околі немає інших особливих точок функції $f\left(z\right)$.

Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $f\left(z\right)$.

В деякому кільці $0<\left|z-z_0\right|<R$ функцію $f\left(z\right)$ можна розкласти в ряд Лорана (51), при цьому можливі три випадки:

1) Одержаний ряд Лорана не містить членів з від’ємними степенями різниці $z-z_0$. Така особлива точка називається усувною особливою точкою функції $f\left(z\right)$.

2) Ряд Лорана містить скінченну кількість членів з від’ємними степенями різниці $z-z_0$. Така особлива точка називається полюсом.

3) Ряд Лорана містить нескінченну кількість членів з від’ємними степенями різниці $z-z_0$. Така особлива точка називається істотно особливою точкою функції $f\left(z\right)$.

1) В першому випадку функцію $f\left(z\right)$ можна довизначити в точці $z=z_0$, поклавши $f\left(z_0\right)=\lim\limits_{z\to z_0}f\left(z\right)=C_0$; одержана функція буде аналітичною в крузі $\left|z-z_0\right|<R$.

2) Нехай z_0 – полюс функції $f\left(z\right)$, аналітичної в кільці $0<\left|z-z_0\right|<R$. Тоді розклад в ряд Лорана в цьому кільці має вигляд:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(z-z_0\right)^{n}+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{\left(z-z_0\right)^{2}}+\ldots+\frac{C_{-m}}{\left(z-z_0\right)^{m}}, \qquad (56)$$

де $C_{-m}\neq 0$. Число m називається порядком полюса. Якщо $m=1$, то полюс називається простим.

Для того, щоб особлива точка z_0 була полюсом функції порядку m, необхідно і достатньо, щоб функцію $f\left(z\right)$ можна було представити у вигляді:

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{57}$$

де $\psi(z)$ – аналітична функція в точці z_0, $\psi(z_0)\neq 0$.

Якщо z_0 – полюс функції $f(z)$, то $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$.

3) Якщо z_0 істотно особлива точка функції $f(z)$ то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує.

Розглянемо поведінку аналітичної функції в околі нескінченно віддаленої точки $z=\infty$. Околом нескінченно віддаленої точки називають множину точок z, які лежать зовні круга з центром в початку координат і радіусом R. Нескінченно віддалена точка $z=\infty$ називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо існує деякий окіл цієї точки, в якому немає інших особливих точок цієї функції.

Зробимо заміну $z=\frac{1}{w}$, тоді точка $z=\infty$ перейде в точку $w=0$ і окіл точки $z=\infty$ $|z|>R$ перейде в окіл точки $w=0$ $0<|w|<\frac{1}{R}$. Функція $\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$, є аналітичною в області $0<|w|<\frac{1}{R}$.

Нехай розклад в ряд Лорана функції $\varphi(w)$ в околі точки $w=0$ такий:

$$\varphi(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n' w^n .$$

Повертаючись до попередньої змінної $z=\frac{1}{w}$, одержимо

$$f(z)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n , \tag{58}$$

де $C_n=C_n'$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,...)$.

Розклад (58) називається розкладом функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z=\infty$.

Очевидно, що розклад (58) має стільки членів з додатними степенями z, скільки членів з від'ємними степенями w містить розклад функції $\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ в ряд Лорана в околі точки $w=0$. Тому приходимо до таких означень:

1) якщо в розкладі (58) немає членів з додатними степенями z, то точка $z=\infty$ називається усувною особливою точкою функції $f(z)$;

2) якщо в розкладі (58) є скінченна кількість членів з додатними степенями z, то точка $z=\infty$ називається полюсом функції $f(z)$;

3) якщо в розкладі (58) є нескінченна кількість членів з додатними степенями z, то точка $z=\infty$ називається істотно особливою точкою функції $f(z)$.

Приклад 21. Розкласти в ряд Лорана функцію $f\left(z\right)=\dfrac{z}{\left(z+1\right)\left(z-2\right)^2}$ в околі точки $z_1=-1$.

Розв'язання. Функція $f\left(z\right)$ має дві особливі точки $z_1=-1$, $z_2=2$, відстань між якими дорівнює 3. Розклад функції $f\left(z\right)$ в ряд Лорана в околі точки z_1 – це її розклад в ряд Лорана по степенях $z+1$ в кільці $0<\left|z+1\right|<3$. Дану функцію представимо у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{z}{\left(z+1\right)\left(z-2\right)^2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{\left(z-2\right)^2}.$$

Знайшовши невідомі коефіцієнти A, B, C одержимо:

$$\frac{z}{\left(z+1\right)\left(z-2\right)^2}=\frac{-\frac{1}{9}}{z+1}+\frac{\frac{1}{9}}{z-2}+\frac{\frac{2}{3}}{\left(z-2\right)^2}.$$

Оскільки в даній області $\left|\dfrac{z+1}{3}\right|<1$ то одержимо такий розклад функції $\dfrac{1}{z-2}$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z+1-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z+1}{3}+\frac{\left(z+1\right)^2}{3^2}+\ldots+\frac{\left(z+1\right)^n}{3^n}+\ldots\right).$$

Одержаний ряд можна почленно диференціювати в крузі збіжності, тому одержимо:

$$\frac{1}{\left(z-2\right)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2\left(z+1\right)}{3^2}+\frac{3\left(z+1\right)^2}{3^3}+\ldots+\frac{n\left(z+1\right)^{n-1}}{3^n}+\ldots\right).$$

Таким чином, в кільці $0<\left|z+1\right|<3$ дана функція розкладається в ряд:

$$\frac{z}{\left(z+1\right)\left(z-2\right)^2}=-\frac{1}{9\left(z+1\right)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z+1\right)^n}{3^{n+3}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n+1\right)\left(z+1\right)^n}{3^{n+3}}=$$

$$=-\frac{1}{9\left(z+1\right)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)\left(z+1\right)^n}{3^{n+3}}.$$

1.8. Лишки, їх застосування
Основна теорема теорії лишків. Обчислення лишків

Означення. Лишком аналітичної функції $f\left(z\right)$ відносно ізольованої особливої точки z_0 називається комплексне число, яке дорівнює значенню інтеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\ell}f\left(z\right)dz$, взятому в додатному напрямі по будь-якому замкненому кусково-гладкому контуру ℓ, який лежить в області аналітичності функції $f(z)$ і містить в середині себе єдину особливу точку z_0 функції $f(z)$.

Лишок функції $f(z)$ відносно особливої точки z_0 позначається символом $\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$.

Таким чином,

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell} f(z)dz. \qquad (59)$$

Враховуючи формулу (61) при $n=-1$, одержуємо:

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)=C_{-1}, \qquad (60)$$

тобто лишок функції $f(z)$ відносно ізольованої особливої точки z_0 дорівнює коефіцієнту C_{-1} при члені $\dfrac{1}{z-z_0}$ в розкладі $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0.

Теорема (основна теорема теорії лишків): Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D, крім скінченного числа ізольованих особливих точок z_k $(k=1,2,...,n)$, і довільний кусково-гладкий контур Γ містить в середині себе точки z_k та повністю лежить в області D, то інтеграл від цієї функції по контуру Γ в додатному напрямі дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків $f(z)$ відносно всіх особливих точок z_k, тобто

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} f(z). \qquad (61)$$

Користуючись формулами (59) або (60) можна обчислити лишки функції $f(z)$ відносно її особливих точок. При цьому потрібно або обчислити інтеграл від функції комплексної змінної, або розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана. Але якщо z_0 – полюс, то існують простіші способи обчислення лишку.

а) Якщо z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]. \qquad (62)$$

б) Нехай $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ – аналітичні в околі точки z_0 функції, причому $\varphi(z_0)\neq 0$, а $\psi(z)$ в точці z_0 має постий нуль. В цьому випадку точка z_0 є простим полюсом функції $f(z)$. Для обчислення лишку одержується формула:

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (63)$$

в) Нехай точка z_0 – полюс порядку $m\geq 2$ функції $f(z)$. Тоді

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \qquad (64)$$

Приклад 22. Обчислити лишок функції $f(z)=\dfrac{z^2}{z-2}$ відносно простого полюса $z_0=2$.

Розв'язання. Використаємо формулу (62):

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{z^2}{z-2}=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right]=4.$$

Приклад 23. Обчислити $\operatorname*{Res}_{z=0} ctg\, z$.

Розв'язання. $ctg\, z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$, точка $z_0=0$ є простим нулем для функції $\sin z$. Використаємо формулу (63):

$$\operatorname*{Res}_{z=0} ctg\, z=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1.$$

Приклад 24. Обчислити $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{1}{z^2(z-1)}$.

Розв'язання. Точка $z_0=0$ є полюсом другого порядку для функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$. Використаємо формулу (64):

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{z^2(z-1)}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-1}\right]=-\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2}=-1.$$

Приклад 25. Обчислити $\operatorname*{Res}_{z=0} z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

Розв'язання. Точка $z_0=0$ є істотно особливою точкою функції $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$. Тому використаємо формулу (60). Розкладемо функцію $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0=0$.

$$f(z)=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+\ldots\right)=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\ldots$$

Звідси знаходимо, що $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=C_{-1}=-\dfrac{1}{6}$.

Означення. Лишком функції $f(z)$ відносно нескінченно віддаленої точки називають комплексне число, яке дорівнює значенню інтеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell} f(z)dz$, де ℓ – замкнений кусково-гладкий контур, що повністю лежить в тому околі точки $z=\infty$, де функція $f(z)$ аналітична. Інтегрування ведеться так, щоб при обході контура точка $z=\infty$ залишалася зліва.

В цьому випадку

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}, \tag{65}$$

де C_{-1} – коефіцієнт при z^{-1} в розкладі в ряд Лорана функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в розширеній комплексній площині z всюди, крім скінченного числа особливих точок, то сума лишків функції $f(z)$ відносно всіх її особливих точок, включаючи і нескінченно віддалену точку, дорівнює нулю.

Застосування лишків до обчислення деяких інтегралів

1) Безпосереднє застосування основної теореми теорії лишків.

Приклад 26. Обчислити $\int\limits_{\ell^+} \frac{zdz}{(z-1)(z^2+1)}$, де ℓ – коло $|z+i|=1$.

Розв'язання. В крузі $|z+i|<1$ підінтегральна функція має тільки одну особливу точку $z_0=-i$, яка є простим полюсом. За формулою (62) знаходимо:

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)z}{(z-1)(z^2+1)} = \lim_{z\to -i} \frac{z}{(z-1)(z-i)} = -\frac{1-i}{4}.$$

Отже, $\int\limits_{\ell^+} \frac{zdz}{(z-1)(z^2+1)} = -2\pi i \cdot \frac{1-i}{4} = -\frac{\pi}{2}(1+i)$.

2) Інтеграли виду $I=\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$.

Зробивши заміну $z=e^{ix}$, знаходимо

$$\sin x = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \ \cos x = \frac{z+z^{-1}}{2}.$$

Із рівності $e^{ix}=z$ одержуємо: $ix=\ln z$, $dx=-i\frac{dz}{z}$. Якщо $0\le x\le 2\pi$, то точка z пробігає коло $|z|=1$ в додатному напрямі. Тоді $I=-i\int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{z}$.

Підінтегральна функція в останньому інтегралі є дробово-раціональною функцією типу

$$R_1(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n},$$

яка аналітична всюди в крузі $|z|<1$, за винятком скінченного числа особливих точок z_k, $k=1,2,\ldots,p$, що є нулями знаменника

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ і лежать в крузі $|z|<1$. Очевидно, що ці точки є полюсами підінтегральної функції $R_1(z)$. Припустимо, що $R_1(z)$ не має полюсів на колі $|z|=1$. Тоді, використовуючи основну теорему про лишки, отримаємо:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R_1(z).$$

Приклад 27. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

Розв'язання. Покладаючи $e^{ix} = z$, одержимо:

$$I = -4i \int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(z^2 + 4z + 1\right)^2}.$$

Підінтегральна функція має два полюси другого порядку: $z_1 = -2+\sqrt{3}$, $z_2 = -2-\sqrt{3}$; з них в крузі $|z|<1$ лежить полюс $z_1 = -2+\sqrt{3}$. Тому

$$I = -4i \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)} = 8\pi \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left[\left(z-z_1\right)^2 \cdot \frac{z}{\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2}\right] =$$

$$= 8\pi \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2}\right] = -8\pi \lim_{z\to z_1} \frac{z+z_2}{\left(z-z_2\right)^3} =$$

$$= -8\pi \frac{z_1+z_2}{\left(z_1-z_2\right)^3} = -8\pi \frac{-4}{\left(2\sqrt{3}\right)^3} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

3) Невласні інтеграли виду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ задовольняє три умови:

1) $f(z)$ аналітична на дійсній осі;

2) $f(z)$ аналітична у верхній півплощині за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок z_k ($k=1,2,...,n$);

3) функція $f(z)$ при $z\to\infty$ (у верхній півплощині) прямує до нуля швидше, ніж $\frac{1}{z}$, тобто $f(z) = \frac{\alpha(z)}{z}$, де $\alpha(z)\to 0$ при $z\to\infty$ (у верхній півплощині), то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ збігається і обчислюється за формулою

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (66)$$

Приклад 28. Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$; для неї виконуються всі умови теореми. Ця функція аналітична всюди у верхній півплощині, за винятком точки $z_0=i$, яка є полюсом третього порядку. Тому, на основі формули (66) одержимо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=2\pi i \operatorname*{Re}_{z=i} z \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{\left(z^2+1\right)^3}\right]=$$

$$=\pi i \lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]=\pi i\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=\frac{3}{8}\pi.$$

1.9. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити: а) $\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^5$; б) $\sqrt{\frac{i}{1-i}}$.
2. Де розміщені точки $z\,(z=x+iy)$, для яких: а) $|z+2i|=|z+1|$; б) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$.
3. Знайти на площині $W\,(W=U+iV)$ рівняння лінії, на яку за допомогою функції $W=\frac{1}{z}$ $(z=x+iy)$ відображається лінія $x^2+y^2=4$.
4. Обчислити: а) $e^{2i-\frac{i}{1+i}}$; б) $\cos(1-3i)$; в) $sh\frac{2-5i}{1+i}$; г) $Ln(-2+4i)$; д) $(5+12i)^i$; е) $Arcctg\,3i$.
5. Знаючи дійсну частину $U(x,y)$ або уявну частину $V(x,y)$ аналітичної функції $W=U+iV$, знайти функцію W:

   а) $U(x,y)=y^2-x^2+e^x\cdot\cos y$; б) $V(x,y)=arcctg\frac{x}{y}+7y-5$.
6. Обчислити інтеграл: $\int\limits_{\Gamma}\left(2\operatorname{Im}\bar{z}+z^2\right)dz$, де Γ - відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=1+2i,\ z_2=3+6i$.
7. Обчислити інтеграл: $\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z\,dz}{z+i}$, де Γ - коло $|z+i|=4$.
8. Дослідити збіжність ряду, заданого своїм загальним членом: $z_n=\frac{(1+i)\cdot\left(n^3+1\right)}{3^n}$.

9. Визначити радіус збіжності ряду: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3\cdot 7^n}{n!}\cdot z^n$.

10. Розкласти в ряд Тейлора або Лорана в околі точки z_0, вказаної в дужках, функцію:

$$f(z)=\frac{6}{z(z+1)(z-2)}\ \left(z_0=-1\right).$$

11. Розкласти в ряд Лорана по степенях $z-z_0$ в кільці (точка і кільце вказані в дужках) функцію:

$$f(z)=\frac{2z-1}{(z-2)(z-3)}\ \left(z_0=0;\ 2<|z|<3\right).$$

12. Обчислити лишки функції $f(z)$ відносно особливих точок z_0 (якщо точки z_0 не вказані, то потрібно обчислити лишки відносно всіх особливих точок заданої функції):

$$f(z)=\frac{z^3+1}{\left(z^2+1\right)^2}.$$

13. Обчислити за допомогою лишків інтеграл (обхід контура відбувається в додатному напрямі):

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos z}{z^5}dz;\ \gamma \text{ - коло } |z-i|=3.$$

14. Обчислити за допомогою лишків інтеграл: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(5-2\sin x)^2}$.

2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

2.1. Основні поняття та властивості інтегрального перетворення Лапласа

Операційне числення значно спрощує розв'язування диференціальних рівнянь, які одержуються при вивченні перехідних процесів у лінійних фізичних системах електротехніки, радіотехніки, імпульсної техніки, теорії автоматичного регулювання та інших галузей науки і техніки.

Операційне числення базується на інтегральному перетворенні Лапласа функції дійсної змінної $f(t)$:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\,. \tag{1}$$

Невласний інтеграл (1), що залежить від комплексного параметру p, називається інтегралом Лапласа.

Функція $f(t)$, яка називається функцією-оригіналом повинна задовольняти таким умовам:

1. Функція $f(t)$ є кусково-неперервною і кусково-гладкою, тобто $f(t)$ і $f'(t)$ на кожному скінченому відрізку мають скінчене число точок розриву першого роду;

2. $f(t)=0$ при $t<0$;

3. З ростом t модуль функції $f(t)$ росте не швидше деякої функції, тобто існують такі постійні C і α, що для всіх $t\geq 0$ виконується нерівність

$$\left|f(t)\right|\leq Ce^{\alpha t}\,. \tag{2}$$

Число α називається показником росту функції $f(t)$.

Перетворення (1), яке ставить у відповідність оригіналу $f(t)$ його зображення $F(p)$, називається перетворенням Лапласа.

Відповідність між оригіналом $f(t)$ та зображенням $F(p)$ записують у вигляді:

$f(t)\risingdotseq F(p)$ або $F(p)\Rightarrow f(t)$

а також:

$$f(t)\Leftarrow F(p),\; f(t)\Leftrightarrow F(p),\; F(p)=L\{f(t)\}. \tag{3}$$

В основі операційного методу лежить така ідея: спочатку застосовують перетворення Лапласа до диференціального рівняння і в результаті одержують алгебраїчне рівняння відносно функції $F(p)$ – зображення Лапласа. За знайденим $F(p)$ за допомогою оберненого перетворення знаходимо шуканий розв'язок $f(t)$.

Властивості перетворення Лапласа

1. Властивість лінійності

Для будь-яких комплексних постійних α і β має місце рівність:

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\risingdotseq\alpha F(p)+\beta G(p) \tag{4}$$

2. Теорема подібності

Для будь-якого постійного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \tag{5}$$

3. Диференціювання оригінала

Якщо $f'(t)$ є оригінал, то:

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0) \tag{6}$$

Якщо $f(t)$ n раз неперервно диференційовна на $(0,\infty)$ і якщо $f^{(n)}(t)$ є оригінал, то:

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \tag{7}$$

4. Диференціювання зображення:

$$F^{(1)}(p) \doteqdot -t\, f(t) \tag{8}$$

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t) \tag{9}$$

5. Інтегрування оригінала:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p} \tag{10}$$

6. Інтегрування зображення:

$$\int_p^\infty F(p)\, dp \doteqdot \frac{f(t)}{t} \tag{11}$$

(за умови, що інтеграл $\int_p^\infty F(p)\, dp$ збігається).

7. Теорема запізнення

Для будь-якого додатнього числа τ має місце така рівність:

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p) \tag{12}$$

8. Теорема зміщення

Для будь-якого комплексного числа λ справедлива така рівність:

$$e^{\lambda t} f(t) \doteqdot F(p-\lambda) \tag{13}$$

9. Теорема множення

Добуток двох зображень $F(p)$ і $G(p)$ також являється зображенням, причому:

$$F(p)\, G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{14}$$

Інтеграл в правій частині (14) називається згорткою функцій $f(t)$ і $g(t)$ і позначається символом:

$$(f * g) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{15}$$

Теорема (9) стверджує, що множення зображень рівносильно згортанню оригіналів:

$$F(p)\,G(p) \doteqdot (f * g) \qquad (16)$$

10. Теорема про раціональність зображення

Для того, щоб зображення $F(p)$ було раціональною функцією, необхідно і достатньо, щоб оригінал $f(t)$ є лінійною комбінацією функцій виду $t^m e^{\lambda t}$ (m – ціле невід'ємне, λ – комплексне).

Розглянемо зображення одиничної функції Гевісайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. І.

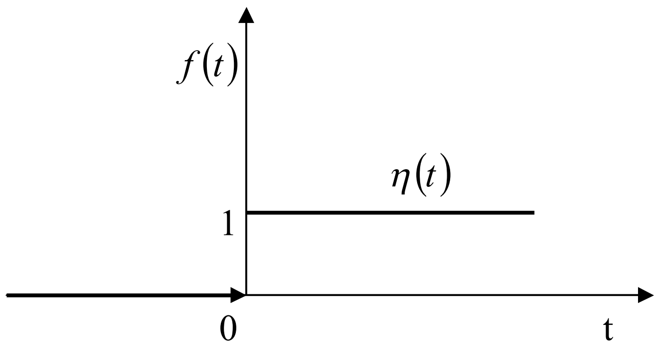


Рис. І. Одинична функція Гевісайда.

Знайдемо зображення функції Гевісайда:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p};\ \eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}. \qquad (17)$$

Користуючись рівністю (17), можемо записати:

$$C\eta(t) \doteqdot C \qquad (18)$$

де C–довільна стала.

Використовуючи формулу (1), властивості операційного числення і безпосереднє обчислення зображень різних функцій, які часто зустрічаються, можна скласти таблицю зображень та оригіналів. З допомогою такої таблиці легко здійснюється перехід від функцій-оригіналів до їх зображень та зворотний перехід – від зображень до оригіналів.

2.2. Таблиця оригіналів та зображень.

№ п/п формули	Зображення	Орігінал
I	**II**	**III**
1.	$\frac{1}{P}$	***1***
2.	$\frac{1}{P-a}$	e^{at}
3.	$\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
4.	$\frac{P}{P^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
5.	$\frac{\omega}{P^2-\omega^2}$	$sh\omega t$
6.	$\frac{P}{P^2-\omega^2}$	$ch\omega t$
7.	$\frac{\omega}{(P-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\, sin\omega t$
8.	$\frac{P-a}{(P-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\, cos\omega t$
9.	$\frac{1}{P^2}$	t
10.	$\frac{n!}{P^{n+1}}$	t^n
11.	$\frac{n!}{(P-a)^{n+1}}$	$t^n\, e^{at}$
12.	$\frac{2P\omega}{(P^2+\omega^2)^2}$	$t\, sin\omega t$
13.	$\frac{1}{\left(P^2+\omega^2\right)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}\left(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right)$
14.	$\frac{P^2-\omega^2}{(P^2+\omega^2)^2}$	$t\, cos\ \omega t$
15.	$\frac{2P\omega}{(P^2-\omega^2)^2}$	$t\, sh\ \omega t$
16.	$\frac{P^2+\omega^2}{(P^2-\omega^2)^2}$	$t\, ch\ \omega t$
17.	$\frac{1}{(P-a)(P-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$

18.	$\dfrac{1}{P(P^2+a^2)}$	$\dfrac{1-\cos\ at}{a^2}$
19.	$\dfrac{P}{(P^2+a^2)(P^2+b^2)}$	$\dfrac{\cos at-\cos\ bt}{b^2-a^2}$
20.	$\dfrac{P}{(P-a)^2}$	$(1+at)\ e^{at}$
21.	$\dfrac{P}{(P-a)(P-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
22.	$\dfrac{b+cP}{P^2+a^2}$	$c\ \cos\ at+\dfrac{b}{a}\ \sin\ at$
23.	$\dfrac{b+cP}{P^2-a^2}$	$c\ ch\ \ at+\dfrac{b}{a}\ sh\ at$
24.	$\dfrac{1}{P^2(P-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(e^{at}-1-at\right)$
25.	$\dfrac{P}{(P-a)^3}$	$\left(t+\dfrac{1}{2}t^2\right)\bullet e^{at}$
26.	$\dfrac{P}{(P^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t}{8a^3}\left(\sin\ at-at\cos\ at\right)$

2.3. Застосування перетворення Лапласа до розв’язування диференціальних рівнянь

Приклад 1.
Розв’язати диференціальне рівняння:
$x''-4x'+4x=t^3e^{2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

Розв’язання. Переходимо до зображень:
$x(t)\Rightarrow X(p)$,
$x'(t)\to pX(p)-x(0)=pX(p)$,
$x''(t)\to p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$.

За формулою з таблиці знаходимо:
$$t^3e^{2t}\doteqdot\frac{3!}{(p-2)^4}.$$

Підставляючи в рівняння, одержуємо:
$$\left(p^2-4p+4\right)X(p)=\frac{3!}{(p-2)^4}.$$

Звідси:
$$X(p)=\frac{3!\cdot4\cdot5}{4\cdot5\cdot(p-2)^6}=\frac{5!}{20\cdot(p-2)^6}.$$

Знаходимо оригінал для $X(p)$:

$$x(t)=\frac{t^5e^{2t}}{20}.$$

Приклад 2.

Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x''-5x'+4x=4,\ x(0)=0,\ x'(0)=2.$$

Розв'язання.

$$x(t)\Rightarrow X(p),$$

$$x'(t)\to pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t)\to p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2.$$

Так як $4\risingdotseq\frac{4}{p}$ і за умовою $x(0)=0$, $x'(0)=2$, то операторне рівняння буде мати вигляд:

$$\left(p^2-5p+4\right)X(p)=\frac{4}{p}+2.$$

Звідси знаходимо

$$X(p)=\frac{2p+4}{p\left(p^2-5p+4\right)}.$$

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p-1}+\frac{1}{p-4}.$$

Переходячи до оригіналів, одержуємо шуканий розв'язок:

$$x(t)=1-2e^t+e^{4t}.$$

Приклад 3.

Розв'язати диференціальне рівняння:

$$x''+4x'+4x=8e^{-2t},\ x(0)=x'(0)=1.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою із таблиці, одержимо:

$8e^{-2t}\risingdotseq\frac{8}{p+2}$ і за умовою $x(0)=x'(0)=1$, тоді операторне рівняння матиме вигляд:

$$\left(p^2+4p+4\right)X(p)=\frac{8}{p+2}+p+4+1.$$

Значить операторний розв'язок буде таким:

$$X(p)=\frac{p^2+7p+18}{(p+2)^3}.$$

Розкладаючи праву частину на елементарні дроби, будемо мати:

$$X(p)=\frac{8}{(p+2)^3}+\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}.$$

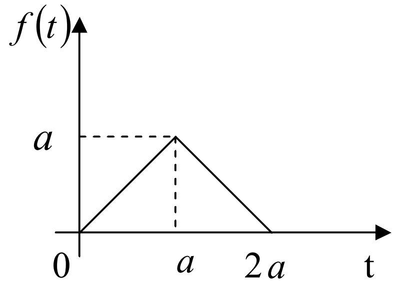
Переходячи до оригіналів, отримаємо розв'язок:

$$x(t)=4t^2e^{-2t}+3te^{-2t}=e^{-2t}\left(4t^2+3t+1\right).$$

Розглянемо випадки, коли права частина неоднорідного диференціального рівняння задана графічно.

Приклад 4.

Проінтегрувати рівняння: $x'' + 9x = f(t)$, де $f(t)$ задана графіком; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.



Розв'язання. Запишемо $f(t)$ аналітично

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < a, \\ 2a - t, & a < t < 2a, \\ 0, & t < 0,\ t > 2a. \end{cases}$$

Користуючись узагальненою одиничною функцією Гевісайда, запишемо оригінал $f(t)$ в наступному вигляді:

$$f(t) = t\eta(t-0) - t\eta(t-a) + (2a-t)\eta(t-a) - (2a-t)\eta(t-2a),$$

або $f(t) = t\eta(t) - \eta(t-a)\eta(t-a) + (t-2a)\eta(t-2a)$.

Переходимо до зображень

$$x(t) \Rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \Rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p)$$

$$x''(t) \Rightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p).$$

Відповідне операторне рівняння має вигляд:

$$\left(p^2 + 9\right) X(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-ap}}{p^2} + \frac{e^{-2ap}}{p^2}.$$

Звідки $X(p) = \dfrac{1}{p^2\left(p^2+9\right)} - 2\dfrac{e^{-ap}}{p^2\left(p^2+9\right)} + \dfrac{e^{-2ap}}{p^2\left(p^2+9\right)}$,

або $X(p) = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+9}\right) - \dfrac{2}{9}e^{-ap}\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+9}\right) + \dfrac{1}{9}e^{-ap}\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+9}\right)$.

Користуючись таблицею оригіналів і зображень, а також теоремою запізнення, знаходимо:

$$x(t) = \frac{1}{9}\left(t - \frac{1}{3}\sin 3t\right) - \frac{2}{9}\left((t-0) - \frac{1}{3}\sin 3(t-a)\right)\eta(t-0) +$$

$$+\frac{1}{9}\left((t-2a) - \frac{1}{3}\sin 3(t-2a)\right)\eta(t-2a).$$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай потрібно знайти розв'язок системи двох рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases} \tag{20}$$

що задовольняє початковим умовам:

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \tag{21}$$

Введемо в розгляд зображення шуканих функцій, їх похідних і функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$:

$$x(t) \risingdotseq X(p),\ y(t) \risingdotseq Y(p);$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0;\ y'(t) \risingdotseq pY(p) - y_0;$$

$$f_1(t) \risingdotseq F_1(p),\ f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$$

і складемо операторну систему:

$$\begin{cases} pX(p) = a_1 X(p) + b_1 Y(p) + F_1(p) + x_0, \\ pY(p) = a_2 X(p) + b_2 Y(p) + F_2(p) + y_0. \end{cases} \tag{22}$$

Ця система являється лінійною алгебраїчною системою двох рівнянь відносно невідомих $X(p)$ і $Y(p)$. Розв'язавши її, знаходимо $X(p)$ і $Y(p)$. Переходячи до оригіналів, отримаємо розв'язок $x(t)$, $y(t)$ системи (6.20), що задовольняє початковим умовам (6.21).

Аналогічно розв'язуються лінійні системи виду:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{k_\ell} x_\ell,\ a_{k_\ell} = const,\ x_k(0) = x_k^0,\ (\ k = \overleftarrow{1,n}\ ). \tag{23}$$

Приклад 5.

Знайти розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$$

який задовільняє початковим умовам: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Оскільки зображення $5 \risingdotseq \dfrac{5}{p}$, $-37t \risingdotseq -\dfrac{37}{p^2}$ та $x_0 = y_0 = 0$, то операторна система має наступний вигляд:

$$\begin{cases} pX(p) = -7X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p}, \\ pY(p) = -2X(p) - 5Y(p) - \dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

Розв’язуємо її відносно $X(p)$ $Y(p)$:

$$X(p)=\frac{5p^2+25p-37}{p^2\left(p^2+12p+37\right)},\ Y(p)=\frac{-47p-259}{p^2\left(p^2+12p+37\right)}.$$

Розкладаємо праві частини рівнянь, на елементарні дроби:

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{p^2+12p+37},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+5}{p^2+12p+37},$$

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y(p)=\frac{7}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}+\frac{1}{(p+6)^2+1}.$$

Переходячи до оригіналів, отримуємо розв’язок:

$$\begin{cases} x(t)=1-t-e^{-6t}\cos t, \\ y(t)=1-7t+e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\sin t. \end{cases}$$

Приклад 6.

Знайти розв’язок трьох диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах:

$$\begin{cases} x''+y'=2\sin t \\ y''+z=2\cos t \\ z''-x=0 \end{cases}$$

$$x(0)=z(0)=y'(0)=0,\ x'(0)=y(0)=-1,\ z(0)=1.$$

Розв’язання. Знайдемо зображення складових системи:

$$x(t)\doteqdot X(p),$$

$$x'(t)\doteqdot p\left(X(p)-x(0)\right)=pX(p),$$

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1;$$

$$y(t)\doteqdot Y(p),$$

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)+1,$$

$$y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-p\left(y(0)-y'(0)\right)=p^2Y(p)+p;$$

$$z(t)\doteqdot Z(p),$$

$$z'(t)\doteqdot pZ(p)-z(0)=pZ(p),$$

$$z''(t)\doteqdot p^2Z(p)-pz(0)-z'(0)=p^2Z(p)-1;$$

$$\sin t=\frac{1}{p^2+1};\quad \cos t=\frac{p}{p^2+1}.$$

Підставляємо в систему:

$$\begin{cases} p^2X(p)+1+pY(p)+1=\dfrac{2}{p^2+1}, \\ p^2Y(p)+p+pZ(p)=\dfrac{2}{p^2+1}, \\ p^2Z(p)-1-X(p)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2X(p)+pY(p)=-\dfrac{2p^2}{p^2+1}, \\ p^2Y(p)+pZ(p)=\dfrac{p-p^3}{p^2+1}, \\ X(p)-p^2Z(p)=1. \end{cases}$$

Розв'язуємо, використовуючи правило Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p^2 & p & 0 \\ 0 & p^2 & p \\ 1 & 0 & -p^2 \end{vmatrix}=p^2\left(1-p^2\right)\left(1+p^2\right),\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -\dfrac{2p^2}{p^2+1} & p & 0 \\ \dfrac{p-p^3}{p^2+1} & p^2 & 0 \\ -1 & 0 & -p^2 \end{vmatrix}=p^2\left(p^2-1\right),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p^2 & -\dfrac{2p^2}{p^2+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{p-p^3}{p^2+1} & p \\ 1 & -1 & -p^2 \end{vmatrix}=p^3\left(p^2-1\right),\ \Delta_3=\begin{vmatrix} p^2 & p & -\dfrac{2p^2}{p^2+1} \\ 0 & p^2 & \dfrac{p-p^3}{p^2+1} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=p^2\left(1-p^2\right).$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p^2\left(p^2-1\right)}{p^2\left(1-p^2\right)\left(1+p^2\right)}=-\frac{1}{p^2+1};$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p^3\left(p^2-1\right)}{p^2\left(1-p^2\right)\left(1+p^2\right)}=-\frac{p}{p^2+1};$$

$$Z(p)=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{p^2\left(1-p^2\right)}{p^2\left(1-p^2\right)\left(1+p^2\right)}=\frac{1}{p^2+1}.$$

Повертаючись до оригіналів, отримуємо:

$x(t) = -\sin t$;

$y(t) = -\cos t$;

$z(t) = \sin t$.

2.4. Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи властивість лінійності інтегрального перетворення Лапласа, або теорему подібності, знайти зображення функції $f(t)=\eta(t)\ \varphi(t)$

$\varphi(t)=\cos^3 \alpha t+ ch\ \beta t$

2. Побудувати графіки та знайти зображення кусково-неперервної функції.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \;\; i \;\; t>2\tau, \\ (3-n)a, & (n-1)\tau < t < n\tau \quad n=1,2 \end{cases}$$

3. Знайти зображення функції f(t)=η(t)φ(t) де η(t) - одинична функція Гевісайда, а φ(t) періодична функція.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \cos at > 0 \\ -1, & \cos\ at < 0 \end{cases}.$$

4. Використовуючи теорему зміщення, знайти зображення функції $f(t)=\eta(t)\ \varphi(t)$

$\varphi(t)= e^{\alpha t} \cos^2 \varpi t$

5. Знайти зображення диференціального виразу при заданих початкових умовах.

$x^{IV}(t) - 10x^{III}(t)+10x^{II}(t)-5x^{I}(t) +x(t)-3,$

$x(0)=0, \quad x^{I}(0)=1, \quad x^{II}(0)=0, \quad x^{III}(0)=1$

6. Застосувавши теорему диференціювання зображення, знайти зображення функції

$\varphi(t)=t\ (ch\ t+sh^2\ t)$

7. За допомогою теореми інтегрування, знайти зображення функції f(t)=η(t)φ(t).

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t}\quad sh^2\ t}{t}$$

8. Знайти орігінал функції F(P)

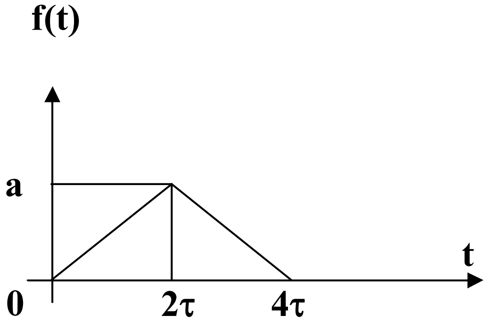
$$F(P)= \frac{4}{P^2-7P+6}$$

9. В результаті застосування методу операційного числення знайти частинний розв`язок диференціального рівняння, який задовольняє вказані умови:

$x``` + 3x`` + 3x` + x = te^{-t}$ ; $\quad x(0)=0, \quad x`(0)=0, \quad x``(0)=0;$

10. Розв`язати диференціальне рівняння методом операційного числення, якщо права частина рівняння задана графічно.

x`-21x=f(t), x(0)= 0



11. Методом операційного числення знайти частинний розв`язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє вказані початкові умови.

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t, \qquad x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

12. Методом операційного числення знайти частинний розв`язок системи диференціального рівняння, який задовольняє вказані початкові умови.

$$\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z, \qquad x(0) = 2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{cases}$$

3. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

3.1. Основні формули комбінаторики

Нехай задано множину, що містить *n* різних елементів.

Розміщеннями з *n* елементів по *k* елементів $(k \le n)$ називаються групи елементів, кожна з яких містить *k* елементів з даних *n* елементів і які відрізняються одна від одної або елементами, або їх порядком.

Число розміщень з *n* елементів по *k* елементів дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1). \qquad (1.1)$$

Приклад 1.1. Скількома способами можна призначити трьох осіб на три різні посади із десяти кандидатів на ці посади?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює числу розміщень з 10 елементів по 3 елементи $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Перестановками з *n* елементів називаються групи елементів, кожна з яких містить даних *n* елементів і які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів.

Перестановки з *n* елементів - це розміщення з *n* елементів по *n*.

Число перестановок з *n* елементів дорівнює

$$P_n = n!, \text{ де } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... n. \qquad (1.2)$$

Приклад 1.2. Скільки чотиризначних чисел можна записати цифрами: а)1, 2, 3, 4, б) 0, 1, 2, 3, якщо кожну цифру використовувати тільки один раз?

Розв'язання. а). Кількість чотиризначних чисел, які можна записати цифрами 1, 2, 3, 4 і в яких усі цифри різні, дорівнює кількості перестановок з чотирьох елементів: $P_n = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

б). Оскільки цифра 0 не може стояти на початку числа, то від загальної кількості чисел, які можна записати даними чотирма різними цифрами, потрібно відняти кількість «чисел», на початку яких стоїть цифра 0. Таких «чисел» буде $3!$, оскільки інші три цифри можна переставляти всіма можливими способами.

Отже, шукана кількість чотиризначних чисел в цьому випадку дорівнює

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18$$

Комбінаціями з *n* елементів по *k* елементів $(k \le n)$ називаються групи елементів, кожна з яких містить *k* елементів з даних *n* і які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

Число комбінацій з *n* елементів по *k* елементів дорівнює

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \qquad (1.3)$$

Цю формулу можна записати у вигляді:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.3. Скількома способами можна вибрати 4 деталі з ящика, в якому міститься 12 деталей?

Розв'язання. Шукана кількість способів дорівнює числу комбінацій з 12 елементів по 4 елементи. Скористаємося формулою (1.3)

$$C_{12}^{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495.$$

Розглянемо перестановки з повтореннями. Число різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу,..., k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}. \qquad (1.5)$$

Приклад 1.4. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери у слові «математика»?

Розв'язання. У слові «математика» є 10 літер. Шукана кількість різних слів дорівнює числу перестановок, які можна утворити з 10 літер, серед яких є 3 літери **а**, 2 літери **м** та 2 літери **т**. Використаємо формулу (1.5)

$$P_{10}(3,2,2)=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200.$$

Комбінаціями з n елементів по m з повтореннями називаються групи по m елементів взятих з даних n елементів, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом, причому кожен елемент може повторюватися будь-яке число разів.

Число комбінацій з повтореннями n елементів по m елементів дорівнює

$$K_n^m=C_{n+m-1}^m, \qquad (1.6)$$

де C_{n+m-1}^m обчислюється за формулами (1.3) або (1.4).

Приклад 1.5. Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних тістечок в кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?

Розв'язання. Шукана кількість способів дорівнює числу комбінацій з 11 елементів по 6 елементів з повторенням, тобто

$$K_{11}^{6}=C_{16}^{6}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=8008.$$

3.2. Класичне та статистичне означення ймовірності

Випадковою подією називається будь яке явище, яке при здійсненні певного комплексу умов може відбутися або не відбутися. Здійснення певного комплексу умов, який може бути відтворений необмежене число разів, називається випробуванням.

Приклади. Кидання монети - випробування; поява герба - випадкова подія. Виготовлення деталі даного типу - випробування; відповідність деталі стандарту - випадкова подія. Спостереження за лічильником космічних частинок протягом певного проміжку часу - випробування; поява космічних частинок у лічильнику - випадкова подія.

Достовірною називається подія, яка в результаті випробування обов'язково відбудеться. Неможливою називається подія, яка в даному випробуванні ніколи не відбувається.

Декілька подій називаються несумісними в даному випробуванні, якщо вони не можуть настати одночасно, тобто поява однієї з цих подій виключає появу всіх інших подій. Декілька подій утворюють повну групу в даному випробуванні, якщо в результаті випробування обов'язково повинна настати хоча б одна з цих подій. Події в даному випробуванні називаються рівноможливими, якщо є підстави вважати , що ні одна з цих подій не є об'єктивно більш можлива, ніж інша.

Якщо події A_1, A_2, ... , A_n мають всі три властивості, тобто є рівноможливими, несумісними і утворюють повну групу, то вони називаються випадками (або «шансами»), а про випробування кажуть, що воно зводиться до схеми випадків. Наприклад, поява на верхній грані 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при одному киданні грального кубика (однорідного правильної геометричної форми) є випадками.

Ймовірність випадкової події - це чисельна міра об'єктивної можливості настання цієї події. Ймовірність достовірної події вважають рівною одиниці, а ймовірність неможливої події - рівною нулю.

Ймовірність будь-якої випадкової події A (позначається $P(A)$) задовольняє умову

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (2.1)$$

Якщо випробування зводиться до схеми випадків, то ймовірність подій A можна обчислити, ґрунтуючись на класичному означенні: ймовірність події A дорівнює відношенню числа m результатів випробування, що сприяють події A, до загального числа всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, які утворюють повну групу

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.2)$$

Приклад 2.1. На кожній із семи карток надрукована одна з літер: а, о, е, б, н, г, р. Навмання виймають по одній чотири картки і кладуть їх послідовно поряд. Знайти ймовірність того, що одержиться слово «небо».

Розв'язання. Загальне число рівноможливих, несумісних результатів випробування, які утворюють повну групу, дорівнює числу розміщень із семи елементів по чотири, тобто $n = A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Появі слова «небо» сприяє тільки один результат, тобто m=1. Отже шукана ймовірність $P(B) = \dfrac{1}{840}$.

Приклад 2.2. Книги деякого десятитомного видання творів розміщені на полиці навмання. Знайти ймовірність того, що перший, другий та третій томи будуть розміщені поряд в порядку зростання номерів.

Розв'язання. Число всіх способів, якими можна розмістити 10 книг на полиці, дорівнює числу перестановок з десяти елементів, тобто $n = P_{10} = 10!$ Ці способи рівноможливі, несумісні та утворюють повну групу. З них число випадків, коли дані томи розміщені на першому, другому та третьому місцях в порядку зростання номерів, дорівнює 7!, оскільки інші 7 томів можуть переставлятися всіма можливими способами. Різних положень перших трьох томів, коли вони розміщені поряд і в порядку зростання номерів, буде 8. Отже, число різних способів розміщення книг, при яких три дані томи будуть стояти поряд і в порядку зростання номерів, дорівнює $7!\cdot 8 = 8!$, тобто $m = 8!$.

Шукана ймовірність $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{8!}{10!} = \dfrac{1}{90}$.

Приклад 2.3. В партії з 25 деталей знаходиться 4 деталі бракованих. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання для перевірки п'яти деталей виявиться дві браковані деталі.

Розв'язання. Загальне число можливих результатів випробовування дорівнює числу способів, якими можна вибирати 5 деталей з 25, тобто числу комбінацій з 25 елементів по 5 : $n = C_{25}^{5}$. Ці результати випробування рівноможливі, несумісні і утворюють повну групу. Підрахуємо число результатів, які сприяють події A (серед п'яти взятих навмання деталей виявляться дві браковані). Дві браковані деталі можна вибрати з чотирьох бракованих C_4^2 способами; інші три небраковані деталі можна взяти з 21 небракованої деталі C_{21}^{3} способами. Отже, число результатів, які сприяють події A, $m = C_4^2 \cdot C_{21}^3$. Шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{21}^3}{C_{25}^5} = \frac{\dfrac{4\cdot 3}{2!}\cdot\dfrac{21\cdot 20\cdot 19}{3!}}{\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{5!}} \approx 0{,}15 .$$

Відносною частотою події A в даній серії випробувань називається відношення числа випробувань m, в яких подія A появилася, до загального числа n проведених випробувань

$$W(A) = \frac{m}{n}. \tag{2.3}$$

При невеликій кількості випробувань відносна частота події має випадковий характер і може помітно змінюватись від однієї серії випробувань до іншої. Але при збільшенні числа випробувань відносна частота події втрачає свій випадковий характер, наближаючись з незначними коливаннями до деякого сталого числа, яке є ймовірністю події. Математичне формулювання цієї властивості стійкості відносної частоти вперше дав Я.Бернуллі.

Він довів, що при необмеженому збільшенні числа випробувань з практичною достовірністю можна стверджувати, що відносна частота події буде як завгодно мало відрізнятися від її ймовірності в окремому випробуванні. Тому використовують статистичне означення ймовірності події: за ймовірність події приймають відносну частоту цієї події при великому числі випробовувань.

Приклад 2.4. В партії з 250 деталей відділ технічного контролю виявив п'ять нестандартних деталей. Знайти відносну частоту появи нестандартних деталей.

Розв'язання. Відділ технічного контролю перевірив n=250 деталей і виявив при цьому m = 5 нестандартних деталей. Отже, відносна частота появи нестандартних деталей

$$W(A) = \frac{5}{250} = 0{,}02 .$$

3.3. Геометричне означення ймовірності

Класичне означення ймовірності неможливо застосувати до випробування з нескінченною кількістю результатів. Для опису такої ситуації вводять геометричні ймовірності - ймовірності попадання точки в область (відрізок, частину площини і т.д.).

Нехай, наприклад, плоска фігура g є частиною плоскої фігури G. На фігуру G навмання кидають точку. Це означає виконання таких припущень: кинута точка може виявитися в будь-якій точці фігури G; ймовірність попадання кинутої точки на фігуру g пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розміщення відносно G, ні від форми фігури g.

При таких припущеннях ймовірність попадання точки у фігуру g визначається рівністю

$$P = \frac{площа\ g}{площа\ G}. \tag{3.1}$$

Це означення є частинним випадком загального означення геометричної ймовірності. Якщо позначити міру(довжину, площу, об'єм) області через *mes*, то ймовірність попадання точки, кинутої навмання (в поясненому вище змісті) в область g - частину області G, дорівнює

$$P = {}^{mesg}\!\!\diagup_{mesG}. \tag{3.2}$$

Приклад 3.1. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких дорівнюють відповідно 15 см і 20 см. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у великий круг, попаде в кільце, утворене даними колами. Припускається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розміщення відносно великого круга.

Розв'язання. Площа кільця (фігури g)

$$S_g = \pi(20^2 - 15^2) = 175\pi$$

Площа великого круга (фігури G)

$$S_G = \pi \cdot 20^2 = 400\pi.$$

Шукана ймовірність

$$P = \frac{175\pi}{400\pi} = \frac{7}{16}.$$

Приклад 3.2. Два студенти домовились зустрітися в певному місці між 12 і 13 годинами дня. Студент, який прийде першим, чекає іншого протягом 15 хвилин, після чого покидає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент вибирає навмання момент свого приходу (в проміжку від 12 до13 години).

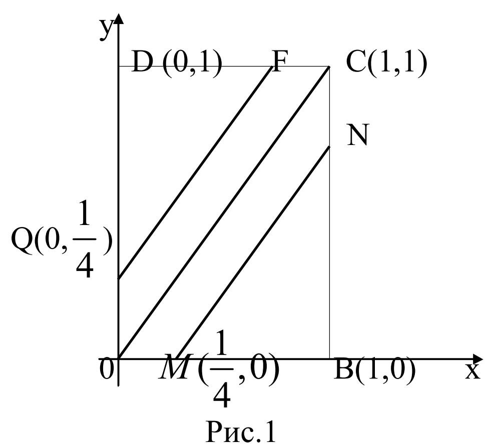


Рис.1

Розв'язання. Припустимо для простоти, що зустріч повинна відбутися між 0 і 1 годинами. Позначимо момент приходу першого та другого студента відповідно через x і y. За умовою задачі $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Введемо прямокутну декартову систему координат $x0y$. В цій системі координат задані подвійні нерівності задовольняють координати будь-якої точки квадрата $OBCD$. Таким чином, цей квадрат можна розглядати як фігуру G, координати точок якої представляють всі можливі значення моментів приходу студентів. Зустріч відбудеться, якщо $|y-x| \le \frac{1}{4}$, тобто $-\frac{1}{4} \le y - x \le \frac{1}{4}$;

Звідси $x - \frac{1}{4} \le y \le x + \frac{1}{4}$.(*)

Побудуємо прямі MN і QF, рівняння яких відповідно $y = x - \frac{1}{4}$ і $y = x + \frac{1}{4}$.

Координати будь-якої точки заштрихованого шестикутника $OMNCFQ$ задовольняють систему нерівностей (*). Таким чином, цей шестикутник можна розглядати як фігуру g, координати точок якої є сприятливими моментами часу x і y.

Шукана ймовірність $P = {}^{S_g}\!/_{S_G}$ $\quad S_G = 1$;

$S_g = 1 - (1 - \frac{1}{4})^2 = 1 - (\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{16}$; $P = \frac{7}{16}$.

3.4. Теореми додавання та множення ймовірностей

Сумою $A + B$ подій A і B називається подія, яка полягає в появі хоча б однієї із подій A і B. Якщо події A і B несумісні, то їх сума $A + B$ - це подія, яка полягає в появі або події *A,* або події *B*.

Добутком AB подій A і B називається подія, яка полягає у сумісній появі обох подій A і B. Якщо події A і B несумісні, то їх добуток AB є неможливою подією.

Аналогічно визначається сума і добуток декількох подій.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{4.1}$$

Ця теорема справедлива для довільного числа несумісних подій:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{4.2}$$

Розглянемо наслідки, які випливають з цієї теореми.

Наслідок 1. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ несумісні та утворюють повну групу, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \tag{4.3}$$

Протилежними подіями називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу. Подію, протилежну до події A, позначають $\overline{A}$.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad (4.4)$$

Умовною ймовірністю $P(A/B)$ події A називається ймовірність цієї події, обчислена в припущенні, що подія B відбулася. Аналогічно визначається умовна ймовірність $P(B/A)$.

Теорема множення ймовірностей.

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої події, обчислену в припущенні, що перша подія відбулася:

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A/B) \qquad (4.5)$$

Цю теорему можна узагальнити на випадок довільного числа подій. Ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}) \qquad (4.6)$$

Дві події називаються незалежними, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої. Декілька подій називаються незалежними, якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки інших.

У випадку двох незалежних подій теорема множення має вигляд

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \qquad (4.7)$$

У випадку n незалежних подій A_1, A_2, ... , A_n

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n), \qquad (4.8)$$

тобто ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Приклад 4.1. В ящику 10 деталей, з них 8 стандартних. З ящика навмання виймають 3 деталі. Знайти ймовірність того, що всі вийняті деталі стандартні.

Розв'язання. Розглянемо подію A - всі три вийняті деталі стандартні. Подія A є добутком трьох подій: $A=A_1A_2A_3$, де A_1, A_2, A_3 - подія, яка полягає в тому, що відповідно перша, друга, третя вийнята деталь стандартна. За теоремою множення ймовірностей

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\,A_2);$$

$$P(A_1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5};\ P(A_2/A_1)=\frac{7}{9};\ P(A_3/A_1\,A_2)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Отже, шукана ймовірність

$$P(A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{15}\approx 0{,}467.$$

Приклад 4.2. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірності безвідмовної роботи за час t першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що за час t безвідмовно будуть працювати: а) два елементи; б) хоча б один елемент.

Розв'язання. а) Розглянемо подію А, яка полягає в тому, що за час t будуть безвідмовно працювати два елементи. Ця подія може здійснитися такими способами: можуть безвідмовно працювати перший та другий елементи, а третій елемент відмовити; або можуть безвідмовно працювати перший та третій елементи, а другий елемент відмовити; або можуть безвідмовно працювати другий та третій елементи, а перший елемент відмовити. Отже,

$A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$, де A_1, A_2, A_3 - безвідмовна робота за час t відповідно першого, другого, третього елемента; $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ - відмова за час t відповідно першого, другого, третього елемента.

Події $B_1 = A_1A_2\overline{A}_3$; $B_2 = A_1\overline{A}_2A_3$; $B_3 = \overline{A}_1A_2A_3$ несумісні. Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні, то незалежні також події $A_1, A_2\, і\, \overline{A}_3$; $A_1, \overline{A}_2\, і\, A_3$; $\overline{A}_1, A_2\, і\, A_3$. Застосувавши теореми додавання та множення ймовірностей, отримаємо

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3).$$

$$P(A_1) = 0,6; P(A_2) = 0,7; P(A_3) = 0,8.$$

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0,6 = 0,4; P(\overline{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3; P(\overline{A}_3) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Остаточно $P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452$

б) Розглянемо подію *С*, яка полягає в тому, що за час *t* буде працювати хоч би один елемент. Нехай $\overline{C}$ - протилежна подія до події *С*, тобто подія $\overline{C}$ полягає в тому, що за час *t* всі три елементи відмовлять. Очевидно, що $\overline{C} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.Затеоремою множення ймовірностей

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Користуючись формулою (4.4), отримаємо

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,024 = 0,976.$$

3.5. Формула повної ймовірності. Формула Бейєса

Якщо подія *А* може відбутися тільки разом з однією із несумісних подій (гіпотез) H_1, H_2, ... , H_n, які утворюють повну групу, то ймовірність події *А* дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із гіпотез і відповідних умовних ймовірностей події *А*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right); \tag{5.1}$$

де $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Ця формула називається формулою повної ймовірності.

З формулою повної ймовірності тісно пов'язана формула Бейєса, яка дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як в результаті випробовувань появилася подія *А*. Умовна ймовірність гіпотези $H_к$ $P\left(H_k/A\right)$ обчислюється за формулою Бейєса

$$P(H_k\left(A\right) = \frac{P(H_k) \cdot P\left(A/H_k\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}; \tag{5.2}$$

де $к = 1,2,...,n$.

Приклад 5.1. На складання надходять деталі з трьох автоматів. Перший автомат дає 25%, другий 30% і третій 45% деталей, що надходять на складання. Перший автомат допускає 0,1% браку деталей, другий - 0,2%, третій - 0,3%. Знайти ймовірність того, що на складання надійде бракована деталь.

Розв'язання. Позначимо через *A* подію «на складання надійшла бракована деталь». Можна висунути три гіпотези: H_1 - деталь виготовлена першим автоматом; H_2 - деталь виготовлена другим автоматом; H_3 - деталь виготовлена третім автоматом. Згідно з умовою задачі $P(H_1)$=0,25, $P(H_2)$=0,30, $P(H_3)$=0,45. Умовна ймовірність $P(A/H_1)$ (ймовірність того, що деталь буде бракованою, якщо вона виготовлена першим автоматом) дорівнює 0,001; аналогічно

$$P(A/H_2)=0{,}002; \qquad P(A/H_3)=0{,}003.$$

Шукану ймовірність того, що на складання надійде бракована деталь, обчислимо за формулою повної ймовірності (5.1):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=0{,}25\cdot 0{,}001+0{,}30\cdot 0{,}002+0{,}45\cdot 0{,}003=0{,}0022.$$

Приклад 5.2. Ймовірність того, що виріб деякого виробництва стандартний, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система перевірки на стандартність, яка дає позитивний результат з ймовірністю 0,98 для виробів, що відповідають стандарту, а для виробів з відхиленнями від стандарту - з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який при спрощеній системі перевірки визнаний стандартним, дійсно відповідає стандарту.

Розв'язання. Подію, яка полягає в тому, що при спрощеній системі перевірки виріб визнаний стандартним, позначимо через *A*. Розглянемо дві гіпотези: H_1 - виріб відповідає стандарту; H_2 - виріб має відхилення від стандарту. Події H_1 і H_2 несумісні та утворюють повну групу. $P(H_1)=0{,}96; P(H_2)=1-0{,}96=0{,}04$. З умови задачі випливає, що $P(A/H_1)=0{,}98; P(A/H_2)=0{,}05$. Шукану умовну ймовірність $P(H_1/A)$ знайдемо за формулою Бейєса (5.2):

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}=\frac{0{,}96\cdot 0{,}98}{0{,}96\cdot 0{,}98+0{,}04\cdot 0{,}05}\approx 0{,}998$$

Приклад 5.3. Прилад складається з двох вузлів. Безвідмовна робота кожного вузла необхідна для функціонування приладу. Ймовірності безвідмовної роботи за час *t* для цих вузлів відповідно дорівнюють $p_1=0{,}8$; $p_2=0{,}7$. Прилад вийшов з ладу на протязі часу *t*. Знайти ймовірність того, що: а) відмовив тільки другий вузол; б) відмовили обидва вузли.

Розв'язання. а) Позначимо через *A* подію, яка полягає в тому, що за час *t* прилад вийшов з ладу. Можливі чотири гіпотези:

H_1 - обидва вузли справні на протязі часу *t*;

H_2 - перший вузол відмовив, а другий справний на протязі часу *t*.

H_3 - перший вузол справний, а другий відмовив на протязі часу *t*.

H_4 - обидва вузли відмовили на протязі часу *t*.

Обчислимо ймовірності гіпотез.

$$P(H_1)=p_1\cdot p_2=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$$

$$P(H_2) = (1 - p_1)p_2 = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$$
$$P(H_3) = p_1(1 - p_2) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$$
$$P(H_4) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$$

Оскільки при відмові хоч би одного з двох вузлів прилад виходить з ладу, то $P(A/H_1) = 0; P(A/H_2) = P(A/H_3) = P(A/H_4) = 1$.

Шукану умовну ймовірність $P(H_3/A)$ обчислимо за формулою Бейєса
$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{0,24 \cdot 1}{0,56 \cdot 0 + 0,14 \cdot 1 + 0,24 \cdot 1 + 0,06 \cdot 1} = \frac{0,24}{0,44} \approx 0,545.$$

б) Шукану умовну ймовірність $P(H_4/A)$ також обчислимо за формулою Бейєса: $P(H_4/A) = \dfrac{0,06 \cdot 1}{0,44} \approx 0,136.$

3.6. Повторення випробовувань. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях

Декілька випробувань називаються незалежними, якщо ймовірність того чи іншого результату кожного з випробувань не залежить від результатів усіх інших випробувань.

Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A стала і дорівнює $p (0 < p < 1)$, то ймовірність того, що в цих n випробуваннях подія A настане m разів, обчислюється за формулою Бернуллі
$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (6.1)$$
де $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}; q = 1 - p.$

Число m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p, називається найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія A появиться в цих випробуваннях m_0 разів, не менша від ймовірностей інших можливих результатів випробувань. Число m_0 визначається з подвійної нерівності
$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad (6.2)$$

Слід зазначити, що різниця чисел $np+p$ і $np-q$ дорівнює одиниці. Якщо $np+p$ не є цілим числом, то існує одне найімовірніше число m_0. Зокрема, якщо np - ціле число, то $m_0 = np$. Якщо $np+p$ - ціле число, то існує два найімовірніших числа $m_o' = np-q$ і $m_o'' = np+p$.

Приклад 6.1. Прилад складається із п'яти блоків. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу t для кожного блоку $p = 0,7$. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за час t будуть безвідмовно працювати: а) чотири блоки; б) не менше чотирьох блоків; в) не більше чотирьох блоків; г) хоч би один блок.

Розв'язання. а) за умовою задачі $n = 5$, $m = 4$, $p = 0,7$, $q = 0,3$. Скористуємося формулою Бернуллі (6.1).

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 q = 5 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 \approx 0,360.$$

б) Позначимо шукану ймовірність $P_5(m \geq 4)$. Те, що на протязі часу t будуть безвідмовно працювати не менше чотирьох блоків, означає, що будуть справними або чотири, або п'ять блоків.

Отже, $P_5(m \geq 4) = P_5(4) + P_5(5)$.

Ймовірність $P_5(4)$ обчислена в попередньому пункті. Ймовірність $P_5(5)$ також обчислимо за формулою Бернуллі

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 q^0 = 1 \cdot 0,7^5 \approx 0,168$$
$$P_5(m \geq 4) = 0,360 + 0,168 = 0,528.$$

в) Ймовірність того, що будуть безвідмовно працювати не більше чотирьох блоків,

$$P_5(m \leq 4) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + P_5(4).$$

В цьому випадку простіше знайти ймовірність протилежної події (на протязі часу t будуть безвідмовно працювати п'ять блоків) і відняти її від одиниці:

$$P_5(m \leq 4) = 1 - P_5(m > 4) = 1 - P_5(5) \approx 1 - 0,168 = 0,832.$$

г) Протилежною до події «на протязі часу t буде безвідмовно працювати хоч би один блок» є подія « на протязі часу t всі блоки вийдуть з ладу».

Тому $P_5(m \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - 1 \cdot 0,3^5 \approx 0,998.$

Приклад 6.2. ВТК перевіряє партію із 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,85. Знайти найімовірніше число стандартних деталей в цій партії.

Розв'язання. За умовою задачі $p = 0,85$, $n = 10$, $q = 1 - p = 0,15$. Число m_0 визначається з подвійної нерівності (6.2), тобто

$$10 \cdot 0,85 - 0,15 \leq m_0 \leq 10 \cdot 0,85 + 0,85, \; 8,35 \leq m_0 \leq 9,35.$$

Оскільки m_0 ціле число, то очевидно, що m_0 =9.

3.7. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Якщо число випробувань n велике, то застосування формули Бернуллі приводить до громіздких обчислень. Тому в таких випадках користуються асимптотичними формулами.

Локальна теорема Муавра - Лапласа.

Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала, причому $0 < p < 1$, а число випробувань досить велике, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A настане m разів, визначається за формулою

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{7.1}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; q = 1 - p.$

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x)= \varphi(x)$. Є таблиці, в яких наведені значення функції $\varphi(x)$, що відповідають додатним значенням аргументу; для $x>5$ приймають $\varphi(x)\approx 0$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала, причому $0<p<1$, а число випробувань досить велике, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A настане не менше m_1 разів і не більше m_2 разів, визначається за формулою

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (7.2)$$

де $\Phi(x)$ -функція Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt; x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},\ q = 1\text{-}p.$$

Функція Лапласа непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Є таблиці значень цієї функції для додатних значень x; для $x>5$ приймають $\Phi(x)\approx 0,5$.

Приклад 7.1. Ймовірність виходу з ладу за час t одного конденсатора дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за час t із 100 конденсаторів вийдуть з ладу: а) 18 конденсаторів: б) не менше 16 і не більше 26 конденсаторів.

Розв'язання. а) За умовою p = 0,2; n = 100; m = 18; q = 1- 0,2 = 0,8. Оскільки n = 100 - досить велике число, то застосуємо локальну теорему Муавра-Лапласа. Обчислимо значення

$$x = \frac{18-20}{\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}} = -0,5.$$

Шукана ймовірність

$$P_{100}(18) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}}\cdot\varphi(-0,5) = \frac{1}{4}\varphi(0,5).$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знайдемо $\varphi(0,5)=0,3521$. Отже,

$$P_{100}(18)\approx 0,0880.$$

б) За умовою задачі m_1 = 16;m_2 = 26; n = 100; p = 0,2; q = 0,8. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа. Обчислимо значення

$$x_1 = \frac{16-20}{4} = -1;\ x_2 = \frac{26-20}{4} = 1,5.$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, отримуємо

$$P_{100}(16\le m\le 26)\approx \Phi(1,5) - \Phi(-1) = \Phi(1,5)+\Phi(1).$$

За таблицею значень функцій Лапласа знайдемо $\Phi(1,5)=0,4332$; $\Phi(1)=0,3413$. Шукана ймовірність $P_{100}(16\le m\le 26)\approx 0,4332+0,3413=0,7745$.

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала і мала $(p<0,1)$, а число випробувань n досить велике, то ймовірність того, що подія A настане в цих випробуваннях m разів, визначається за формулою:

$$P_n(m)\approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (7.3)$$

де $\lambda = np$.

Для функції $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, яка є функцією двох змінних λ і m, складені таблиці.

Приклад 7.2. Завод відправив споживачу партію із 1000 виробів. Ймовірність пошкодження в дорозі кожного із виробів дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що споживач отримає 3 пошкодженні вироби.

Розв'язання. За умовою задачі n = 1000; m = 3; p = 0,004. Оскільки ймовірність появи подій в одному випробуванні мала, а число випробувань досить велике, то скористаємося формулою Пуассона (7.3).

$$\lambda = np = 4; \quad P_{1000}(3) \approx \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!} \approx 0{,}1954.$$

Ймовірність відхилення відносної частоти події від її ймовірності в незалежних випробуваннях. Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала, причому $0 < p < 1$, а число випробовувань досить велике, то ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ події A від її ймовірності p по абсолютній величині не перевищить заданого числа $\varepsilon > 0$, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \tag{7.4}$$

Приклад 7.3. Ймовірність того, що деталь стандартна, p = 0,9. Скільки потрібно взяти деталей, щоб з ймовірністю $\gamma = 0{,}9876$ можна було сподіватися, що відносна частота появи стандартних деталей серед відібраних буде відрізнятися від ймовірності p по абсолютній величині не більше ніж на 0,03?

Розв'язання. За умовою задачі p = 0,9; q = 0,1; $\varepsilon = 0{,}03$; $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le 0{,}03\right) = \gamma$. Потрібно знайти n. Скористаємося формулою (7.4). Позначимо $t = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{n}{pq}}$. Тоді $2\Phi(t) = 0{,}9876$, $\Phi(t) = 0{,}4938$. За таблицею значень функції Лапласа знайдемо $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$. Отже, t = 2,5, тобто $t = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{n}{pq}} = 2{,}5$.

Для знаходження n одержимо рівняння $0{,}03 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 2{,}5$. Шукане число деталей n = 625.

3.8. Найпростіший потік подій

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються у випадкові моменти часу. Найпростішим називається потік подій, який має властивості стаціонарності, відсутності післядії та ординарності.

Властивість стаціонарності полягає в тому, що ймовірність появи m подій потоку за будь-який проміжок часу t залежить тільки від числа m і від тривалості часу t і не залежить від початку відліку часу.

Властивість відсутності після дії полягає в тому, що ймовірність появи m подій за будь-який проміжок часу не залежить від того, скільки подій появилось в попередні моменти часу.

Властивість ординарності, полягає в тому, що поява двох і більше подій за малий проміжок часу практично неможлива, тобто за малий проміжок часу може появитися не більше однієї події потоку.

Інтенсивністю λ потоку називається середнє число подій, які появляються за одиницю часу.

Якщо відома стала інтенсивність потоку то ймовірність появи m подій найпростішого потоку за час t визначається за формулою Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} \tag{8.1}$$

Приклад 8.1. Середнє число викликів які, надходять на АТС за 1 хв., дорівнює двом. Знайти ймовірність того, що за 3 хв. на АТС надійде: а) чотири виклики; б) менше чотирьох викликів; в) не менше чотирьох викликів. Припускається, що потік викликів найпростіший.

Розв'язання. а) За умовою $\lambda = 2;\ t = 3;\ m = 4.$ Скористаємося формулою Пуассона (8.1).Ймовірність того, що за 3 хв. надійде чотири виклики,

$$P_3(4) = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = 0{,}133853.$$

При обчисленні $P_3(4)$ використано таблицю значень функцій Пуассона; б) Подія «надійшло менше чотирьох викликів» відбудеться, якщо появиться одна з наступних несумісних подій: 1) не надійшло жодного виклику; 2) надійшов один виклик; 3) надійшло два виклики; 4) надійшло три виклики. Застосуємо теорему додавання ймовірностей для несумісних подій:

$$P_3(m<4) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = e^{-6} + \frac{6e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 e^{-6}}{3!} =$$

$$= 0{,}002479 + 0{,}014873 + 0{,}044618 + 0{,}089236 = 0{,}151205.$$

в) Події «надійшло менше чотирьох викликів» та «надійшло не менше чотирьох викликів» протилежні, тому ймовірність того, що за 3 хв., надійде не менше чотирьох викликів,

$$P_3(m \ge 4) = 1 - P_3(m<4) = 0{,}848795.$$

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Випадкова величина та її закон розподілу

Випадковою називається величина, яка в результаті випробування прийме одне можливе значення, яке наперед невідоме і залежить від випадкових причин.

Випадкова величина називається дискретною, якщо вона може приймати тільки скінченну або зчисленну множину значень.

Неперервною називається випадкова величина, можливі значення якої заповнюють деякий інтервал (скінченний або нескінченний).

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення, яке встановлює зв'язок між її можливими значеннями та відповідними ймовірностями.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий таблицею, в якій записані можливі значення випадкової величини та відповідні ймовірності.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Якщо множина можливих значень дискретної випадкової величини зчисленна:

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ збігається і його сума дорівнює одиниці.

Така таблиця називається рядом розподілу дискретної випадкової величини X.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна зобразити графічно: в прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1;p_1)$, $M_2(x_2;p_2)$,..., $M_n(x_n;p_n)$ і послідовно з'єднують їх відрізками прямих. Одержана фігура називається многокутником розподілу.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати аналітично (у вигляді формули): $P(X = x_i) = \Psi(x_i)$.

Приклад 1.1. Ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала і дорівнює p. Нехай дискретна випадкова величина X - це число появи події A в цих випробуваннях. Можливі значення випадкової величини X : $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ... , $x_{n+1}= n$. Для знаходження ймовірностей цих можливих значень скористаємося формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.1}$$

де $m=0, 1, 2,.., n$; $q=1-p$.

Формула (1.1) є аналітичним виразом закону розподілу ймовірностей цієї випадкової величини X.

Закон розподілу ймовірностей, який визначається формулою Бернуллі називається біноміальним. Цей закон назвали біноміальним тому, що праву частину рівності (1.1) можна розглядати як загальний член розкладу бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + ... + C_n^m p^m q^{n-m} + ... + C_n^0 q^n.$$

Таким чином, перший член розкладу p^n визначає ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A настане n разів: другий член $np^{n-1}q$ визначає ймовірність того, що подія A настане n-1 разів; ... ; останній член q^n визначає ймовірність того, що подія A не появиться жодного разу.

Приклад 2.1. Нехай проводяться незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює $p(0 < p < 1)$. Випробовування закінчуються, як тільки появиться подія A. Позначимо через X дискретну випадкову величину - число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A.

Можливими значеннями випадкової величини X є натуральні числа:

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, \ldots, x_n=n, \ldots$$

Нехай в перших k-1 випробуваннях подія A не появилася, а в k-ому випробуванні вона настала. В цьому випадку $X=k$. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій отримаємо

$$P(X=k) = q^{k-1} p, \tag{1.2}$$

де q=1-p.

Підставляючи у формулу (1.2) k=1, 2, 3, ..., n, ..., одержимо геометричну прогресію з першим членом p і знаменником $q(0 < q < 1)$:

$$p, qp, q^2 p, \ldots, q^{n-1} p, \ldots \tag{1.3}$$

Тому закон розподілу ймовірностей, який визначається за формулою (1.2), називається геометричним. Неважко перевірити, що ряд $p + qp + q^2 p + ... + q^{n-1} p + ...$збігається і його сума дорівнює 1.

Приклад 1.3. Нехай в партії з N виробів є M стандартних $(M < N)$. З цієї партії навмання вибирають n виробів, причому вибраний виріб перед вибором наступного не повертається в партію. Позначимо через X дискретну випадкову величину - число стандартних виробів серед n вибраних. Можливі значення випадкової величини X: 0, 1, 2, ... , $min(M,n)$.

Знайдемо ймовірність того, що X=m, тобто, що серед n вибраних виробів буде m стандартних. Скористаємося для цього класичним означенням ймовірності. Загальне число всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, які утворюють повну групу, дорівнює C_N^n. Число результатів, які сприяють появі події X=m (серед взятих n виробів виявляються m стандартних і n-m нестандартних виробів) дорівнює$C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Отже,

$$P(X=m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \tag{1.4}$$

Закон розподілу ймовірностей, який визначається формулою (1.4), називається гіпергеометричним.

4.2. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини

Як дискретну, так і неперервну випадкову величину можна задати функцією розподілу $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування прийме значення менше від x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (2.1)$$

Функція розподілу будь-якої випадкової величини є неспадною функцією аргументу x, причому $0 \le F(x) \le 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування прийме значення, яке задовольняє подвійну нерівність $a \le X < b$,

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \qquad (2.2)$$

Можна уточнити означення неперервної випадкової величини: випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна при всіх x, а похідна функції розподілу неперервна в усіх точках, крім, можливо, скінченного числа точок на будь-якому скінченному інтервалі.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме одне певне значення x_0, дорівнює нулю, тобто $P(X = x_0) = 0$. Тому для неперервної випадкової велечини X

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

Приклад 2.1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

x_i	2	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1.Побудувати многокутник розподілу.2. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

Розв'язання. 1. Побудуємо прямокутну систему координат, причому на осі абсцис будемо відкладати можливі значення x_i, а на осі ординат відповідні ймовірності p_i. Побудуємо точки $M_1(2;0,1)$, $M_2(4;0,2)$, $M_3(5;0,4)$, $M_4(6;0,3)$ та з'єднаємо їх послідовно відрізками прямих. Одержимо шуканий многокутник розподілу.

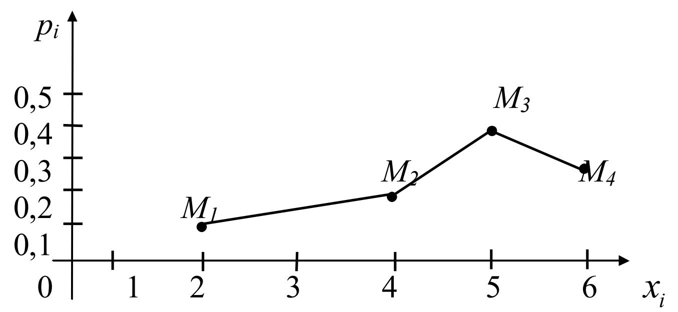


Рис. 2

2. За означенням функція розподілу $F(x) = F(X < x)$. Якщо $x \le 2$, то $F(x) = 0$, оскільки значень, які менші від 2, випадкова величина X не приймає.

Якщо $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0,1$. Дійсно, X може прийняти тільки значення 2 з ймовірністю 0,1. Якщо $4 < x \le 5$, то $F(x) = 0,1 + 0,2 = 0,3$. Дійсно, X може прийняти значення 2 з ймовірністю 0,1 і значення 4 з ймовірністю 0,2; отже, одне з цих значень випадкова величина X може прийняти з ймовірністю 0,3 (за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій). Якщо $5 < x \le 6$, то $F(x) = 0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,7$ (пояснення аналогічне).

Якщо $5 < x$, то $F(x) = 1$, оскільки в цьому випадку подія $X < x$, є достовірною.

Отже, шукана функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 2 \\ 0,1 & при \quad 2 < x \le 4 \\ 0,3 & при \quad 4 < x \le 5 \\ 0,7 & при \quad 5 < x \le 6 \\ 1 & при \quad x > 6 \end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції

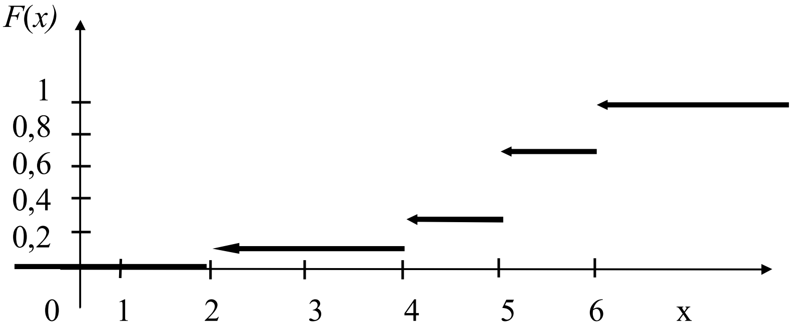


Рис. 3

Приклад 2.2. Неперервна випадкова величина X задана на всій осі $0x$ функцією розподілу $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx.$

1. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу (-1,1).

2. Побудувати графік функції $F(x)$.

Розв'язання.

1. $P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(-1)) =$

$$= \frac{2}{\pi} arctg1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0,5.$$

2. Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$.

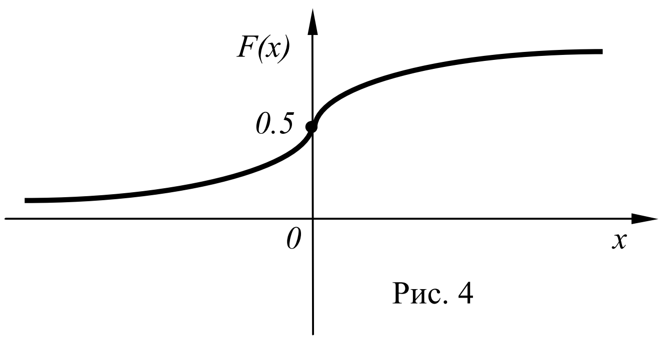


Рис. 4

4.3. Густина розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Густиною розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини називається перша похідна від її функції розподілу

$$f(x)=F'(x) \tag{3.1}$$

Густина розподілу ймовірностей існує тільки для неперервних випадкових величин. Густина розподілу ймовірностей невід'ємна, тобто $f(x)\ge 0$, оскільки $F(x)$ - неспадна функція.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу (a,b),

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx. \tag{3.2}$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, оскільки він визначає ймовірність того, що неперервна випадкова величина X в результаті випробування прийме яке-небудь значення з інтервалу $(-\infty,+\infty)$.

Якщо задана густина розподілу ймовірностей $f(x)$ неперервної випадкової величини X , то її функція розподілу $F(x)$ визначається за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{3.3}$$

Приклад 3.1. Неперервна випадкова величина X задана густиною розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad x\le \frac{\pi}{6} \\ C\sin 3x & \text{\textit{при}} \quad \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{\textit{при}} \quad x>\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Знайти: а) сталий параметр C; б) функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. А) Густина розподілу $f(x)$ повинна задовольняти умову $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В даному випадку $C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3xdx=1$.

Оскільки $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=-\frac{1}{3}(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$, то C=3 б) Для знаходження функції розподілу $F(x)$ використаємо формулу (3.3).

Якщо $x \le \frac{\pi}{6}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

Якщо $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3x dx = -\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{x} = -\cos 3x.$

Якщо $x > \frac{\pi}{3}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} 0 \cdot dx = -\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 1$

Отже, шукана функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le \frac{\pi}{6} \\ -\cos 3x & \textit{при} \quad \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3} \\ 1 & \textit{при} \quad x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

4.4. Числові характеристики випадкових величин

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини *X* називається сума добутків всіх її можливих значень на відповідні ймовірності

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n. \tag{4.1}$$

Якщо дискретна випадкова величина *X* може приймати зчисленну множину значень, то $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ при умові, що цей ряд абсолютно збіжний.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини *X*, можливі значення якої належать всій осі *0x*, визначається рівністю

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{4.2}$$

де $f(x)$- густина розподілу ймовірностей випадкової величини *X*. Припускається, що невласний інтеграл збігається абсолютно, тобто існує інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx.$

Зокрема, якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини *X* належать інтервалу (*а*,*в*), то

$$M(X)=\int_{a}^{в} xf(x)dx. \quad (4.3)$$

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$D(X)=M\left(X-M\left(X\right)\right)^2 \quad (4.4)$$

Дисперсія випадкової величини X є мірою розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Дисперсію обчислюють за формулою

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2 \quad (4.5)$$

Для дискретної випадкової величини X формула (4.5) має вигляд:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-\left[M(X)\right]^2. \quad (4.6)$$

Для неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать всій осі $0x$, одержимо

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2 \quad (4.7)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать інтервалу $(a,в)$, то

$$D(X)=\int_{a}^{в} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2 \quad (4.8)$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь із її дисперсії

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \quad (4.9)$$

Приклад 4.1. В партії 25 деталей, серед яких є 6 нестандартних. Із цієї партії вибрані навмання для перевірки їх якості 3 деталі. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X - числа нестандартних деталей, що містяться у вибірці.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X : $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Ймовірність того, що в цій вибірці виявиться рівно $m(m=0,1,2,3)$ нестандартних деталей, обчислюється за формулою

$$P(X=m)=\frac{C_6^m\cdot C_{19}^{3-m}}{C_{25}^3}.$$

Виконавши обчислення, отримаємо:

$$p_1=P(X=0)\approx 0,42; \quad p_2=P(X=1)\approx 0,45;$$

$$p_3=P(X=2)\approx 0,12; \quad p_4=P(X=3)\approx 0,01;$$

Одержали закон розподілу даної випадкової величини X.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,42	0,45	0,12	0,01

За формулою (4.1) математичне сподівання випадкової величини X

$$M(X)=0\cdot 0,42+1\cdot 0,45+2\cdot 0,12+3\cdot 0,01=0,72.$$

Дисперсію випадкової величини X обчислимо за формулою (4.6).

$$D(X)=0\cdot 0,42+1\cdot 0,45+4\cdot 0,12+9\cdot 0,01-(0,72)^2=1,02-0,52=0,50.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X $\sigma(X)=\sqrt{0,50}\approx 0,71.$

Приклад 4.2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} & при \quad 0<x\le\pi \\ 1 & при \quad x>\pi \end{cases}$$

Знайти: 1) густину розподілу ймовірностей $f(x)$, 2) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання. 1. Густина розподілу ймовірностей $f(x)$ дорівнює похідній від функції розподілу $F(x)$: $f(x)=F'(x)$. Отже,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} & при \quad 0<x\le\pi \\ 0 & при \quad x>\pi \end{cases}$$

2. Оскільки всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(0,\pi)$, то, користуючись формулою (4.3), отримаємо

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx.$$

Інтегруючи за частинами, знаходимо

$$M(X)=x\sin\frac{x}{2}\ \Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2})\ \Big|_0^{\pi}=\pi-2\approx 1,14.$$

Дисперсію $D(X)$ обчислимо за формулою (4.8).

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cos\frac{x}{2}dx-(\pi-2)^2.$$

Інтегруючи двічі за частинами, одержимо $\int_0^{\pi} x^2\cos\frac{x}{2}dx=2(\pi^2-8).$

Остаточно отримаємо $D(X)=\pi^2-8-(\pi-2)^2=4\pi-12\approx 0,57.$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{0,57}\approx 0,75.$

Побудуємо графіки функції $F(x)$ і $f(x)$.

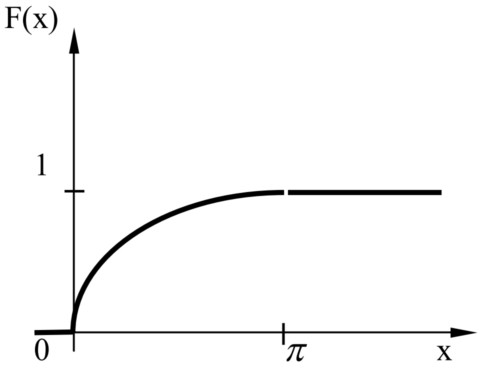


Рис.5

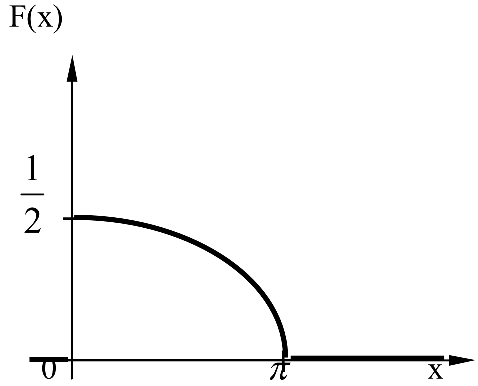


Рис.6

4.5. Рівномірний та показниковий закони розподілу

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової вличини X називається рівномірним в інтервалі (a,b), якщо всі її можливі значення містяться в цьому інтервалі і густина розподілу ймовірностей стала на цьому інтервалі.

Якщо неперервна випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (a,b), то її густина розподілу ймовірностей $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a < x \le b \\ 0 & при \quad x > b \end{cases} \tag{5.1}$$

Користуючись формулою (3.3), отримаємо функцію розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a < x \le b \\ 1 & при \quad x > b \end{cases} \tag{5.2}$$

Ймовірність того, що рівномірно розподілена на інтервалі (a,b) випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу (α,β) $(\alpha \ge a; \beta \le b)$, обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a} \tag{5.3}$$

Математичне сподівання рівномірно розподіленої в інтервалі (a,b) випадкової величини X

$$M(X)=\frac{a+b}{2}$$

Дисперсія цієї випадкової величини X

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Приклад 5.1. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Покази амперметра заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відрахунку буде зроблена помилка: а) менша ніж 0,01 А; б) більша ніж 0,03 А.

Розв'язання: а) Помилку заокруглення можна розглядати як випадкову величину *X*, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками шкали. В даній задачі довжина інтервалу, в якому містяться можливі значення випадкової величини *X*, дорівнює 0,1. Помилка відрахунку буде менша від 0,01 А, якщо $0 < X < 0{,}01$ або $0{,}09 < X < 0{,}1$.

Застосувавши формулу (5.3), отримаємо

$$P(0 < X < 0{,}01) + P(0{,}09 < X < 0{,}1) = \frac{0{,}01 - 0}{0{,}1} + \frac{0{,}1 - 0{,}09}{0{,}1} = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2.$$

б) Помилка відрахунку буде більша від 0,03 А, якщо $0{,}03 < X < 0{,}07$.

$$P(0{,}03 < X < 0{,}07) = \frac{0{,}07 - 0{,}03}{0{,}1} = \frac{0{,}04}{0{,}1} = 0{,}4.$$

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини *X* називається показниковим, якщо густина розподілу ймовірностей цієї випадкової величини має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

де λ - додатне число.

Функція розподілу показникового закону

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) неперервної випадкової величини *X*, яка розподілена за показниковим законом, обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < x < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \tag{5.7}$$

Математичне сподівання випадкової величини *X*, розподіленої за показниковим законом, $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Дисперсія цієї випадкової величини *X* $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Приклад 5.2. Неперервна випадкова величина T - тривалість часу безвідмовної роботи пристрою розподілена за показниковим законом з функцією розподілу $F(t) = 1 - e^{-0{,}03t} (t \ge 0)$. Знайти ймовірність того, що за час тривалістю *t* = 100 год: а) пристрій відмовить; б) пристрій не відмовить.

Розв'язання. а) Оскільки функція розподілу $F(t) = P(T < t)$, то вона визначає ймовірність того, що за час тривалістю *t* пристрій відмовить. Підставивши *t* = 100 у функцію розподілу, отримаємо ймовірність відмови пристрою за час тривалістю *t* = 100 год:

$$F(100) = 1 - e^{-3} \approx 0{,}95.$$

б) Події «пристрій відмовить за час тривалістю t = 100 год.» і «пристрій не відмовить за час тривалістю t = 100 год.» протилежні. Тому ймовірність того, що пристрій не відмовить за час тривалістю t = 100 год.

$$P = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

4.6. Нормальний закон розподілу. Поняття про центральну граничну теорему Ляпунова

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається нормальним, якщо густина розподілу ймовірностей цієї випадкової величини має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6.1)$$

де a - матиматичне сподівання, σ - середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X в результаті випробовування прийме значення, яке належить інтервалу (α, β), обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}), \qquad (6.2)$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання буде меншою від заданого числа $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|X - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Нормальний закон є законом розподілу, який найчастіше зустрічається на практиці. За цим законом розподілено багато випадкових величин, наприклад випадкові похибки вимірювань, відхилення розмірів деталей від номінального, відхилення точки падіння снаряду від цілі. Чим це пояснюється? Відповідь на це питання дає центральна гранична теорема Ляпунова. Зміст цієї теореми: якщо випадкова величина X є сумою дуже великого числа незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму дуже малий, то випадкова величина X має розподіл, близький до нормального.

Сформулюємо центральну граничну теорему для однаково розподілених доданків: якщо X_1, X_2, ... ,X_n - незалежні випадкові величини, які мають однакові закони розподілу з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2, то при необмеженому зростанні n закон розподілу суми $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ необмежено наближається до нормального.

Розглянемо середнє арифметичне цих випадкових величин $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. При досить великому *n* випадкова величина $\bar{X}$ також має розподіл, близький до нормального. Оскільки $M(\bar{X}) = a$, $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, то ймовірність того, що в результаті випробування $\bar{X}$ прийме значення з інтервалу (α, β),

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \Phi(\frac{(\beta - a)\sqrt{n}}{\sigma}) - \Phi(\frac{(\alpha - a)\sqrt{n}}{\sigma}). \qquad (6.4)$$

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного $\bar{X}$ від математичного сподівання *a* буде меншою від заданого числа $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}). \qquad (6.5)$$

Приклад 6.1. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини *X* дорівнюють відповідно 10 і 4. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* прийме значення, яке знаходиться в інтервалі (8, 15).

Розв'язання. Скористаємося формулою (6.2). Підставивши значення $\alpha = 8$, $\beta = 15$, $Ђ = 10$, $\sigma \ = 4$, одержимо

$$P(8 < X < 15) = \Phi(1,25) - \Phi(-0,5) = \Phi(1,25) + \Phi(0,5).$$

За таблицею значень функції Лапласа знайдемо *Ф*(1,25)=0,3944; *Ф*(0,5)=0,1915. Шукана ймовірність $P(8 < X < 15) = 0,5859$.

Приклад 6.2. Вимірюють діаметр вала без систематичних похибок. Випадкові похибки вимірювання *X* підпорядковані нормальному закону з математичним сподіванням *a*=0 і середнім квадратичним відхиленням σ =20мм. Знайти ймовірність того, що із трьох незалежних вимірювань похибка хоч би одного не перевищить по абсолютній величині 10 мм.

Розв'язання. Спочатку знайдемо ймовірність того, що одне вимірювання буде виконане з похибкою, яка не перевищує по абсолютній величині 10 мм. Використаємо формулу (6.3). Підставивши значення *a*=0, $\sigma = 20$, $\varepsilon = 10$, отримаємо $P\left(\left|X\right| < 10\right) = 2\Phi(0,5) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383$.

Отже, *p*=0,383. Ймовірність того, що одне вимірювання буде виконане з похибкою, яка перевищує по абсолютній величині 10 мм, *q*=1-*p*=0,617.

Нехай подія *A* полягає в тому, що похибка хоч би одного з трьох незалежних вимірювань не перевищить по абсолютній величині 10 мм. Тоді $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, де $\bar{A} -$ протилежна подія, яка полягає в тому, що похибки всіх трьох вимірювань перевищують по абсолютній величині 10 мм.

$$P(\bar{A}) = q^3 = 0,617^3 = 0,235.$$

Шукана ймовірність $P(A) = 1 - 0,235 = 0,765$.

Приклад 6.3. Нехай X_1, X_2, ..., X_n - незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням *a* і дисперсією $\sigma^2 = 3$;

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - середнє арифметичне випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю $\gamma = 0{,}95$ можна було чекати, що середнє арифметичне $\overline{X}$ відхилиться від математичного сподівання a по абсолютній величині менше ніж на ε, якщо n = 2700.

Розв'язання. Використаємо формулу (6.5):

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}).$$

Позначимо $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$. Тоді $2\Phi(t) = 0{,}95; \Phi(t) = 0{,}475.$ За таблицею значень функції Лапласа знайдемо $\Phi(1{,}96) = 0{,}475.$

Отже, t =1,96, тобто $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = 1{,}96.$ Для знаходження ε одержали рівняння

$\frac{\varepsilon\sqrt{2700}}{\sqrt{3}} = 1{,}96,$ звідси ε =0,065.

5. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

5.1. Закон розподілу ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин

Системою випадкових величин називається сукупність випадкових величин, яка розглядається як єдине ціле. Систему двох випадкових величин (X,Y) можна тлумачити як випадкову точку M(X,Y) на площині xOy або випадковий вектор $\overrightarrow{OM}$.

Законом розподілу ймовірностей системи випадкових величин називається співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями системи випадкових величин та їх ймовірностями.

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин можна задати у вигляді таблиці.

Y \ X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}
…	…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{im}	…	p_{nm}

(1.1)

Перший рядок таблиці містить всі можливі значення X, а перший стовпець – всі можливі значення складової Y. В клітинці, яка розміщена на перетині «стовпця x_i» та «рядка y_j» вказана ймовірність p_{ij} того, що система (X,Y) прийме значення (x_i,y_j) i =1,2,….n; j =1,2…m). Всі можливі події $(X=x_i,Y=y_j)$ при i = 1,2…n; j = 1,2… m утворюють повну групу несумісних подій, тобто

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Знаючи закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин, можна знайти закони розподілу її складових.

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \; ; \qquad P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \qquad (1.2)$$

(i = 1,2,..,n) (j = 1,2,…,m)

Приклад 1.1. Знайти закони розподілу складових системи двох дискретних випадкових величин, заданої законом розподілу

Y \ X	1	2	3
2	0,15	0,23	0,18
4	0,08	0,16	0,20

Розв'язання: Використаємо формули (1.2). P(X=1)=0,15+0,08=0,23; P(X=2)=0,23+0,16=0,39; P(X=3)=0,18+0,20=0,38

Закон розподілу складової X запишеться так:

X	1	2	3
P	0,23	0,39	0,38

Закон розподілу складової Y:

Y	2	4
P	0,56	0,44

5.2. Функція розподілу системи двох випадкових величин

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X,Y) називають функцію $F(x,y)$, яка визначає для кожної пари чисел x, y ймовірність того, що X приїме значення, менше від x, і при цьому Y приїме значення, менше від y:

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y) \qquad (2.1)$$

Якщо скористатись геометричним тлумаченням системи двох випадкових величин, то функція розподілу F(x,y) є ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в нескінченний квадрат з вершиною в точці (x,y), який розміщений лівіше і нижче від неї.

Функція розподілу F(x,y) має такі властивості :

а) $0 \le F(x,y) \le 1$.

б) F(x,y) є неспадною функцією своїх аргументів

$F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$,якщо $x_2>x_1$;

$F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$, якщо $y_2>y_1$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$

г) При $y\to+\infty$ фунКція розподілу системи стає функцією розподілу складової X:

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)=F_1(x)$

При $x\to+\infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової Y

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=F_2(y)$

Користуючись функцією розподілу, можна знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник $x_1\leq X<x_2$, $y_1\leq Y<y_2$:

$$P(x_1\leq X<x_2,\ y_1\leq Y<y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)]; \qquad (2.2)$$

Функція розподілу системи існує для систем будь-яких випадкових величин (дискретних чи неперервних).

Приклад 2.1. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник, обмежений прямими x=0 , x=4, y=0, y=$5\sqrt{3}$, якщо відома функція розподілу $F(x,y)=(\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2})(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{5}+\frac{1}{2})$

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.2)

$$P(0\leq X<4;\ 0\leq Y<5\sqrt{3})=F(4,\ 5\sqrt{3})-F(0,\ 5\sqrt{3})-[F(4,0)-F(0,0)]=(\frac{1}{\pi}\text{arctg}1+\frac{1}{2})$$

$$(\frac{1}{\pi}\text{arctg}\sqrt{3}+\frac{1}{2})-(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2})(\frac{1}{\pi}\text{arctg}\sqrt{3}+\frac{1}{2})-[(\frac{1}{\pi}\text{arctg}1+\frac{1}{2})(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2})-$$

$$(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2})(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2})]=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}-(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})\approx 0{,}083$$

5.3. Густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин

Розподіл системи двох неперервних випадкових величин можна характеризувати як функцією розподілу, так і густиною розподілу ймовірностей. Густиною розподілу ймовірностей f(x,y) системи двох неперервних випадкових величин називається мішана частинна похідна другого порядку від функції розподілу F(x,y), тобто

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad (3.1)$$

Знаючи густину розподілу f(x,y), можна знайти функцію розподілу

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy \qquad (3.2)$$

Ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D на площині xOy визначається рівністю

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy \qquad (3.3)$$

Густина розподілу ймовірностей f(x,y) має такі властивості:

а) $f(x,y)\geq 0$

б) подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування від густини розподілу ймовірностей f(x,y) дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \qquad (3.4)$$

Приклад 3.1. Усередині квадрата, обмеженого прямими x=0, $x=\frac{\pi}{2}, y=0, y=\frac{\pi}{2}$, густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин f(x,y)=Csin(x+y). Поза цим квадратом f(x,y)=0. Знайти :

а) сталий параметр C;

б)функцію розподілу F(x,y) при $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$,$0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання: а) для знаходження параметра C скористаємося формулою (3.4).

$$C\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=1;$$

Оскільки $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}\right)dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=2, \text{ то } C=\frac{1}{2}=0,5$$

б) Оскільки f(x,y)=0 поза даним квадратом, то при $0\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ функція розподілу

$$F(x,y)=0,5\int_0^x dx\int_0^y\sin(x+y)dy=0,5\int_0^x(-\cos(x+y)\Big|_0^y)dx=0,5\int_0^x(\cos x-\cos(x+y))dx=$$

$$=\ 0,5(\sin x-\sin(x+y))\Big|_0^x=0,5(\sin x-\sin(x+y)+\sin y).$$

Отже, F(x,y)=0,5(sin x+sin y-sin (x+y)) при $0\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ \ 0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.

Приклад 3.2. Задана густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних величин

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3}{63\pi}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right) & \textit{при} \quad x^2+y^2 \le 16 \\ 0 & \textit{при} \quad x^2+y^2 > 16 \end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D : $x^2 + y^2 \le 9$

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.3). Ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в круг із радіусом r = 3 і центром в початку координат (область D)

$$P[(X,Y)\in D]=\frac{3}{64\pi}\iint\limits_D (4-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Перейдемо до полярних координат:

$$P[(X,Y)\in D]=\frac{3}{64\pi}\iint\limits_D (4-\rho)\rho d\rho d\varphi=\frac{3}{64\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 (4\rho-\rho^2)d\rho=$$

$$\frac{3}{64\pi}\cdot 2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{3}{32}\cdot 9\approx 0,84$$

Якщо відома густина розподілу ймовірностей f(x,y) системи двох неперервних випадкових величин, то можна знайти густину розподілу ймовірностей кожної складової. Густина розподілу ймовірностей складової X.

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy; \tag{3.5}$$

густина розподілу складової Y

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \tag{3.6}$$

Приклад 3.3. Густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2-2xy-4y^2}$$

Знайти густину розподілу ймовірностей складової Y.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.6).

$$f_2(y)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)^2-3y^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y).$$

Оскільки інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$, то остаточно отримаємо:

$$f_2(y)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3y^2}$$

Отже густина розподілу ймовірностей випадкової величини Y

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3y^2} \quad .$$

5.4. Умовні закони розподілу

Розглянемо систему двох дискретних випадкових величин (X,Y) із законом розподілу (1.1).

Позначимо через $p(x_i / y_j)$ умовну ймовірність того, що X прийме значення x_i при умові , що складова Y прийняла значення y_j. Умовним розподілом складової X при $Y=y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей $p(x_1 / y_j)$, $p(x_2 / y_j),\ldots, p(x_n / y_j)$. Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y.

Якщо відомий закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y), то можна знайти умовні закони розподілу складових. Умовні ймовірності складових X і Y обчислюються відповідно за формулами:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p_{ij}}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}; \qquad (4.1)$$

$$p(y_j / x_i) = \frac{p_{ij}}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}}; \qquad (4.2)$$

Для контролю обчислень доцільно переконатися, що сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці.

Приклад 4.1. Втулки, що виробляють в цеху, сортують за відхиленнями їхнього внутрішнього діаметра від номінального розміру на чотири групи за значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 і за овальністю - на чотири групи за значеннями 0,02; 0,04; 0,06; 0,08. Розподіл відхилень діаметра X та овальності Y наведені в таблиці

Y X	0,01	0,02	0,03	0,04
0,02	0,01	0,05	0,04	0,03
0,04	0,03	0,25	0,15	0,04
0,06	0,05	0,12	0,10	0,03
0,08	0,01	0,04	0,03	0,02

Знайти: а) безумовні закони розподілу складових; б) умовний закон розподілу складової X при умові, що складова Y прийняла значення y_3=0,06; в) умовний закон розподілу складової Y при умові, що $X=x_1$=0,01

Розв'язання: а) Додавши ймовірності «по стовпцях», отримаємо закон розподілу складової X:

X	0,01	0,02	0,03	0,04
p	0,10	0,46	0,32	0,12

Додавши ймовірності «по рядках», одержимо закон розподілу складової Y:

Y	0,02	0,04	0,06	0,08
p	0,13	0,47	0,30	0,10

б) Умовні ймовірності можливих значень X при умові, що складова Y прийняла значення y_3 =0,06, обчислимо за формулою (4.1).

$$p(x_1/y_3) = \frac{p_{13}}{P(Y=y_3)} = \frac{0,05}{0,30} \approx 0,17$$

$$p(x_2/y_3) = \frac{p_{23}}{P(Y=y_3)} = \frac{0,12}{0,30} = 0,40$$

$$p(x_3/y_3) = \frac{p_{33}}{P(Y=y_3)} = \frac{0,10}{0,30} \approx 0,33$$

$$p(x_4/y_3) = \frac{p_{43}}{P(Y=y_3)} = \frac{0,03}{0,30} = 0,10$$

Запишемо шуканий умовний розподіл складової X:

X	0,01	0,02	0,03	0,04
$p(X/y_3)$	0,17	0,40	0,33	0,10

в) Умовні ймовірності можливих значень Y при умові, що складова X прийняла значення $x_1=0,01$ обчислимо за формулою (4.2).

$$p(y_1/x_1) = \frac{p_{11}}{P(X=x_1)} = \frac{0,01}{0,10} = 0,10;$$

$$p(y_2/x_1) = \frac{p_{12}}{P(X=x_1)} = \frac{0,03}{0,10} = 0,30;$$

$$p(y_3/x_1) = \frac{p_{13}}{P(X=x_1)} = \frac{0,05}{0,10} = 0,50;$$

$$p(y_4/x_1) = \frac{p_{14}}{P(X=x_1)} = \frac{0,01}{0,10} = 0,10;$$

Отже, шуканий умовний розподіл складової Y має вигляд:

Y	0,02	0,04	0,06	0,08
$p\left(Y/x_1\right)$	0,10	0,30	0,50	0,10

Якщо (X,Y)- система двох неперервних випадкових величин, то умовною густиною розподілу ймовірностей складової X при умові, що складова Y прийняла значення y, називається відношення густини розподілу системи (X,Y) до густини розподілу складової Y:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx} \tag{4.3}$$

Аналогічно визначається умовна густина розподілу ймовірностей складової Y:

$$\psi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy} \tag{4.4}$$

Формули (4.3) і (4.4) можна записати у вигляді:

$$f(x,y) = f_2(y)\,\varphi\left(x/y \right),$$

$$f(x,y) = f_1(x)\ \psi\left(y/x \right). \qquad (4.5)$$

Отже, густина розподілу системи двох неперервних випадкових величин дорівнює добутку густини розподілу однієї із величин на умовну густину розподілу ймовірностей іншої величини, обчислену в припущенні, що перша величина прийняла задане значення.

Для незалежних випадкових величин X і Y умовні густини розподілу ймовірностей дорівнюють їх безумовним густинам, тобто

$$\varphi\left(x/y\right) = f_1\left(x\right) \quad ;\psi\left(y/x\right) = f_2\left(y\right) \qquad (4.6)$$

У цьому випадку із формул (4.5) одержуємо:

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y) \qquad (4.7)$$

тобто густина розподілу системи незалежних неперервних випадкових величин дорівнює добутку густин розподілу окремих величин, що входять у систему.

Приклад 4.2 Усередині квадрата, обмеженого прямими x=0, x=1, y=0, y=1, густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин f(x,y)=2-x-y. Поза цим квадратом f(x,y)=0. Знайти умовні закони розподілу величин, які входять у систему, і встановити, чи є ці випадкові величини залежними.

Розв'язання. За формулами (3.5), (3.6) знайдемо густину розподілу ймовірностей кожної складової:

$$f_1(x)=\int_0^1 (2-x-y)dy = \left(\left(2-x\right)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}-x;$$

Отже,

$$f_1\left(x\right) = \begin{cases} 0 & при \quad x<0; \\ \frac{3}{2}-x & при \quad 0\le x\le 1; \\ 0 & при \quad x>1; \end{cases}$$

Аналогічно отримаємо:

$$f_2\left(y\right) = \begin{cases} 0 & при \quad y<0; \\ \frac{3}{2}-y & при \quad 0\le y\le 1; \\ 0 & при \quad y>1; \end{cases}$$

Скориставшись формулами (4.3) та (4.4), одержимо:

$$\varphi\left(x/y \right) = \frac{2-x-y}{1,5-y},\left(0\le x\le 1;0\le y\le 1\right);$$

$$\psi\left(y/x \right) = \frac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x},\left(0\le x\le 1;0\le y\le 1\right).$$

Оскільки $\varphi(x/y)\neq f_1(x),\psi(y/x)\neq f_2(y)$, то випадкові величини X і Y залежні.

5.5. Умовне математичне сподівання

Важливою характеристикою умовного розподілу ймовірностей є умовне математичне сподівання.

Умовним математичним сподіванням M(Y/x) дискретної випадкової величини Y при X=x (x – певне можливе значення дискретної випадкової величини X) називається сума добутків можливих значень Y на їх умовні ймовірності:

$$M(Y/x)=\sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x), \tag{5.1}$$

де x – одне із можливих значень $x_1, x_2,\ldots,x_n$ випадкової величини X.

Для системи неперервних випадкових величин (X,Y) M(Y/x) визначається формулою:

$$M(Y/x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y/x)dy, \tag{5.2}$$

де $\psi(y/x)$- умовна густина розподілу ймовірностей випадкової величини Y при умові, що випадкова величина X прийняла значення x.

В обох випадках умовне математичне сподівання M(Y/x) є функцією від x:

$$M(Y/x)=f(x), \tag{5.3}$$

яка називається регресією Y на X.

Графік цієї функції називається лінією регресії Y на X.

Аналогічно визначається умовне математичне сподівання M(X/y). Якщо випадкові величини X і Y дискретні, то

$$M(X/y)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i/y), \tag{5.4}$$

де y – одне з можливих значень $y_{1,}y_2,\ldots,y_m$ випадкової величини Y.

Для системи випадкових неперервних величин (X,Y).

$$M(X/y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x/y)dx, \tag{5.5}$$

де $\varphi(x/y)$- умовна густина розподілу ймовірностей випадкової величини X при умові, що випадкова величина Y прийняла значення y.

Умовне математичне сподівання випадкової величини X є функцією від y:

$$M(X/y)=q(y) \tag{5.6}$$

Функція q(y) називається регресією X на Y, а її графік – лінією регресії X на Y.

Приклад 5.1. За законом розподілу системи двох випадкових величин, який розглядався у прикладі 4.1., знайти умовне математичне сподівання випадкової величини Y при умові, що $X=x_4=0,04$

Розв'язання. Застосуємо формулу (5.1).

$M(Y/x_4)=\sum_{j=1}^{4} y_j p(y_j/x_4)$

Обчислюємо умовні ймовірності $p(y_j/x_4)$, j = 1,2,3,4.

$p(y_1/x_4)=\dfrac{0,03}{0,12}=0,25;\quad p(y_2/x_4)=\dfrac{0,04}{0,12}\approx 0,33$

$p(y_3/x_4)=\dfrac{0,03}{0,12}=0,25\quad p(y_4/x_4)=\dfrac{0,02}{0,12}\approx 0,17$

Отже, $M(Y/x_4) = 0,02\cdot 0,25+0,04\cdot 0,33+0,06\cdot 0,25+0,08\cdot 0,17\approx 0,047$

5.6. Числові характеристики системи двох випадкових величин

Якщо (X,Y) - система двох дискретних випадкових величин, закон розподілу якої має вигляд (1.1), то математичне сподівання для кожної складової системи визначається так:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij};\quad M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} \tag{6.1}$$

Математичне сподівання для складових системи двох неперервних випадкових величин визначається за формулами:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy; \tag{6.2}$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy;$$

де f(x,y)- густина розподілу ймовірностей цієї системи.

Дисперсія кожної складової системи двох випадкових величин обчислюється за такими формулами:

а) у випадку дискретних випадкових величин

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij}-\left[M(X)\right]^2; \tag{6.3}$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij}-\left[M(Y)\right]^2;$$

б) у випадку неперервних випадкових величин

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy-\left[M(X)\right]^2; \tag{6.4}$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy-\left[M(Y)\right]^2;$$

Кореляційним моментом (моментом зв’язку) системи двох випадкових величин (X,Y) називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин від своїх математичних сподівань

$$K_{xy}=M\left[(X-M(X))(Y-M(Y))\right] \tag{6.5}$$

Легко переконатися,що кореляційний момент можна записати у вигляді:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y)$$

Для обчислення кореляційного моменту дискретних випадкових величин користуються формулами:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - M\left(X\right)\right)\left(y_j - M\left(Y\right)\right)p_{ij}; \qquad (6.6)$$

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y),$$

а для неперервних випадкових величин – формулами :

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M\left(X\right)\right)\left(y - M\left(Y\right)\right)f(x,y)dxdy; \qquad (6.7)$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y).$$

Коефіцієнтом кореляції r_{xy} випадкових величин X і Y називається відношення кореляційного моменту K_{xy} до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (6.8)$$

Коефіцієнт кореляції r_{xy} має такі властивості:

а) якщо X і Y –незалежні випадкові величини, то $K_{xy}=0$ і $r_{xy}=0$

б) абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці: $\left|r_{xy}\right| \le 1$;

в) якщо випадкові величини X і Y зв’язані лінійною функціональною залежністю

Y=aX+b (a,b- дійсні числа), то $\left|r_{xy}\right| = 1$, причому $r_{xy}=1$ при a>0 і $r_{xy}= -1$ при a<0.

Коефіцієнт кореляції r_{xy} характеризує силу лінійного зв’язку між випадковими величинами X і Y: чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до одиниці, тим тісніший лінійний зв’язок; чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до нуля, тим лінійний зв’язок слабший.

Дві випадкові величини X і Y називаються корельованими, якщо їх коефіцієнт кореляції $r_{xy} \neq 0$; X і Y називаються некорельованими величинами, якщо $r_{xy}=0$

Дві корельовані випадкові величини є також і залежними, але із залежності випадкових величин ще не випливає їх корельованість.

Із незалежності двох випадкових величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості випадкових величин не можна зробити висновок про їх незалежність.

Приклад 6.1. Густина розподілу ймовірностей системи неперервних випадкових величин (X,Y) (координат амплітуд коливань кузова автомобіля при русі) f(x,y)=0,5sin(x+y) в квадраті $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; поза цим квадратом f(x,y)=0. Знайти математичні сподівання та дисперсії складових системи.

Розв’язання. Застосувавши формули (6.2), обчислимо M(X) та M(Y).

$$M(X)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\cos x)dx=$$

$$=0,5(x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)d\,x\Big)=$$

$$=0,5(\frac{\pi}{2}+(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/2})=\frac{\pi}{4}\approx 0,79.$$

Для обчислення визначеного інтеграла ми використали метод інтегрування за частинами.

$$M(Y)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dx=\frac{\pi}{4}\approx 0,79.$$

Дисперсії складових X і Y знайдемо за формулами (6.4)

$$D(X)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy-\frac{\pi^2}{16}=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin x+\cos x)dx-\frac{\pi^2}{16}.$$

Інтегруючи двічі за частинами, одержимо:

$$D(X)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\approx 0,19;$$

$$D(Y)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dx=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\approx 0,19.$$

Приклад 6.2. Система двох неперервних випадкових величин розподілена рівномірно в крузі $x^2+y^2\le r^2$. Довести, що X і Y – залежні випадкові величини, але некорельовані.

Розв'язання. Оскільки система (X,Y) розподілена рівномірно в крузі $x^2+y^2\le r^2$, то

$$f(x,y)=\begin{cases} C & при \quad x^2+y^2\le r^2 \\ 0 & при \quad x^2+y^2>r^2 \end{cases}$$

Скориставшись властивістю густини розподілу ймовірностей системи, одержимо:

$$C=\frac{1}{\pi r^2}$$

Знайдемо густину розподілу кожної складової за формулами (3.5) і (3.6)

$$f_1(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2};\quad -r\le x\le r$$

Аналогічно отримаємо $f_2(y)=\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2};(-r\le y\le r)$

Умовну густину розподілу ймовірностей складової X $\varphi(x/y)$ знайдемо за формулою (4.3).

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}};(-r<y<r)$$

Скориставшись співвідношенням (4.4), отримаємо:

$$\psi(y/x)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}};(-r<x<r).$$

Отже випадкові величини X і Y залежні.
Обчислимо кореляційний момент системи (X,Y) за другою із формул (6.7).

$$K_{xy}=\iint_D xy\frac{1}{\pi r^2}dxdy-M(X)M(Y),\text{ де область D – Круг } x^2+y^2\le r^2.$$

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_D xydxdy=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}xdx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}ydy=0$$

M(X)=0, оскільки графік густини розподілу $f_1(x)$ величини X симетричний відносно прямої x=0.

Аналогічно одержимо, що M(Y)=0

Отже, кореляційний момент $K_{xy}=0$ і коефіцієнт кореляції $r_{xy}=0$, тобто випадкові величини X і Y некорельовані.

5.7. Нормальний закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин

Розподіл ймовірностей системи (X,Y) називається нормальним, якщо густина розподілу має вигляд:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}, \tag{7.1}$$

де *a,b*- математичні сподівання випадкових величин *X* і *Y*; σ_x,σ_y - їх середні квадратичні відхилення; r_{xy} - коефіцієнт кореляції величин *X* і *Y*.

Можна довести, що якщо система (X,Y) розподілена нормально з параметрами $a,b,\sigma_x,\sigma_y,r_{xy}$,то її складові також розподілені за нормальним законом з параметрами, рівними відповідно a,σ_x та b,σ_y.

Якщо складові *X* і *Y* некорельовані, тобто r_{xy} =0, то

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}\right]}=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)f_2(y); \tag{7.2}$$

де f_1(x) і f_2(y) густини розподілу ймовірностей випадкових величин *X* і *Y*.

Отже, якщо складові нормально розподіленої системи випадкових величин (*X,Y*) некорельовані, то густина розподілу системи дорівнює добутку густин розподілу складових, а це означає, що випадкові величини *X* і *Y* - незалежні. Таким чином, для нормально розподілених складових системи двох випадкових величин поняття незалежності та некорельованості еквівалентні.

Приклад 7.1. Координати (*X, Y*) випадкової точки на площині розподілені за нормальним законом з густиною

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Визначити ймовірність того, що випадкова точка попаде в область, обмежену еліпсом з півосями $\lambda\sigma_x$ і $\lambda\sigma_y$, якщо осі симетрії еліпса співпадають з координатними осями *О*х та *О*у.

Розв'язання. Рівняння цього еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{\lambda^2{\sigma_x}^2}+\frac{y^2}{\lambda^2\sigma_y^2}=1.$$

Область, обмежену даним еліпсом, позначимо через E_λ. Застосувавши формулу (3.3), отримаємо:

$$P((X,Y)\in E_\lambda)=\iint\limits_{E_\lambda}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint\limits_{E_\lambda}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}dxdy \tag{7.3}$$

Перейдемо в інтегралі (7.3) до узагальнених полярних координат:

$$x=\sigma_x\rho\cos\varphi, y=\sigma_y\rho\sin\varphi. \tag{7.4}$$

Якобіан перетворення (7.4)

$$J(\rho,\varphi)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sigma_x\cos\varphi-\sigma_x\rho\sin\varphi\\ \sigma_y\sin\varphi\quad\sigma_y\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\sigma_x\sigma_y\rho. \tag{7.5}$$

Виконавши заміну змінних, одержимо

$$P((X,Y)\in E_\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\lambda}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho=1-e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Якщо, наприклад, $\lambda=2$, тобто еліпс має півосі $2\sigma_x, 2\sigma_y$, то

$$P((X,Y)\in E_\lambda)=1-e^{-2}\approx 0,865.$$

6. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

6.1. Вибірка. Емпірична функція розподілу. Полігон та гістограма

Нехай для вивчення кількісної (дискретної або неперервної) ознаки *X* із генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму *n*. Значення x_i ознаки *X*, які спостерігалися у вибірці, називають варіантами; послідовність варіант, записаних в порядку зростання, називають варіаційним рядом. Якщо вибірка об'єму n містить k різних значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причому значення x_i трапляється n_i разів ($i=1,2,\ldots,k$), то число n_i називається частотою варіанти x_i, а відношення $w_i = \frac{n_i}{n}$ називається відносною частотою варіанти x_i. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$; $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Статистичним розподілом вибірки у випадку дискретної ознаки X називають перелік варіант і відповідних частот або відносних частот.

Статистичним розподілом вибірки у випадку неперервної ознаки X називають перелік інтервалів і відповідних частот або відносних частот (за частоту, що відповідає інтервалу, приймають суму частот варіант, які попали в цей інтервал).

Емпіричною функцією розподілу називається функція $F^*(x)$, яка для кожного значення x визначає відносну частоту події X < x:

$$F^*(x) = n_x / n, \tag{1.1}$$

де n_x – число варіант, менших від x; n – об'єм вибірки. Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ є оцінкою для невідомої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

Функція $F^*(x)$ має такі властивості:

а) значення емпіричної функції належать відрізку [0,1];

б) $F^*(x)$ – неспадна функція;

в) якщо x_1 – найменша, а $x_к$ – найбільша варіанти, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

Приклад 1.1. Знайти емпіричну фуркцію $F^*(x)$ за даним розподілом вибірки. Побудувати графік цієї функції.

x_i	1	3	4	5
n_i	6	8	6	5

Розв'язання: Об'єм вибірки $n = 6 + 8 + 6 + 5 = 25$. Найменша варіанта 1, тому $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$. Значення $X < 3$, а саме $x_1 = 1$, спостерігалось 6 разів. Отже, $F^*(x) = 6 / 25 = 0{,}24$ при $1 < x \le 3$.

Якщо $3 < x \le 4$, то $F^*(x) = 14 / 25 = 0{,}56$, оскільки значення $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$ спостерігались 6 + 8 = 14 разів. Якщо $4 < x \le 5$, то $F^*(x) = 20 / 25 = 0{,}80$, оскільки в цьому випадку $n_x = 6 + 8 + 6 = 20$. Оскільки найбільша варіанта дорівнює 5, то $F^*(x) = 1$ при $x > 5$. Таким чином:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ 0,24 & при \quad 1<x\le 3\\ 0,56 & при \quad 3<x\le 4\\ 0,80 & при \quad 4<x\le 5\\ 1 & при \quad x>5\end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рис.7.

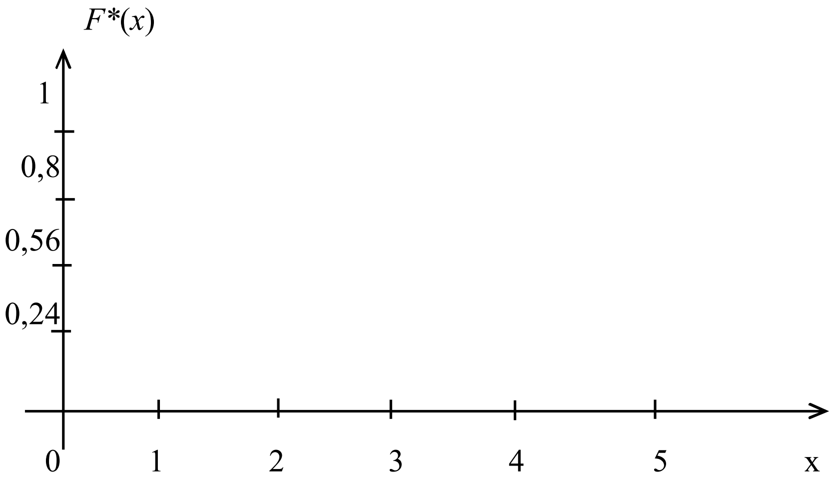


Рис. 7

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), де x_i – варіанти вибірки; n_i – відповідні частоти (i = 1, 2,…,k).

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_1, w_1), (x_2, w_2),…, (x_k, w_k), де w_i – відносні частоти, що відповідають варіантам x_i (i = 1, 2,…,k).

Приклад 1.2. В результаті перевірки партії деталей одержані такі результати за сортами: 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 3 ,1, 1,1, 2,1,1,4,2,2,1,1. Скласти статичний розподіл вибірки, побудувати полігон відносних частот.

Розв'язання. Розмістимо варіанти в порядку зростання і обчислимо частоти, що відповідають даним варіантам. Отримаємо:

x_i	1	2	3	4
n_i	14	7	2	2

Знайдемо відносні частоти. Оскільки об'єм вибірки n=14+7+2+2=25, то $w_1=\frac{14}{25}=0,56;\ w_2=\frac{7}{25}=0,28;\ w_3=\frac{2}{25}=0,08;\ w_4=\frac{2}{25}=0,08.$

Побудувавши точки $M_1(1; 0,56)$, $M_2(2; 0,28)$, $M_3(3; 0,08)$, $M_4(4;0,08)$ і з'єднавши їх відрізками прямих, одержимо шуканий полігон відносних частот (рис.8).

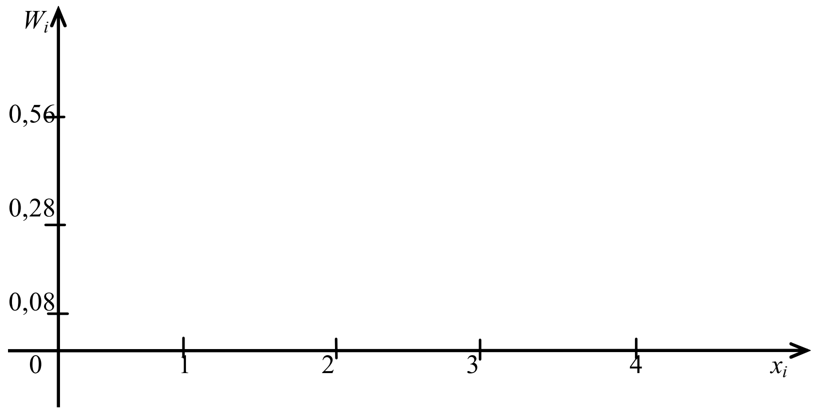


Рис. 8

У випадку неперервної ознаки X інтервал, в якому містяться всі варіанти, ділять на часткові інтервали з довжиною h і знаходять n_i – суму частот варіант, що попали в і-ий інтервал.

Гістограмою частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали з довжиною h, а висоти дорівнюють густині частоти $\frac{n_i}{h}$ (i=1, 2, …, k).

Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об’єму вибірки n.

Гістограмою відносних частот називають фігуру, яка складаться з прямокутників, основами яких є часткові інтервали з довжиною h, а висоти дорівнюють густині відносної частоти $\frac{w_i}{h}$. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі усіх відносних частот, тобто одиниці.

Приклад 1.3. Із литва, що випускає завод, зроблена вибірка 50 штук литих деталей, зважування яких дало наступні результати (в кг):

99,2	101,5	99,5	102,2	99,7	101,1	100,2	98,8	99,3	100,4
100,9	100,5	99,8	102,1	101,7	100,8	101,1	99,9	99,6	99,1
100,3	102,4	98,9	98,8	100,4	99,7	97,6	101,2	99,4	98,2
100,1	98,3	100,7	101,2	97,2	99,9	101,3	100,6	100,7	101,6
102,7	98,6	99,6	99,7	98,2	100,7	101,2	99,6	100,3	99,8

Скласти статистичний розподіл вибірки та побудувати гістограму відносних частот.

Розв’язання. Найменша варіанта даної вибірки дорівнює 97,2, а найбільша 102,7. Інтервал (97,2; 102,2) поділимо, наприклад, на 5 часткових інтервалів, Довжина кожного часткового інтервала $h = \frac{102,7 - 97,2}{5} = 1,1$. Обчислимо суму частот варіант, які попали в кожний частковий інтервал, і складемо таблицю:

Номер інтервала	1	2	3	4	5
Часткові інтервал (x_i,x_{i+1})	(97,2; 98,3)	(98,3; 99,4)	(99,4; 100,5)	(100,5; 101,6)	(101,6; 102,7)
Сума частот варіант,які попали в частковий інтервал n_i	4	8	18	14	6

Обчислимо відносні частоти. Оскільки об'єм вибірки n=50, то $w_1 = \frac{4}{50} = 0,08$; $w_2 = \frac{8}{50} = 0,16$; $w_3 = \frac{18}{50} = 0,36$; $w_4 = \frac{14}{50} = 0,28$; $w_5 = \frac{6}{50} = 0,12$.

Знайдемо густину відносних частот :

$\frac{w_1}{h} = 0,073$; $\frac{w_2}{h} = 0,146$; $\frac{w_3}{h} = 0,327$; $\frac{w_4}{h} = 0,254$; $\frac{w_5}{h} = 0,109$.

Побудуємо на осі абсцис часткові інтервали. Проведемо над кожним інтервалом відрізок, який паралельний до осі абсцис і знаходиться від неї на відстані, що дорівнює відповідній густині відносної частоти. Шукана гістограма відносних частот зображена на рис. 9

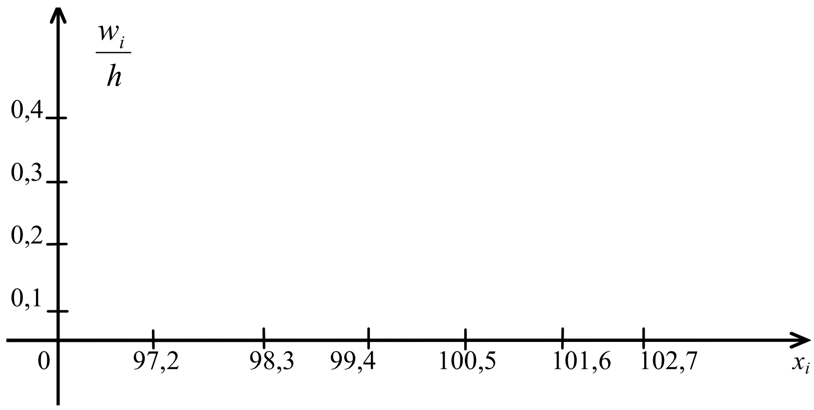


Рис. 9

6.2. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу

Нехай потрібно вивчити кількісну ознаку X генеральної сукупності. Припустимо, що з теоретичних міркувань вдалось встановити, який розподіл має ця ознака. Тому виникає завдання оцінити параметри, які визначають цей розподіл.

Статистичною оцінкою θ^* невідомого параметра θ теоретичного розподілу називають функцію від спостережуваних випадкових величин вибірки. Точковою називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом

$\theta^*=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, де $x_1,x_2,\dots,x_n$-значення ознаки X, що спостерігались у вибірці.

Незміщеною називають точкову оцінку, математичне сподівання якої при будь-якому об'ємі вибірки дорівнює параметру, який оцінюється. Зміщеною називають точкову оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює параметру, що оцінюється.

Незміщеною оцінкою генеральної середньої (математичного сподівання випадкової величини X) є вибіркова середня

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \tag{2.1}$$

де $x_i(i=1,2,\dots,к)$-варіанти вибірки; $n_i(i=1,2,\dots,к)$-відповідні частоти;

$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ - об'єм вибірки.

Зміщеною оцінкою генеральної дисперсії (дисперсії випадкової величини X) є вибіркова дисперсія

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}, \tag{2.2}$$

оскільки $M(D_в)=\dfrac{n-1}{n}D\left(X\right)$

Для обчислення $D_в$ зручною є формула

$$D_B = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}\right)^2 \tag{2.3}$$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \tag{2.4}$$

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії є виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n-1} \tag{2.5}$$

Виправленим середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із виправленої вибіркової дисперсії.

Порівнюючи формули (2.2) і (2.5), бачимо, що вони відрізняються тільки знаменниками. Очевидно, що при досить великих значеннях n вибіркова і виправлена дисперсії незначно відрізняються одна від одної.

Зауваження 1. Якщо варіанти x_i- великі числа, то для спрощення розрахунку доцільно перейти до умовних: $u_i=x_i-C$ (за C вигідно прийняти варіанту, яка розміщена приблизно у середині варіаційного ряду). Тоді

$$\overline{x_B} = \overline{u_B} + C = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} + C \quad ;$$

$$D_B\left(X\right) = D_B\left(U\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n}\right]^2 \qquad (2.6)$$

Зауваження 2. У випадку рівновіддалених варіант для спрощення розрахунку доцільно перейти до умовних варіант $u_i=(x_i-C)/h$,де h- крок, тобто різниця між будь-якими двома сусідніми початковими варіантами; C- хибний нуль (C вибирається так само, як і в попередньому випадку). Тоді

$$\overline{x_B} = h\overline{u_B} + C; D_B\left(X\right) = h^2 D_B\left(U\right) \qquad (2.7)$$

Приклад 2.1. Із генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму n=10;

x_i	6	7	9	10
n_i	2	3	4	1

Знайти: а) вибіркову середню $\overline{x_B}$; б) вибіркову дисперсію $D_в$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B; в) виправлену вибіркову дисперсію s^2 та виправлене середнє квадратичне відхилення s.

Розв'язання: а) Скориставшись формулою (2.1), отримаємо:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{10}\left(2\cdot 6 + 3\cdot 7 + 4\cdot 9 + 1\cdot 10\right) = 7,9$$

б) Для обчислення вибіркової дисперсії $D_в$ використаємо формулу (2.3):

$$D_B = \frac{1}{10}\left(2\cdot 36 + 3\cdot 49 + 4\cdot 81 + 1\cdot 100\right) - 7,9^2 = 64,3 - 62,41 = 1,89;$$

$$\sigma_B = \sqrt{1,89} \approx 1,37$$

в) Обчислимо виправлену вибіркову дисперсію:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{10}{9}\cdot 1,89 = 2,10;$$

$$s = \sqrt{2,10} = 1,45$$

Приклад 2.2. Перевірено 100 приладів на термін безвідмовної роботи. Отримано такі результати:

Термін безвідмовної роботи (год.)	300-304	304-308	308-312	312-316	316-320	320-324	324-328	328-332	332-336	336-340
Кількість приладів n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Обчислити середній термін $\overline{x_B}$ безвідмовної роботи приладів, а також вибіркову дисперсію $D_в$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$.

Розв'язання. Знайдемо середини даних інтервалів і приймемо їх за варіанти. Одержимо такий розподіл вибірки:

x_i	302	306	310	314	318	322	326	330	334	338
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Оскільки варіанти рівновіддалені, то перейдемо до умовних варіант u_i. Нехай C=318 (варіанта 318 розміщена приблизно у середині варіаційного ряду). Згідно з умовою задачі h=4, об'єм вибірки n=100. Умовні варіанти обчислимо за формулою

$$u_i = \frac{x_i - 318}{4}$$

Для спрощення обчислень складемо розрахункову таблицю

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
302	6	-4	-24	96	54
306	7	-3	-21	63	28
310	12	-2	-24	48	12
314	15	-1	-15	15	0
318	30	0	0	0	30
322	10	1	10	10	40
326	8	2	16	32	72
330	6	3	18	54	96
334	4	4	16	64	100
338	2	5	10	50	72
	n=100		$\sum n_i u_i=-14$	$\sum n_i u^2{}_i=432$	$\sum n_i(u_i+1)^2=504$

Для контролю обчислень скористаємось тотожністю :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\left(u_i+1\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} n_i u_i + n \qquad (2.8)$$

В даному випадку $\sum_{i=1}^{10} n_i\left(u_i+1\right)^2 = 504,$

$$\sum_{i=1}^{10} n_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{10} n_i u_i + n = 432 - 28 + 100 = 504$$

Отже, тотожність (2.8) справджується.

Обчислимо $\overline{u_B}$ та $D_B(U)$

$$\overline{u_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i u_i = -0{,}14$$

$$D_B(U) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i u_i^2 - \left(\overline{u_B}\right)^2 = 4,32 - 0,0196 \approx 4,30.$$

Користуючись формулами (2.7), знаходимо

$\overline{x_B} = -0,14 \cdot 4 + 318 = 318 - 0,56 = 317,44$

$D_B(X) = 4,30 \cdot 16 = 68,80$

$\sigma_B(X) = \sqrt{68,80} \approx 8,29.$

6.3. Метод довірчих інтервалів для оцінки невідомих параметрів розподілу

Інтервальною називають статистичну оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервала, що покриває невідомий параметр.

Нехай за даним розподілом вибірки знайдена незміщена оцінка Θ^* невідомого параметра Θ.

Інтегрвальна оцінка має вигляд:

$$\mathrm{P}\left(\Theta^* - \varepsilon < \Theta < \Theta^* + \varepsilon\right) = \gamma \qquad (3.1)$$

Додатне число ε характеризує точність оцінки. Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки Θ по Θ^* називають ймовірність γ, з якою здійснюється нерівність $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \varepsilon$ або рівносильна подвійна нерівність $\Theta^* - \varepsilon < \Theta < \Theta^* + \varepsilon$. Найчастіше задають надійність, яка дорівнює 0,95; 0,99; 0,999.

Довірчим називають інтервал $\left(\Theta^* - \varepsilon, \Theta^* + \varepsilon\right)$, який покриває невідомий параметр Θ із заданою надійнйстю γ.

4.3.1. Інтервальною оцінкою з надійністю γ математичного сподівання a інтервальною оцінкоюівання нормально розподіленої ознаки X за вибірковою середньою $\overline{x_B}$ при відомому генеральному середньому квадратичному відхиленні σ є довірчий інтервал

$$\overline{x_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.2)$$

де $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ - точність оцінки ; n – об'єм вибірки ;

t - значення аргументу функції Лапласа

$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, при якому $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Приклад 3.1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ=0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X – розміру зовнішнього діаметра карданних валів, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$ мм, вибіркова середня $\overline{x_B} = 41,35$ та обєм вибірки n=16.

Розв'язання. Потрібно знайти довірчий інтервал (3.2). Всі величини, крім t, відомі. Із співвідношення $\Phi(t)$ = 0,99 / 2 = 0,495 знайдемо значення t. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо t = 2,58. Підставивши $t = 0{,}58$; $\overline{x_B} = 41{,}35$; σ = 2; n = 16 у (3.2), отримаємо довірчий інтервал 40,06 < a < 42,64.

Отже, інтервал (40,06; 42,64) покриває невідоме математичне сподівання a із надійністю γ =0,99.

Приклад 3.2. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності за вибірковою середньою $\varepsilon = 0{,}2$, якщо відоме середнє квадратичне відхилення ознаки X $\sigma = 1{,}3$.

Розв'язання. Точність оцінки з надійністю γ математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X за вибірковою середньою $\overline{x_B}$ визначається за формулою $\varepsilon = t\sigma / \sqrt{n}$. Звідси знаходимо, що $n = t^2\sigma^2 / \varepsilon^2$. За умовою задачі $\gamma = 0{,}95$, тому $\Phi(t) = (1/2)\cdot 0{,}95 = 0{,}475$. За таблицею значень функції Лапласа знайдемо t = 1,96. Підставивши t = 1,96; $\sigma = 1{,}3; \varepsilon = 0{,}2$ в дану формулу, отримаємо шуканий об'єм вибірки n =163.

4.3.2. Якщо середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності невідоме, то інтервальною оцінкою з надійністю γ математичного сподівання a ознаки X є довірчий інтервал:

$$\overline{x_B} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3.3}$$

де s – виправлене середнє квадратичне відхилення; n – об'єм вибірки; t_γ знаходимо за таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ за даними γ та n.

Зауваження. Для знаходження довірчого інтервала (3.3) використовують той факт, що випадкова величина $T = \dfrac{\left(\overline{X_B} - a\right)\sqrt{n}}{S}$, де $\overline{X_B}$ – вибіркова середня, S – виправлене середнє квадратичне відхилення, має розподіл Стьюдента. Густина цього розподілу

$$S(t,n) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{3.4}$$

де $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} U^{x-1}e^{-U}dU$ гамма-функція.

При необмеженому зростанні об'єму вибірки n розподіл Стьюдента прямує до нормального розподілу. Тому при досить великих n можна замість розподілу Стьюдента користуватися нормальним розподілом.

Приклад 3.3. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ =0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі вибіркова середня $\overline{x_B} = 48{,}50$, виправлене середнє квадратичне відхилення S=4,00 та об'єм вибірки n = 25.

Розв'язання. Потрібно знайти довірчий інтервал (3.3). Всі величини, крім t_γ, відомі. За таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ для γ=0,99 і n = 25 знаходимо t_γ=2,797. Підставивши $\overline{x_B} = 48{,}50$, s = 4,00; n = 25; t_γ = 2,797 у формулу (3.3), отримаємо шуканий довірчий інтервал 46,26 < a < 50,74.

4.3.3. Інтервальною оцінкою з надійністю γ середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності за виправленим середнім квадратичним відхиленням s є довірчий інтервал

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \ (при \ \ q < 1) \tag{3.5}$$

$$0 < \sigma < S(1+q) \ \ (при \ \ q > 1) \tag{3.6}$$

де q знаходять за таблицею значень q=$q(\gamma, n)$.

Приклад 3.4. Зроблено n=20 вимірювань одним приладом (без систематичних помилок) деякої фізичної величини. Виправлене середнє квадратичне відхилення s випадкових помилок вимірювання виявилось рівним 0,70. Знайти точність приладу з надійністю 0,95. Припускається, що результати вимірювань розподілені нормально.

Розв'язання. Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювань. Тому задача зводиться до знаходження довірчого інтервала, який покриває σ із заданою надійністю γ=0,95. За таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ для γ=0,95 і n=20 знаїдемо q=0,37. Оскільки q<1, то довірчий інтервал має вигляд (3.5). Підставивши s=0,70 та q=0,37 в (3.5), отримаємо шуканий довірчий інтервал 0,441<σ<0,959.

6.4. Елементи теорії кореляції

Статистична залежність, при якій зміна однієї випадкової величини викликає зміну середнього значення іншої випадкової величи, називається кореляційною. Одним із завдань математичної статистики є дослідження кореляційної залежності між випадковими величинами.

Нехай розглядається система двох кількісних ознак (X, $У$). Умовною середньою $\overline{y_x}$ називається середнє арифметичне всіх значень ознаки $У$, які відповідають значенню X=x.

Наприклад, якщо при x_1=4 ознака X прийняла значення y_1=2; y_2=5; y_3=7; y_4=10, то умовна середня $\overline{y_{x_1}}$=(2+5+7+10)/4=6

Аналогічно визначається умовна середня $\overline{x_y}$. Умовна середня $\overline{y_x}$ є функцією від x , тобто $\overline{y_x}$=$f^*(x)$. Це рівняння називають вибірковим рівнянням регресії $У$ на X; функцію $f^*(x)$ називають вибірковою регресією $У$ на X, а її графік - вибірковою лінією регресії $У$ на X.

Аналогічно рівняння $\overline{x_y}$=$q^*(y)$ називають вибірковим рівнянням регресії X на $У$; функцію $q^*(y)$ називають вибірковою регресією X на $У$, а її графік - вибірковою лінією регресії X на $У$.

Якщо обидві лінії регресії *У* на *Х* і *Х* на *У* є прямими, то кореляція називається лінійною.

6.4.1. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за незгрупованими даними

Нехай в результаті n незалежних дослідів отримані n пар значень (x_1 ,y_1), (x_2 ,y_2), ... , (x_n , y_n). Знайдемо за цими даними спостережень вибіркове рівняння прямої лінії регресії *У* на *Х*. Оскільки різні значення x_i ознаки *Х* і відповідні значення y_i ознаки *У* спостерігались по одному разу, то нема потреби користуватися поняттям умовної середньої. Тому шукане рівняння можна записати у вигляді

$$У= \rho_{yx} x + b \tag{4.1}$$

Кутовий коефіцієнт вибіркової прямої лінії регресії *У* на *Х* називається вибірковим коефіцієнтом регресії *У* на *Х* і позначається ρ_{yx}. Користуючись методом найменших квадратів, одержимо систему лінійних рівнянь для визначення параметрів ρ_{yx} і *b*:

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho_{yx}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \tag{4.2}$$

Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії
Х на *У*.

Приклад 4.1. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії *У* на *Х* за даними *n* = 6 спостережень.

x_i	1,5	2,0	3,0	3,5	4,5	5,0
y_i	1,3	2,0	2,1	2,7	2,6	3,3

Розв'язання . Складемо розрахункову таблицю.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,5	1,3	2,25	1,95
2,0	2,0	4,00	4,00
3,0	2,1	9,00	6,30
3,5	2,7	12,25	9,45
4,5	2,6	20,25	11,70
5,0	3,3	25,00	16,50
$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i = 19,5$	$\sum\limits_{i=1}^{6} y_i = 14,0$	$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^2 = 72,75$	$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i y_i = 49,90$

Для визначення параметрів ρ_{yx} і *b* одержуємо систему рівнянь,

$$72,75\ \rho + 19,5b = 49,90$$

$$19{,}5\ \rho\ + 6b = 14$$

Розв'язавши цю систему отримаємо:

$$b \approx 0{,}81 \qquad\qquad \rho_{yx} \approx 0{,}47$$

Запишемо шукане рівняння прямої лінії регресії:

$$У = 0{,}47x + 0{,}81$$

Зробимо рисунок, на якому в декартовій прямокутній системі координат побудуємо експериментальні точки і пряму лінію регресії:

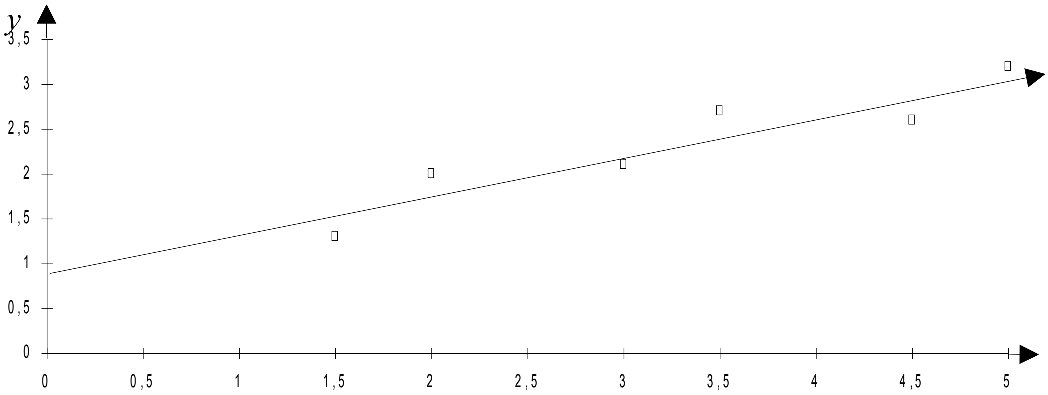


Рис. 10

6.4.2. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за згрупованими даними

При великій кількості спостережень одне і те ж значення x може трапитися n_x разів, одне і те ж значення y - n_y разів, одна і та ж пара значень (x,y) може спостерігатися n_{xy} разів. Тому дані спостережень групують, тобто підраховують частоти n_x, n_y, n_{xy}. Всі згруповані дані записують у вигляді таблиці, яку називають кореляційною (див. приклад 4.2).

Позначимо $\overline{x}$, $\overline{y}$ - вибіркові середні ознак X і $У$, σ_x^*, σ_y^* - вибіркові середні квадратичні відхилення цих ознак; n -об'єм вибірки. Введемо також наступне позначення:

$$r_B = \rho_{yx}\frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*} \ . \tag{4.3}$$

r_B називають вибірковим коефіцієнтом кореляції.

Оскільки $\sum x_i = n\overline{x}, \sum y_i = n\overline{y}, \sum x_i^2 = n\overline{x^2}, \sum x_i y_i = n_{xy}xy$,

то систему (4.2) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho_{yx} + n\overline{x}b = \sum n_{xy}xy \\ \overline{x}\rho_{yx} + b = \overline{y} \end{cases} \tag{4.4}$$

З другого рівняння цієї системи отримаємо

$$b = \overline{y} - \overline{x}\rho_{yx} \tag{4.5}$$

Підставивши (4.5) в перше рівняння системи (4.4), знайдемо:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^{*2}} \tag{4.6}$$

На підставі формули (4.3) одержимо:

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^*\sigma_y^*} \tag{4.7}$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції r_B є оцінкою коефіцієнта кореляції r_{xy} генеральної сукупності і тому використовується для вимірювання тісноти лінійного кореляційного зв'язку між ознаками *X* і *У*. Якщо вибірка репрезентативна і має досить великий об'єм, то висновок про тісноту лінійного зв'язку між ознаками, одержаний за даними вибірки, в певній мірі може бути поширений і на генеральну сукупність.

Враховуючи формули (4.3) і (4.5), вибіркове рівняння прямої лінії регресії У на Х (4.1) можна представити у вигляді:

$$\frac{\overline{y}_x - \overline{y}}{\sigma_y^*} = r_B\frac{x - \overline{x}}{\sigma_x^*} \tag{4.8}$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Х на У має вигляд

$$\frac{\overline{x}_y - \overline{x}}{\sigma_x^*} = r_B\frac{y - \overline{y}}{\sigma_y^*} \tag{4.9}$$

Якщо дані спостережень над ознаками *X* і *У* задані у вигляді кореляційної таблиці з рівновіддаленими варіантами, то доцільно перейти до умовних варіант

$$u_i = (x_i - C_1)/h_1\ ; \quad v_j = (y_j - C_2)/h_2; \tag{4.10}$$

де C_1 - хибний нуль варіант ознаки *X*;

h_1 - крок, тобто різниця між двома сусідніми варіантами *X*;

C_2 - хибний нуль варіант ознаки *У*;

h_2 - крок варіант *У*;

У цьому випадку вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} \tag{4.11}$$

де $\quad \overline{v} = \left(\sum n_v v\right)\Big/n;\ \overline{u} = \left(\sum n_u u\right)\Big/n;\ \sigma_u = \sqrt{\overline{u}^2 - \left(\overline{u}\right)^2}\ ;$ (4.12)

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v}^2 - \left(\overline{v}\right)^2};\overline{u}^2 = \left(\sum n_u u^2\right)\Big/n;\overline{v}^2 = \left(\sum n_v v^2\right)\Big/n.$$

Знаючи $\overline{u},\overline{v},\sigma_u,\sigma_v$ можнавизначити $\overline{x},\overline{y},\sigma_x^*,\sigma_y^*$.

$$\overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1;\ \overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2;\ \sigma_x^* = \sigma_u h_1;\ \sigma_y^* = \sigma_v h_2. \tag{4.13}$$

Приклад 4.2. Задана кореляційна таблиця відхилень в міліметрах від номінального розміру штамповок кілець підшипників по діаметру під кутом 90° до площини роз'єднання штампа (*X*) і під кутом 45° до тієї ж площини (*У*). Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії *У* на *X* та *X* на *У* за даними цієї кореляційної таблиці. Зробити рисунок, на якому в декартовій прямокутній системі координат побудувати умовні середні, обчислені за кореляційною таблицею, і прямі лінії регресії *У* на *X* та *X* на *У*.

$Y \backslash X$	(0,00; 0,10)	(0,10; 0,20)	(0,20; 0,30)	(0,30; 0,40)	n_y
(0,00; 0,12)	2	-	-	-	2
(0,12; 0,24)	5	4	1	-	10
(0,24; 0,36)	3	8	6	3	20
(0,36; 0,48)	-	3	6	6	15
(0,48; 0,60)	-	-	2	1	3
n_x	10	15	15	10	n=50

Розв'язання. Знайдемо середини даних інтервалів.
Для ознаки *X* отримаємо такі значення: 0,05; 0,15; 0,25; 0,35; для ознаки *У* - наступні значення: 0,06; 0,18; 0,30; 0,42; 0,54.

Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах, вибравши хибними нулями C_1=0,15 і C_2=0,30. В даному прикладі h_1=0,10; h_2=0,12.

$V \backslash U$	- 1	0	1	2	n_v
-2	2	-	-	-	2
-1	5	4	1	-	10
0	3	8	6	3	20
1	-	3	6	6	15
2	-	-	2	1	3
n_u	10	15	15	10	n=50

За формулами (4.12) одержуємо:

$\overline{u}$=(-10+15+20)/50=0,50

$\overline{v}$=(-4-10+15+6)/50=0,14

$\overline{u^2}$=(10+15+40)/50=1,30

$\overline{v^2}$=(8+10+15+12)/50=0,90

$\sigma_u = \sqrt{1,30-1,25} = \sqrt{1,05} \approx 1,02$

$\sigma_v = \sqrt{0,90-0,0196} = \sqrt{0,8804} \approx 0,94.$

Обчислюємо також

$$\sum n_{uv} \cdot uv = -1(-2\cdot 2 - 1\cdot 5) + 1(-1\cdot 1 + 1\cdot 6 + 2\cdot 2) + 2(1\cdot 6 + 2\cdot 1) = 34$$

Згідно з формулою (4.11) вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_e = \frac{34 - 50\cdot 0,50\cdot 0,14}{50\cdot 1,02\cdot 0,94} = 0,64$$

Обчислимо

$\overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1 = 0,50\cdot 0,10 + 0,15 = 0,20$

$\overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2 = 0,14\cdot 0,12 + 0,30 = 0,32$

$\sigma_x^* = \sigma_u h_1 = 1,02 \cdot 0,10 \approx 0,100$

$\sigma_y^* = \sigma_v h_2 = 1,94 \cdot 0,12 \approx 0,113$

Підставивши одержані значення у співвідношення (4.8), одержимо шукане рівняння прямої лінії регресії *У* на *Х*:

$$\frac{\overline{y_x} - 0,32}{0,113} = 0,64\frac{y - 0,20}{0,100} \qquad \text{або остаточно} \qquad \overline{y_x} = 0,72x + 0,18 \qquad \text{(I)}$$

Аналогічно отримаємо вибіркове рівняння прямої лінії регресії *Х* на *У*:

$$\frac{\overline{x_y} - 20}{0,100} = 0,64\frac{y - 0,32}{0,113}, \quad \text{тобто} \quad \overline{x_y} = 0,57y + 0,02 \qquad \text{(I I)}$$

За даними кореляційної таблиці обчислимо умовні середні:

$\overline{y}_{0,05}$=(2·0,06+5·0,18+3·0,30)/10≈0,19

$\overline{y}_{0,15}$=(4·0,18+8·0,30+3·0,42)/15≈0,29

$\overline{y}_{0,25}$=(1·0,18+6·0,30+6·0,42+2·0,54)/15≈0,37

$\overline{y}_{0,35}$=(3·0,30+6·0,42+1·0,54)/10≈0,40

Аналогічно знайдемо:

$\overline{x}_{0,06}$=0,05; $\overline{x}_{0,18}$=(5·0,05+4·0,15+1·0,25)/10=0,11

$\overline{x}_{0,30}$=(3·0,05+8·0,15+6·0,25+3·0,35)/20≈0,20

$\overline{x}_{0,42}$=(3·0,15+6·0,25+6·0,35)/15=0,27

$\overline{x}_{0,54}$=(2·0,25+1·0,35)/3≈0,28

Одержані прямі лінії регресії *Y* на *X* та *X* на *Y* разом з обчисленими умовними середніми зображені на рис.11.

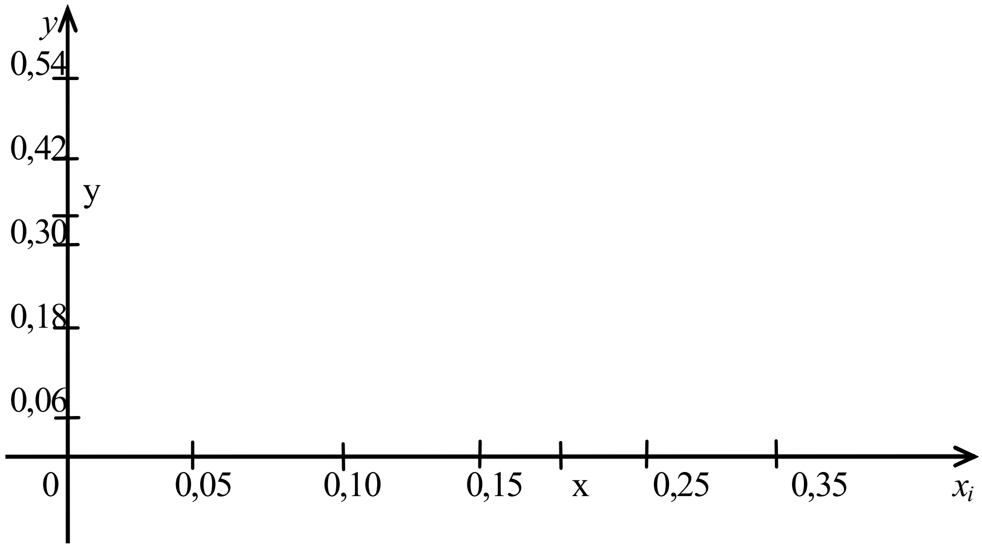


Рис. 11

6.5. Статистична перевірка статистичних гіпотез

6.5.1. Статистична гіпотеза. Критерії для перевірки нульової гіпотези. Критична область. Поняття про знаходження правосторонньої критичної області

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів. Наприклад, статистичними є наступні гіпотези:

1).генеральна сукупність розподілена за показниковим законом ;

2). дисперсіїї двох генеральних сукупностей, розподілених за нормальним законом, рівні між собою. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу H_0 .

Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу H_1 , яка заперечує нульову гіпотезу.

Висунута гіпотеза може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку проводять статистичними методами, то її називають статистичною. При перевірці гіпотези можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки першого роду називають рівнем значущості і позначають α. Найчастіше приймають α=0,05;0,01;0,001.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки другого роду позначають β.

Статистичним критерієм (або просто критерієм) називають випадкову величину *К*, яку використовують для перевірки нульової гіпотези.

Спостережуваним значенням $К_{спост.}$ називають значення критерію, яке обчислене за даними вибірки.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез можна сформулювати так: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області, то нульову гіпотезу відкидають; якщо спотережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу приймають.

Критичними точками $К_{кр.}$ називають точки, які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Існують лівосторонні, правосторонні та двосторонні критичні області.

Розглянемо, наприклад, питання про знаходження правосторонньої критичної області. Правосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівністю $К > к_{кр.}$, де $к_{кр.}$- додатне число. Для знаходження правосторонньої критичної області потрібно знайти критичну точку. Для цього задають досить малу ймовірність – рівень значущості α. Потім шукають критичну точку $к_{кр.}$, виходячи з вимоги, щоб при умові справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій К прийме значення, більше від $к_{кр.}$, дорівнювала заданому рівню значущості, тобто

$$P(К>к_{кр.})=\alpha \qquad (5.1)$$

Для кожного критерію складені відповідні таблиці, за якими знаходять критичну точку, що задовольняє цю вимогу.

Після того, як критична точка знайдена, обчислюють за даними вибірки спостережуване значення критерію і якщо виявиться, що $K_{спост.}>\kappa_{кр.}$,то нульову гіпотезу відкидають; якщо ж $K_{спост.}<\kappa_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймають.

Пояснимо, чому правостороння критична область визначається таким способом. Оскільки ймовірність події $K>\kappa_{кр.}$ мала, то ця подія при справедливості нульової гіпотези не повинна появитися в одному випробуванні. Якщо ж ця подія все таки відбулася, то це можна пояснити тим, що нульова гіпотеза неправильна і повинна бути відкинута. Таким чином, вимога (5.1) визначає ті значення критерію, при яких нульова гіпотеза відкидається.

Зауважимо, що спостережуване значення критерію може бути більшим від $\kappa_{кр.}$ не тому, що нульова гіпотеза неправильна, а з інших причин (малий об’єм вибірки, недоліки методики експерименту та інше). В цьому випадку, відкинувши правильну нульову гіпотезу, роблять помилку першого роду. Ймовірність цієї помилки дорівнює рівню значущості α .

Нехай нульва гіпотеза прийнята; помилково думати, що вона доведена. Дійсно, один приклад, який підтверджує справедливість, деякого загального твердження, ще не доводить цього твердження. Тому правильніше говорити так: дані спостережень узгоджуються з нульовою гіпотезою і, отже, не дають підстав її відкинути.

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива конкуруюча гіпотеза. Потужність критерію дорівнює ймовірності того, що нульова гіпотеза буде відкинута, якщо справедлива конкуруюча гіпотеза. Якщо ймовірність помилки другого роду позначити β, то потужність критерію дорівнює $1-\beta$. Отже, потужність критерію дорівнює ймовірності того, що не буде допущена помилка другого роду. Якщо рівень значущості α вже вибраний, то критичну область слід будувати так, щоб потужність критерію була максимальною.

Зауважимо, що в літературі з контролю якості продукції ймовірність визнати непридатною партію придатних виробів називають «ризиком виробника», а ймовірність прийняти непридатну партію виробів – «ризиком споживача».

6.5.2. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодження Пірсона

Критерієм узгодження називають статистичний критерій для перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Розглянемо застосування критерію узгодження χ^2 («хі квадрат») Персона до перевірки гіпотези про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності.

Нехай з генеральної сукупності одержана вибірка об’єму n:

$$\begin{array}{lll} \left(x_1;x_2\right) & \left(x_2;x_3\right) ...... & \left(x_s;x_{s+1}\right) \\ n_1 & n_2 & n_s \end{array} \tag{5.2}$$

Тут в першому рядку вказані часткові інтервали (x_i;x_{i+1}), в другому – відповідні

частоти n_i ; $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

Нехай у припущенні нормального розподілу ознаки X генеральної сукупності обчислені теоретичні частоти n_i'; i=1,2,3,...,s. При рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за нормальним законом.

За критерій перевірки нульової гіпотези приймемо випадкову величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(n_i - n_i'\right)}{n_i'} \tag{5.3}$$

К.Пірсон довів, що при $n \to \infty$ закон розподілу випадкової величини (5.3) прямує до закону розподілу χ^2 з k степенями вільності. Густина цього розподілу має вигляд:

$$f\left(x,k\right) = \begin{cases} 0 & при \le 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & при \; > 0 \end{cases}$$

Тому випадкова величина (5.3) позначена через χ^2, а сам критерій називається критерієм узгодження «хі квадрат». Число степенів вільності знаходять за формулою

$$k = s - 1 - r, \tag{5.4}$$

де s – кількість часткових інтервалів вибірки; r – кількість параметрів передбачуваного розподілу. Зокрема, якщо передбачуваний розподіл є нормальним, то r=2. В цьому випадку $к$=s-3.

Будуємо правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб у припущенні справедливості нульової гіпотези ймовірність попадання критерію в цю область дорівнювала прийнятому рівню значущості α:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{кр.}\left(\alpha,k\right)\right) = \alpha \tag{5.5}$$

Для того, щоб при заданому рівні значущості перевірити нульову гіпотезу H_0 (ознака X генеральної сукупності розподілена нормально), потрібно:

1). обчислити спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{спост.} = \sum_{i=1}^{s}\left(n_i - n'_i\right)^2 \Big/ n'_i$$

2). за таблицею критичних точок розподілу χ^2 за прийнятим рівнем значущості α і числом степенів вільності κ=s-3 знайти критичну точку $\chi^2_{кр.}(\alpha, \kappa)$.

Якщо $\chi^2_{спост.} < \chi^2_{кр.}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу, тобто дані спостережень узгоджуються з нульовою гіпотезою.

Якщо $\chi^2_{спост.} > \chi^2_{кр.}$, то нульову гіпотезу відкидають.

На закінчення цього параграфа розглянемо методику обчислення теоретичних частот нормального розподілу.

Нехай з генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму n, статистичний розподіл якої має вигляд (5.2). Для того, щоб обчислити теоретичні частоти в припущенні, що ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, потрібно:

а) обчислити вибіркову середню $\overline{x_B}$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B, взявши за варіанти x_i^* (i=1,2,…,s) середини часткових інтервалів:

$$x_i^* = \left(x_i + x_{i+1}\right)\ /2$$

б) пронормувати X, тобто перейти до випадкової величини $Z = \dfrac{X - \overline{x_B}}{\sigma_B}$, і обчислити кінці інтервалів(z_i,z_{i+1}):

$$z_i = \frac{\left(x_i - \overline{x_B}\right)}{\sigma_B}, \qquad z_{i+1} = \frac{\left(x_{i+1} - \overline{x_B}\right)}{\sigma_B}, \tag{5.6}$$

причому найменше значення випадкової величини Z, тобто z_1, прийняти рівним -∞, а найбільше її значення, тобто z_{s+1}, прийняти рівним +∞;

в) обчислити теоретичні ймовірності p_i попадання X в інтервали (x_i,x_{i+1}) за формулою

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i), \quad i=1,2,\ldots,s \tag{5.7}$$

де $\Phi(z)$– функція Лапласа, та знайти шукані теоретичні частоти

$$n_i' = n\, p_i \tag{5.8}$$

Приклад 5.1 Зроблено вибірку об'єму n=200 інструментів для нарізки різьби. Розмір, що перевіряється, виміряний з точністю до 1 мікрона. У таблиці наведені відхилення від номінального розміру. Використовуючи критерії Пірсона, при рівні значущості α =0,05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності із заданим статистичним розподілом вибірки.

Номер інтервала i	Частковий інтервал (x_i,x_{i+1})	Частота n_i	Номер інтервала i	Частковий інтервал (x_i,x_{i+1})	Частота n_i
1	(-20, -15)	7	6	(5, 10)	41
2	(-15, -10)	11	7	(10, 15)	26
3	(-10, -5)	15	8	(15, 20)	17
4	(-5, 0)	24	9	(20, 25)	7
5	(0, 5)	49	10	(25, 30)	3

Розв'язання. Знайдемо x_i^* (i=1,2,…,10) за формулою (5.5). Одержимо наступний розподіл:

x_i^*	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Обчислимо вибіркову середню $\overline{x_B}$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B: $\overline{x_B}$=4,30 , σ_B=9,70 (див. парграф 4.2, приклад 2.2).

Знайдемо інтервали (z_i, z_{i+1}), теоретичні ймовірності p_i та теоретичні частоти n_i за формулами (5.6), (5.7), (5.8). Для цього складемо розрахункову таблицю.

i	Інтервал (z_i,z_{i+1})	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	p_i	n_i'=200p_i
1	(-∞ ;-1,99)	-0,5000	-0,4767	0,0233	4,66
2	(-1,99;-1,47)	-0,4767	-0,4292	0,0475	9,50
3	(-1,47;-0,96)	-0,4292	-0,3315	0,0977	19,54
4	(-0,96;-0,44)	-0,3315	-0,1700	0,1615	32,30
5	(-0,44;0,07)	-0,1700	0,0279	0,1979	39,58
6	(0,07;0,59)	0,0279	0,2224	0,1945	38,90
7	(0,59;1,10)	0,2224	0,3643	0,1419	28,38
8	(1,10;1,62)	0,3643	0,4474	0,0831	16,62
9	(1,62;2,13)	0,4474	0,4834	0,0360	7,20
10	(2,13;+∞)	0,4834	0,5000	0,0166	3,32
				$\sum p_i$=1	$\sum n_i'$=200

Обчислимо спостережуване значення критерію $\chi^2_{спост.}$. Для цього складемо наступну розрахункову таблицю (останній стовпець використовується для контролю обчислень).

i	n_i	n_i'	n_i-n_i'	$(n_i$-$n_i')^2$	$(n_i$-$n_i')^2/n_i'$	n_i^2/n_i'
1	7	4,66	2,34	5,4756	1,1750	10,5150
2	11	9,50	1,50	2,2500	0,2368	12,7368
3	15	19,54	-4,54	20,6116	1,0548	11,5148
4	24	32,30	-8,30	68,8900	2,1328	17,8328
5	49	39,58	9,42	88,7364	2,2420	60,6619
6	41	38,90	2,10	4,4100	0,1134	43,2134
7	26	28,38	-2,38	5,6644	0,1996	23,8196
8	17	16,62	0,38	0,1444	0,0087	17,3887
9	7	7,20	-0,20	0,0400	0,0056	6,8056
10	3	3,32	-0,32	0,1024	0,0308	2,7108
$\sum$	200	200			$\chi^2_{спост.}\approx 7,199$	207,199

Для контролю обчислень використаємо формулу

$$x^2_{спост.} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{n_i^2}{n_i'}\right) - n$$

В даному випадку

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{n_i^2}{n_i'}\right) - n = 207,199 - 200 = 7,199 = \chi^2_{спост.}$$

Отже, обчислення виконані правильно.

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 за рівнем значущості α =0,05 і числом степенів вільності $к$=10-3=7 знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2_{кр.}(0,05;7)$=14,1.

Оскільки $\chi^2_{спост.} < \chi^2_{кр.}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Отже, дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Додаток 1.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009

3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2.

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49397	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Додаток 3.

Таблиця значень функції $P_m(\lambda) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

$m \setminus \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

$m \setminus \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

$m \setminus \lambda$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016294	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Додаток 4.

Таблиця значень $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	0,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 5.

Таблиця значень функції $q = q(\gamma, n)$

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток 6.

Критичні точки розподілу χ^2.

Число степені в вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0