НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА ЛІТЕРАТУРА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра економічна кібернетика

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

по опорному конспекту лекцій з дисципліни
«Моделі економічної динаміки»
для студентів напряму підготовки 6.030502 «Економічна кібернетика»
денної та заочної форми навчання

Тернопіль-2017

Методичні рекомендації опорного конспекту лекцій з дисципліни «Моделі економічної динаміки» для студентів напряму підготовки 6.030502 «Економічної кібернетики» денної та заочної форми навчання /к.е.н., доцент Н.М. Гарматій – Тернопіль, ТНТУ ім. І. Пулюя, 2017. – 65 с.

У методичних рекомендаціях на основі діючого законодавства та освітньо-професійної програми з підготовки магістрів, розкрито суть лекційних матеріалів з дисципліни «Моделі економічної динаміки»; використання літературних джерел для розкриття та обґрунтування досліджуваної проблеми в науковому та економічному аспекті; використання фактичних даних про результати моделювання динамічних процесів; використання економічних методів для дослідження закономірностей динаміки діяльності підприємств у всіх сферах економіки;

Укладачі: Гарматій Н.М., кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики.

Рецензенти: Панухник Олена Віталіївна, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри фінансів та контролю;
Федорович Роман Володимирович, кандидат економічних наук, професор, завідувач кафедри промислового маркетингу.

Відповідальний за випуск: Гарматій Наталія Михайлівна, кандидат економічних наук, доцент кафедри економної кібернетики.

Методичні рекомендації розглянуті і затверджені на засіданні кафедри економічної кібернетики
Протокол № 8 від 24 березня 2017р.

Схвалені на засіданні методичної комісії факультету економіки та підприємницької діяльності
Протокол № від 201 р.

Зміст

1. Основи моделювання економічних процесів

1.1. Динамічні системи і їх властивості

Динамічною називається система, параметри якої явно або неявно залежать від часу. З цього визначення виходить, що якщо для поведінки системи визначені функціональні рівняння, то в них включаються в явному вигляді змінні, залежні від часу

Розглянемо найважливіші властивості складних динамічних систем.

1. Цілісність (емерджентність).

У системі окремі частини функціонують спільно, складаючи в сукупності процес функціонування системи як цілого. Сукупне функціонування різнорідних взаємозв'язаних елементів породжує якісно нові функціональні властивості цілого, що не мають аналогів у властивостях його елементів. Це означає принципову неможливість зведення властивостей системи до суми властивостей її елементів.

2. Взаємодія із зовнішнім середовищем.

Система реагує на дію навколишнього середовища, еволюціонує під цією дією, але при цьому зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

3. Структура.

При дослідженні системи структура виступає як спосіб опису її організації. Залежно від поставленої задачі дослідження виробляється декомпозиція системи на елементи і вводяться відносини і зв'язки між ними, істотні для вирішуваної проблеми. Разом з тим декомпозиція системи на елементи і зв'язки визначається внутрішніми властивостями даної системи. Структура динамічна за своєю природою, її еволюція в часі і просторі відображає процес розвитку систем.

4. Нескінченність пізнання системи.

Під цією властивістю розуміється неможливість повного пізнання системи і всебічного уявлення кінцевою безліччю описів, тобто кінцевим числом якісних і кількісних характеристик. Тому система може бути представлена нескінченним числом структурних і функціональних варіантів, що відображають різні аспекти системи.

5. Ієрархічність системи.

Кожен елемент в декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, у свою чергу, можуть бути також представлені як системи. Але, з другого боку, будь-яка система — лише компонент ширшої системи.

6. Елемент.

Під *елементом* розуміється якнайменша ланка в структурі системи, внутрішня будова якого не розглядається на вибраному рівні аналізу. Відповідно до властивості 5 будь-який елемент є системою, але на вибраному рівні аналізу ця система характеризується тільки цілісними характеристиками.

Цілісність, структура, елемент, нескінченність і ієрархічність, складають ядро системоутворюючих понять загальної теорії систем і є основою системного представлення об'єктів і формування концепцій системних досліджень.

Проте для докладнішого вивчення властивостей динамічних економічних систем (ЕС) необхідно розглянути ще ряд найважливіших властивостей і характеристик.

Стан системи. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично можливий набір станів рівний числу можливих поєднань всіх станів елементів. Проте взаємодія складових частин приводить до обмеження числа реалізованих поєднань. Зміна стану елементу може відбуватися неявно, безперервно і стрибкоподібно.

Поведінка системи. Під поведінкою системи розуміється закономірний перехід з одного стану в інше, обумовлений властивостями елементів і структурою.

Безперервність функціонування. Динамічним системам властива безперервність функціонування. Система існує, поки функціонують соціально-економічні і інші процеси в суспільстві, які не можуть бути перервані, інакше система перестане функціонувати. Всі процеси в ЕС, як в живому організмі, взаємозв'язані. Функціонування частин визначає характер функціонування цілого, і навпаки. Функціонування системи пов'язане з безперервними змінами, накопичення яких приводить до розвитку.

4. Розвиток системи. Життєдіяльність складної системи є постійною зміною фаз функціонування і розвитку, яка виражається в безперервній функціональній і структурній перебудові системи, її підсистем і елементів.

Еволюція економічних систем визначається однією з найважливіших властивостей складних систем — здібністю до саморозвитку. Центральним джерелом саморозвитку є безперервний процес виникнення і вирішення протиріч. Розвиток, як правило, пов'язаний з ускладненням системи, тобто із збільшенням її внутрішнього різноманіття.

Динамічність. Економічна система функціонує і розвивається в часі, вона має передісторію і майбутнє, характеризується певним життєвим циклом, в якому можуть бути виділені певні фази: виникнення, зростання, розвиток, стабілізація, деградація, ліквідація або стимул до зміни.

Складність. Економічна система характеризується великим числом неоднорідних елементів і зв'язків, поліфункціональністю, поліструктурністю, багатокрітеріальностю, багатоваріантністю розвитку і властивостями складних систем.

Гомеостатичність. Гомеостатичність відображає властивість системи до самозбереження, протидія руйнуючим діям середовища.

Цілеспрямованість. Всім динамічним системам в економіці властива цілеспрямованість, тобто наявність певної мети і прагнення до її досягнення. Розвиток системи пов'язаний саме із зміною мети.

9. Керованість. Свідома організація цілеспрямованого функціонування системи і її елементів називається керованістю. В процесі життєдіяльності система за допомогою цілеспрямованого управління дозволяє постійно виникаючі в ній суперечності і реагує на зміну внутрішніх і зовнішніх умов свого існування. Відповідно до умов, що змінюються, вона міняє свою структуру, коректує цілі розвитку і зміст діяльності елементів, тобто відбувається цілеспрямована самоорганізація системи, яка на практиці реалізує здібність до саморозвитку. Однією з основних функцій самоорганізації є збереження в процесі еволюції системи її якісної визначеності.

Властивості керованості виявляються також в таких особливостях, як відносна автономність і функціональна керованість.

Відносна автономність функціонування економічних систем означає, що в результаті дії зворотного зв'язку кожна з складових вихідного сигналу може бути змінена за рахунок зміни вхідного сигналу, причому інші складові залишаються незміненими.

Функціональна керованість економічної системи означає, що відповідним вибором вхідної дії можна добитися будь-якого вихідного сигналу.

Адаптивна. Адаптивна економічної системи визначається двома видами адаптації — пасивної і активної. Пасивна адаптація є внутрішньо властивою характеристикою економічної системи, яка має в своєму розпорядженні певні можливості саморегулювання. Активна адаптація представляє механізм адаптивного управління економічної системи і організацію його ефективного здійснення.

Інерційність. Інерційність економічної системи позначається у виникненні запізнювання в системі, що симптоматично реагує на обурюючи і управляючі дії. Такі запізнювання враховуються, зокрема, за допомогою лагів, що включаються в моделі опису систем. Розрізняють внутрішні лаги, або лаги ухвалення рішень, щодо стабілізуючих дій, і зовнішні лаги, що відображають затриману реакцію системи на відповідні дії.

Стійкість. Система признається стійкій щодо введеного визначення околиці, якщо при достатньо малих змінах умов функціонування її поведінка істотно не змінюється. В рамках теорії систем досліджуються структурна стійкість і стійкість траєкторії поведінки системи. Стійкість ЕС забезпечується такими аспектами самоорганізації, як диференціація і лабільність (чутливість). *Диференціація* — це прагнення системи до структурної і функціональної різноманітності елементів, яка забезпечує не тільки умови виникнення і вирішення протиріч, але і визначає здатність системи швидко пристосовуватися до наявних умов існування. Більше різноманітності — більше стійкості, і навпаки. *Лабільність* означає рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому.

13. *Стан рівноваги.* Стійкість системи пов'язана з її прагненням до стану рівноваги, який припускає таке функціонування елементів системи, при якому забезпечується підвищена ефективність руху до цілей розвитку. У реальних умовах система не може повністю досягти стану рівноваги, хоча і прагне до нього. Елементи системи функціонують по-різному в різних умовах, і їх динамічна взаємодія постійно впливає на рух системи. Система прагне до рівноваги, на це направлені зусилля управління, але, досягаючи його, вона тут же від нього йде. Таким чином, стійка економічна система постійно знаходиться в стані динамічної рівноваги, вона безперервно коливається щодо положення рівноваги, що є не тільки її специфічною властивістю, але і умовою безперервного виникнення суперечностей як рушійних сил еволюції.

Лекція 2. Формальний опис динамічної системи

Формально динамічна система в загальному вигляді може бути задана наступним кортежем:

$$M = < T, \Phi, X, \Omega, V, Y, G, R > .$$

Властивості динамічної системи задаються наступними аксіомами:

Для системи S задані множина моментів часу T, макрофункція системи Ф, множина вхідних дій X, множина збурень Ω, множина станів V, множина значень вихідних величин У, структура системи G і відносини емерджентністі R.

1. Множина T є деяка впорядкована підмножина множини дійсних чисел, що є множиною моментів часу, в які вивчається система.

2. Макрофункція системи визначається за допомогою двох функцій:

$$S : X \to Y \text{ і } V : X \times Y \to C,$$

де S - функціональна модель об'єкту, V — функція якості, або оцінна, функція, C — множина оцінок. Макрофункція системи визначається парою $\Phi = (S, V)$.

4. Множина обурень Ω, або множина невизначеностей, є множина всіх можливих дій, які позначаються на поведінці системи

Якщо така множина Ω не порожня, тобто $\Omega \neq 0$, то функціональна модель об'єкту приймає вигляд:

$$S : X \times \Omega \to Y,$$

а оцінна функція

$$V : X \times \Omega \times Y > C .$$

5. Існує перехідна функція стану

$$\varphi = \Phi \times \Phi \times V \times X \to V,$$

значеннями якої служать стани $u(t) = \varphi(t, \tau, u, x) \in V$, в яких опиняється система у момент часу $t \in T$, якщо в початковий момент $\tau < t$ вона знаходилася в змозі $u(\tau) \in V$ протягом відрізка $[\tau, t]$ на неї діяли вхідні дії $x \in X$.

6. Задане вихідне відображення

$$\eta : T \times V \to Y,$$

визначаюче вихідні величинии $y(t) = \eta(t, u, (t))$.

Пару ((τ , u), де $\tau \in T$, і $u \in V$, називають *станом,* або *фазовими координатами системи* S, а множина T Ч V — *простором станів системи.*

Кінцевий набір станів системи $t_1, t_2 \in T$, що задається перехідною функцією φ і визначений на деякому тимчасовому відрізку $[t_1, t_2]$, називається *траєкторією поведінки* системи на інтервалі $[t_1, t_2]$ за заданих початкових умов.

Кажучи про рух системи, ми матимемо на увазі траєкторію поведінки даної системи. Сукупність траєкторій системи, які відповідають різним (всім можливим) її початковим станам, називаються *фазовим портретом системи.*

7. Структура системи *G* визначається в термінах теорії графів:

$$G = \langle \{S_i\}, (S_i, S_j) \rangle, i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

де S_i — вершини, а $((S_i ,, S_j)$ — дуги графів.

8. Відношення емерджентністі $R : \Phi \to G$.

Розглянуте поняття динамічної системи дозволяє виробити загальну термінологію, уточнити концептуалізацію і забезпечити єдиний підхід до опису загальних властивостей.

2.1. Математичний апарат опису динамічних систем

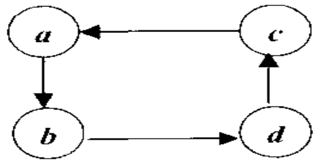
Якщо поведінку системи розглядати як ланцюг послідовних кінцевих змін її станів, то змінні системи, міняючись в часі, в кожен даний момент характеризуватимуться деякими значеннями. Якщо одне певне значення змінної u_1, у момент часу t_1 перетворюється на наступне значення u_2 у момент часу t_2, то вважається, що відбувся перехід системи із стану (u_1, t_1) у стан (u_2, t_2). Чинник, під дією якого відбувається перехід, називається *оператором.* Змінна, випробувана дію оператора, називається *операндом.* Результат переходу - (u_2, t_2) називається *образом.* Якщо розглядати деяку множину всіх переходів системи із стану a в стан b, із стану c в стан d і т. д., то така множина переходів для деякої множини операндів називається *перетворенням.* Перетворенням можна дати математичне уявлення за допомогою методу, запропонованого У. Ешбі.

Нехай множина станів деякої системи включає стани a, b,c, d і на цю множину операндів діє оператор P. Тоді поведінку системи можна описати, наприклад, таким чином:

$$P = \left\{ \begin{matrix} abcd \\ bdac \end{matrix} \right. .$$

У першому рядку запису перераховані стани системи, або операнди. У другому рядку під кожним операндом знаходяться образи, в які система переходить із стану, записаного у верхньому рядку, під дією оператора P. *В даному прикладі* множина елементів другого рядка не містить не одного нового елементу в порівнянні з першою. Перетворення, яке не породжує нових елементів, називається замкнутим.

На малюнку представлений граф переходів системи з приведеним вище перетворенням.



У іншому перетворенні $-P=\begin{cases}\dfrac{abcd}{ebca}\end{cases}$ міститься новий елемент е, отже, перетворення виходить за межі початкової безлічі станів системи і називається *незамкнутим.* Перетворення вигляду $P=\begin{cases}\dfrac{abcd}{bdac}\end{cases}$ є тотожним. Існують і інші, компактніші, форми запису операндів. Наприклад, перетворення $P=\begin{cases}\dfrac{1234}{4567}\end{cases}$ можна записати так:

P	a	b	c	d
a	1	0	0	0'
b	0	0	0	1
c	0	1	1	0
d	0	0	0	0

$$n' \to n+3(n=1,2,3,4).$$

Перетворення також можна представити в матричній формі, наприклад, для перетворення вигляду $P=\begin{cases}\dfrac{abcd}{accb}\end{cases}$ одержуємо матрицю переходів де операнди представлені в заголовку стовпця, а образи — в заголовку рядка.

Приведений приклад описує зміну станів системи з детермінованою дією, яка описана *однозначним* перетворювачем. Однозначність перетворення означає, що система не може перейти в два або більш станів при заданому початковому. Таким чином, детермінована динамічна система поводиться так само, як замкнуте однозначне перетворення.

Якщо в систему (або її зовнішнє середовище) входять стохастичні елементи, то переходи із стану в стан не будуть строго детермінованими. В цьому випадку перетворення повинне відображати не тільки можливі нові стани системи, але і вірогідність, з якою ці стани здійсняться.

Система подій може бути описана за допомогою апарату символічної логіки. Логічні функції заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквівалентності широко застосовуються при моделюванні автоматичних систем.

Розрізняють три типи, або режим поведінки системи: рівноважний, перехідний і періодичний.

Стан рівноваги системи може розглядатися як деяка тотожність відбуваються в ній перетворень, що визначають однаковий стан системи у будь-який момент часу. У рівноважній системі кожна частина знаходиться в стані рівноваги в умовах, визначуваних іншими її частинами.

Властивість стійкості не тотожне з рівновагою. Під стійкістю системи розуміється збереження її стану незалежно від зовнішніх збурень.

При вивченні поведінки динамічних систем важливим є дослідження характеру перехідних процесів. *Перехідний процес* — це процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в інший під дією прикладеного збурення, що змінює стан, структуру або параметри системи, або унаслідок ненульових початкових умов. Важливими характеристиками динамічної системи є тривалість і характер перехідного процесу.

У безперервних системах, як правило, сталий режим (тобто режим стійкого функціонування), досягається за нескінченно великий час. Залежно від характеру в безперервних системах розрізняють коливальний і монотонний перехідний процес.

Для дискретних систем перехідний процес можна визначити як послідовність станів, викликаних зовнішньою збурюючою дією, яку система проходить за постійних умов, до її повернення в сталий режим функціонування.

До понять рівноваги і стійкості примикає поняття циклу в перетворенні системи.

Циклом називається така послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень примушує систему проходити повторно цю послідовність. Це можна проілюструвати перетворенням вигляду

$$P\left\{\frac{a}{c}\frac{b}{h}\frac{c}{b}\frac{d}{h}\frac{e}{a}\frac{f}{c}\frac{g}{e}\frac{h}{g}\right\}.$$

Якщо в початковий момент система знаходилася в змозі а, то одержуємо послідовність станів:

$$a\,\underbrace{cbhg}\underbrace{cbhg}\underbrace{cbhg}....$$

Очевидно, виділяється цикл завдовжки 4. Перехід а > з можна розглядати як перехідний процес до сталої циклічної поведінки.

На підставі знань про перетворення, пов'язане з системою, вивчаються стани рівноваги, перевіряється, чи зміниться стан системи, підданої яким-небудь діям, чи є стан рівноваги системи достатньо стійким, і якщо так, то який режим поведінки системи, що вивчається. Якщо заданий деякий стан (або стани) і конкретні обурення, то аналізується, чи повернеться система після зсуву в свою початкову область. Для безперервних систем розглядається питання, чи є вона стійкої проти всіх обурень усередині певної області значень.

Загальнішим є опис систем за допомогою набору функцій: перехідної, передавальної і імпульсної. У відмінності від приведеної вище, цей спосіб придатний для опису безперервних систем, що складаються з безлічі елементів.

Перехідна функція - це функція, що відображає реакцію динамічної системи на вхідний сигнал за нульових початкових умов. Перехідна функція є важливою характеристикою системи, що повністю визначає її динамічні властивості. Знаючи перехідну функцію $\mathrm{h(t)}$, можна визначити сигнал $\mathrm{y(t)}$ на виході системи при подачі у момент часу $\mathrm{t_0 = 0}$ на її вхід сигналу $\mathrm{x(t)}$:

$$y(t) = x(0) \times h(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau. \qquad (1)$$

Передавальна функція — це функція, що є відношенням перетворення Лапласа $\mathrm{Y(p)}$ вихідної координати $\mathrm{y(t)}$ лінійної динамічної системи (або окремої ланки) до перетворення Лапласа $\mathrm{X(p)}$ її вхідної координати $\mathrm{x(t)}$ за нульових початкових умов: $\mathrm{W(p) = Y(p) / X(p)}$. Передавальна функція лінійних фізично реалізованих динамічних систем з постійними параметрами є дробово-раціональними функціями параметра перетворення Лапласа p.

Передавальні функції — зручний опис властивостей лінійної системи автономного управління. Дослідження коріння передавальної функції (нулів і полюсів) повністю визначає всі динамічні властивості системи (стійкість і ін.).

Імпульсна функція задає вхідний сигнал, що поступив в систему. Вона може мати, наприклад, ступінчастий вигляд, одиничну дію і т.п.

Для лінійних динамічних систем імпульсна функція $\mathrm{g(t)}$ і передавальна функція $\mathrm{w(p)}$ пов'язані з перехідною функцією $\mathrm{h(t)}$ співвідношеннями:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt},\ h(t) = \frac{1}{2p}\int_{c-iw}^{c+iw} \frac{w(p)}{p} e^{-pt} dp; \qquad (2)$$

$$w(p) = \int_{0}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-pt} dt \qquad (3)$$

де з — компоненту абсолютної збіжності.

При описі властивостей багатоланкової системи використовуються передавальні функції її ланок. При цьому використовуються наступні типи з'єднань:

передавальна функція n ланок, що послідовно сполучаються;
передавальна функція паралельного з'єднання n ланок;

передавальна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком. Перехідні і передавальні функції широко використовуються в пакетах програм імітаційного моделювання і прогнозування на основі нейроних мереж.

Лекція 3. Рівновага і стійкість динамічних систем

3.1. Рівновага і стійкість

Економічна динаміка, що вивчає поведінку складних динамічних систем в економіці, не може обійти увагою такий важливий напрям, як стійкість і рівновага систем. Теорія стійкості зобов'язана своїм виникненням працям А. Пуанкаре і А. М. Ляпунова. У сучасних теоріях рівновазі в соціально-економічних системах надається особливе значення, пов'язане з поняттям справедливості, відсутністю соціальних потрясінь і т.д. В цьому розділі ми розглянемо спочатку деякі інтуїтивні обґрунтування понять «рівновага» і «стійкість», а потім їх формальне означення.

Всяка динамічна система у будь-який момент часу характеризується своїм станом і напрямом руху. Система скоює рух або під впливом внутрішніх спонукальних причин, або в результаті впливу на неї зовнішнього середовища. Принципово різними є причини, що обумовлюють її рух, як в початковий момент часу, так і в подальші моменти.

Із станом системи пов'язане поняття рівноваги. Під рівновагою розуміється стан, що зберігається скільки завгодно довго за відсутності зовнішніх дій. Таким чином, рівноважний стан системи - це такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки внутрішніх причин (іншими словами, немає таких внутрішніх сил, які б прагнули і були в змозі змінити стан рівноваги). Очевидний приклад — рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил в суспільстві. Напрям руху системи задається нульовим вектором, тобто рух відсутній.

Якщо система не перебуває в стані рівноваги, то вона вчиняє ненульовий рух під впливом внутрішніх причин. При цьому можливо, звичайно, і зовнішній вплив на систему, проте першопричиною зміни її стану є саме внутрішні умови її існування. Наприклад, система, що випускає на ринок нову продукцію, не знаходиться в стані рівноваги, оскільки всі умови її існування і зусилля якраз і направлені на зміну існуючого положення. А ось виробничо-економічна система, продукція якої знаходиться у стадії насиченого попиту, швидше знаходиться в стані рівноваги, оскільки об'єм випуску її не змінюється до тих пір, поки не буде ухвалене відповідне рішення. В даному випадку ухвалення рішення про випуск нової продукції або модифікації старої є по відношенню у виробничій системі зовнішнім елементом, що генерується управляючою системою.

Під впливом зовнішніх дій рівновага може бути порушене, і система перейде в інший стан. В цьому випадку в дію вступає друга характеристика динамічної системи — поведінка. Залежно від будови системи, властивостей її і становлячих її елементів поведінка може істотно розрізнятися. Принципово різними виявляються два варіанти розвитку подій після того, як на систему зробило деякий збурюючий вплив зовнішнє середовище: повернення в початковий стан (може бути при нескінченному періоді розгляду) і подальше видалення від початкового стану. Ці можливості описуються поняттям стійкості.

Під стійкістю розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього. У такому разі стан рівноваги називається стійким. Другому варіанту відповідає нестійкість стану і системи.

Таким чином, в заданий момент часу система може знаходитися в стані рівноваги, і у такому разі часто говорять про рівноважну систему, або знаходитися в стані нерівноваги (не рівноважна система). У свою чергу рівновага може бути стійкою і нестійкою і, відповідно, розділяють стійкі і нестійкі системи.

Поняття стійкості застосовується також і по відношенню до руху системи, а саме — як властивість системи мало відхилятися від заданої траєкторії руху при малих збурюючих впливах з боку зовнішнього середовища. У цьому значенні можна говорити про динамічну стійкість.

Нарешті, поведінка системи також може бути схильне до деяких змін в часі. Цій можливості відповідає поняття стаціонарності. Стаціонарність є властивістю поведінки, процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється з часом. Так, функціонування виробничо-економічної системи можна вважати стаціонарним, якщо технології виробництва не змiняються протягом даного періоду. В цьому випадку систему можна описати за допомогою економіко-статистичних моделей. Якщо ж відбувається зміна технологій виробництва, то закон функціонування міняється, наприклад, змінюються величини нормативної продуктивності ресурсів, і попередній закон функціонування виявляється недійсним. У перехідний період систему вже не можна описати за допомогою статистичних моделей, а слід привертати могутніші математичні інструменти. По аналогії з поняттями рівноваги і стійкості системи часто говорять про стаціонарні і нестаціонарні системи. У стаціонарній системі всі процеси, що відбуваються, стаціонарні, а в нестаціонарній існує хоча б один нестаціонарний процес.

Отже, слід розрізняти, до якої характеристики системи відносяться різні поняття. Рівновага є властивістю стану, стійкість — властивістю системи, а стаціонарність — властивістю процесів, що відбуваються в системі.

У літературі часто згадується поняття «стабільність». При цьому в різних джерелах під цим поняттям маються на увазі різні властивості. Слід помітити, що в іноземній літературі використовується єдиний термін — stability - стійкість, стабільність. Тому існування двох різних термінів в російськомовній (україномовної) літературі пояснюється швидше витратами перекладу, ніж дійсним розмежуванням цих понять. Виправданням існування цього терміну є те, що він, як правило, використовується як якісна, а не кількісна характеристика процесів, що відбуваються в системі, і означає поступальний, еволюційний шлях розвитку системи на противагу революційному, вибуховому.

Складність і відвертість економічних систем пояснюють той факт, що рівновага і стійкість на практиці зустрічаються достатньо рідко. Проте ці поняття мають важливе значення для економічної теорії і дозволяють досліджувати внутрішні властивості систем.

Слід також помітити, що нелінійність в економічних системах породжує ускладнені варіанти рівноваги і стійкості, про що піде мова в подальших розділах.

3.2. Формалізація стійкості динамічних систем. Теорема Ляпунова.

Для складних систем, зокрема економічних, стійкість означає, що при виникненні обурення, що злегка виводить систему із стану рівноваги, система прагнутиме до відновлення колишнього стану, тобто все її подальші стани знаходитимуться поблизу стану рівноваги (рис. 1). Формалізація питань стійкості реалізується у вигляді декількох означень.

Розглянемо систему, що описується диференціальним рівнянням (системою диференціальних рівнянь) вигляду

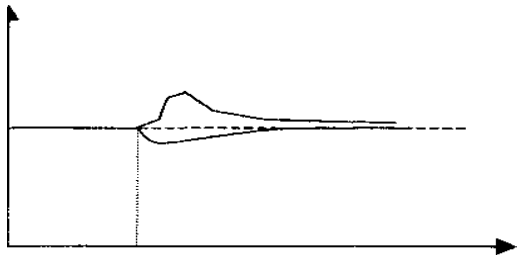


Рис.. 1. Стійкість для динамічної системи

$$\begin{cases} x = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \tag{3.1}$$

Означення 1. Система (1) називається *автономною*, якщо змінна часу t не входить в її праву частину безпосередньо. Інакше система називається *неавтономною*.

Припустимо, що функція $f(x,t)$ має необхідні властивості для того, щоб система (1) мала єдиний розв'язок

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0). \tag{3.2}$$

Означення 2. Стан системи x_e називається *станом рівноваги* для системи (1), якщо

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \tag{3.3}$$

або

$$\varphi(t, t_0, x_e) = x_e. \tag{3.4}$$

Це означення означає, що система сама по собі не покине стан рівноваги.

Означення 3. Стан рівноваги x_e динамічної системи (1) називається стійким по Ляпунову (стабільним), якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0:\ \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0) - x_e\| \le \varepsilon,\ \forall t \ge t_0..$$

Це означення означає, що завжди можна вибрати таке початкове положення системи x_0, відмінне від стану рівноваги менш, ніж на δ, що всі точки траєкторії системи знаходитимуться від стану рівноваги не далі ε (мал. 2).

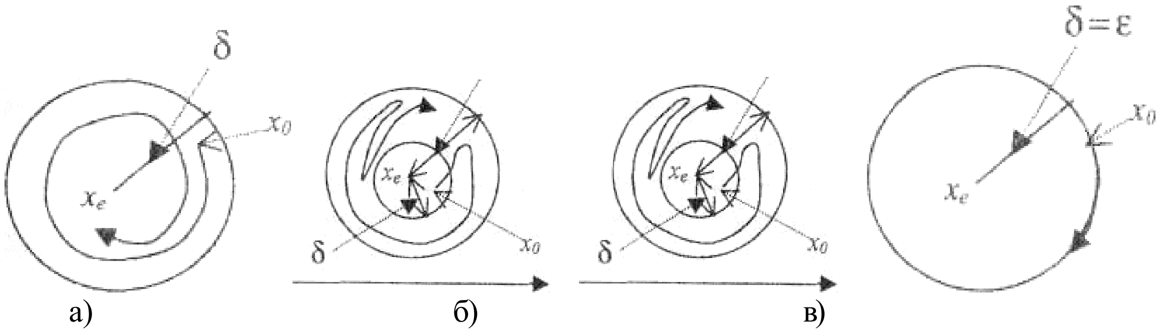


Рис. 2. Стійкість по Ляпунову

Означення *4.* Точка рівноваги x_e динамічної системи (1)

Називається асимптотично стійкою, якщо:

1) вона є стійкою в значенні означення 3;

2) виконано

$\forall m > 0 \ \ \exists T(m, t_0, x_0) > 0:$

$\|x_0 - x_e\| \le r(t_0) \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0) - x_e\| \le m, \ \ \forall t \ge t_0 + T,$

де $r(t_0) > 0$ — константа.

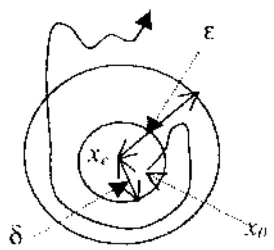
Іншими словами

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, t_0, x_0) = x_e.$$

Таким чином, до асимптотично стійкої точки рівноваги збігається будь-яка траєкторія, що починається істотно близько до неї (мал. 3).

Асимптотично стійка точка називається *аттрактором* («притягаюча»), а нестабільна — *репеллером* (рис. 4).

Число $r(t_0)$ називається базисом аттрактора.



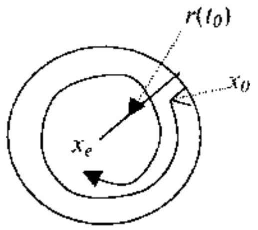


Рис. .3. Аттрактор

Рис..4. Репеллер

Означення 5. Стан рівноваги x_e динамічної системи (1) називається *в цілому* асимптотично *стійким*, якщо

1) він є стійким;

2) будь-яка траєкторія при $t \to \infty$ збігається до x_e, якщо $\|x_0 - x_e\| \le r$, де $r > 0$ — постійне, достатньо велике число (рис..5).

Якщо константи у означеннях 3, 4, 5 ((δ, T, r) не залежать від t_0, то говорять про однорідну стійкість.

Для простоти викладення надалі вважатимемо, що система (1) має нульове рішення.

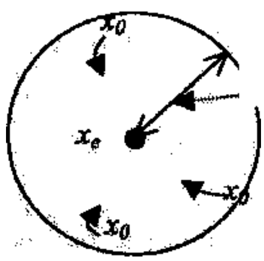


Рис. 5. В цілому асимптотично стійкий стан

Теорема Ляпунова про стійкість.

Нехай для системи (1) існує така неперервно диференційована в околиці точки $x = 0$ функція $V(x)$, що $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ і $V'(x) < 0$ при $x \ne 0$.

Тоді рішення системи $x(t) \equiv 0$ є стійким.

Лекція 4. Нестійкість і нелінійність динамічних систем

Протягом останніх десятиліть спостерігається підвищення інтересу до нелінійних динамічних моделей у всіх наукових областях (математика, хімія, фізика і т. д.). Відкриття того, що прості нелінійні моделі можуть демонструвати складну і хаотичну динаміку, підштовхнуло також деяких економістів до того, щоб зацікавитися цією областю. Фактично в літературі є багато прикладів нелінійних економічних моделей, які демонструють хаотичну динаміку. Проте в літературі немає стандартного визначення хаосу. Тому можна лише перерахувати типові характерні риси цього явища.

Нелінійність. Якщо процес лінійний, він не може бути хаотичним.

Детермінізм. У основі явища хаосу лежать детерміновані, а не вірогідності правила, яким слідує кожен майбутній стан системи.

Чутливість до початкових умов. Мала зміна в початковому стані системи може провести до радикально відмінної поведінки і іншого кінцевого стану. Ця властивість має на увазі, що дві траєкторії, що починаються в двох різних, але близьких точках, з часом розбігаються експоненціально. Ця критична залежність від початкових умов, і те, що експериментальні початкові умови ніколи не відомі повністю, роблять ці системи внутрішньо непередбачуваними. *Стійка нерегулярність.* Прихований порядок, що включає велику або нескінченну кількість нестійких періодичних проявів, характеризує хаотичне явище. Цей прихований порядок формує інфраструктуру системи: хаотичний (дивний) аттрактор. Динаміка в хаотичному аттракторі ергодична. Це має на увазі, що протягом своєї еволюції система опиняється в невеликій околиці кожної точки на кожній з нестійких періодичних траєкторій, що знаходяться в межах хаотичного аттрактора. Довгостроковий прогноз, але не управління, здебільшого неможливе. Через чутливість до початкових умов, які можуть бути відомі тільки з кінцевим ступенем точності. Не дивлячись на труднощі управління хаотичними системами, багато дослідників займаються пошуком методів і засобів управління ними. Управління нелінійними системами може насправді виявитися легше, ніж управління лінійними, оскільки можливо лише за допомогою невеликого поштовху викликати велику зміну в системі (за рахунок чутливості до початкових умов). Фактично, керовані хаотичні системи володіють перевагою гнучкості: будь-яка з безлічі різних траєкторій може бути стабілізована невеликим управлінням, і можливо перемкнути систему з однієї періодичної траєкторії на іншу за допомогою дуже невеликої корекції її параметрів, без різкої зміни конфігурації системи або створення додаткових перешкод. Отже, це багатство можливої поведінки (нескінченних нестійких траєкторій) в хаотичних системах може бути використане для розширення уявлень про динамічну в системі таким чином, який неможливий, якщо еволюція системи не є хаотичний. Це означає (якщо ми хочемо розглянути економічні додатки хаосу), що невеликі зміни в економічній політиці можуть мати великі наслідки для суспільного добробуту. Отже, і в економіці управління динамічною періодичною системою є важливою задачею завдяки природі економічних коефіцієнтів, що змінюється в часі. Зокрема, управління динамічними системами і переклад їх від хаотичного і непередбачуваного до періодичної і передбаченої поведінки є інтенсивною областю дослідження протягом останніх років.

Розглянемо засоби виявлення стабілізації нестійких періодичних траєкторій (НПТ).

Траєкторії, які граничать з нестійкою періодичною траєкторією, розходяться від неї і є нестійкими. Через нестійкість динамічної системи їх нелегко знайти. Хоча періодичні орбіти відкривають підхід до розуміння хаотичної динаміки, довелося докласти багато зусиль, щоб розробити методи виявлення цих траєкторій, не дивлячись на їх нестабільність як в тимчасових рядах, так і в системах, що вивчаються, і відрізнити їх від стохастичної поведінки.

Аналіз повторень.

У економіці є численні роботи — як теоретичні, так і емпіричні — щодо виявлення складної або хаотичної поведінки. Беручи до уваги, що стандартні методи, наприклад спектральний аналіз або функції автокореляції, не можуть розрізнити, чи згенерував часовий ряд детермінованим або стохастичним механізмом, цих складних засоби виявляється недосить, щоб забезпечувати надійні результати. Фактично, тест вимірювання кореляції, метричний підхід, розроблений Grassberqer і Procaccia, широко використовується в природних науках, і звично разом із зв'язаними процедурами, наприклад обчисленням показника Ляпунова, але його застосування до економічних даних було проблематичним. Реалізація цих алгоритмів пов'язана із специфічними вимогами як, наприклад, розширена безліч даних, яка не завжди доступна в експерименті, стаціонарність досліджуваних даних, тоді як багато тимчасових рядів нелінійне або не поводиться як гауссови.

Таким чином, застосування метричного підходу до порівняно невеликих зашумленних даних, які типові в економіці, дуже сумнівно. Щоб уникнути цих труднощів метричного підходу, був розроблений новий метод для виявлення детермінованого хаосу, названий *топологічним* (Mindlin et al., 1990, 1991;Tufillaroetal.).

Топологічний метод має декілька важливих переваг перед метричним методом:

1. Може застосовуватися до порівняно невеликих набором даних, які, наприклад, типові в економіці і фінансах.
2. Стійкий до шуму.
3. Оскільки топологічний аналіз підтримує тимчасове впорядкування даних, він здатний забезпечити додаткову інформацію про основну систему, що генерує хаотичну поведінку.
4. Можлива реконструкція дивного аттрактора.

Крім того, виявлення інваріантів топологічним методом дозволяє визначати моделі, що пояснюють дані, а послідовна топологічна класифікація хаотичних множин є перспективним кроком в розробці моделей, пророчих. Доведення нелінійних систем.

Аналіз повторень є прикладом топологічного методу і може представити корисну методологію виявлення нестаціонарної хаотичної поведінки і біфукації в тимчасових рядах.

Спочатку цей метод використовувався для виявлення повернень (циклів) і нестаціонарності тимчасових рядів, потім аналіз повторень був застосований до дослідження хаотичних систем, оскільки j повернення в поведінці — одна з найважливіших характеристик Р. хаотичних систем.

За допомогою *графіка повторень* (ГП) можливо знайти кореляцію в даних, яку неможливо знайти в початковому тимчасовому ряду. Цей метод не вимагає яких-небудь припущень про стаціонарність тимчасового ряду, припущень про основні рівняння руху і розподіленої поведінки. Він достатньо нечутливий до шуму, а графік повторень для динамічної системи зберігає інваріанти її динаміки. Він виявляється особливо корисним для випадків, в яких обмежена доступність даних і може бути порівнянний по ефективності з класичними методами аналізу хаотичних даних, особливо через свою здатність знаходити біфукацию. Аналіз повторень особливо придатний для дослідження економічних тимчасових рядів, для яких характерні шуми, недолік даних, і які представляють результати діяльності багатовимірних систем.

Графік повторень - це двовимірне представлення траєкторії. Він формується двовимірною $M \times M$ матрицею, де M- кількість входжень векторів $Y(i)$, одержаних при затримці вхідного сигналу. У матриці величина елементу з координатами (i, j) - це евклідова відстань між векторамии $Y(i)$ і $Y(j)$. У цій матриці горизонтальна вісь представляє індекс часу $Y(i)$, а вертикальна — зрушення за часоми $Y(j)$. У елементі масиву (i, j) точка проставляється, якщо $Y(i)$ достатньо близько до $Y(j)$; близькість між $Y(i)$ и $Y(j)$ виражається співвідношенням

$$\| Y(i) - Y(j) \| \leq d$$

де d — задане число.

Є два типи графіків повторень: пороговий (також відомий як матриця повторення) і безпороговий. Порогові графіки ГП симетричні щодо основної діагоналі. Крапки в цьому масиві розфарбовані згідно відстані між векторами. Звичайно, темний колір показує великі відстані, а світлий — короткі. Якщо текстура в межах такого блоку гомогенна, можна прийняти гіпотезу про стаціонарність даного сигналу протягом відповідного періоду часу; нестаціонарні системи викликають зміни в розподілі точок повторення на графіку, які відображаються світлішими областями.

Аналіз повторень використовується також для виявлення нестійких періодичних траєкторій в хаотичних тимчасових рядах. Bradley і Mantilla (2001) наводять приклад додатку ГП для послідовного аналізу хаотичного тимчасового ряду. Образи, що повторюються, формують блоки в графіку. Ці блоки відображають інтервали часу, коли траєкторія рухається уподовж або біля відповідного НПТ.

Метод графіка повторень не знайшов значної популярності, оскільки його графічний результат нелегко інтерпретувати. Zbilut J. P. запропонував метод статистичної квантифікації ГП — квантфікаційний аналіз повторень (КАП). Він визначає міру діагональних сегментів в графіках повторення. Ці заходи є показниками повторення, детермінізму, середньої довжини діагональних структур, ентропії і напряму.

Для того, щоб знайти НПТ, ми повинні створити графік повторень для траєкторії хаотичного аттрактора, проаналізувати структуру повторень, використати також квантифікацію ГП і інформацію, витягнуту з повторень, щоб індексуватися траєкторію і знайти відповідні значення змінних стану.

Крім того, ГП представляє корисний спосіб порівняння двох хаотичних систем. Наприклад, якщо ГП для двох траєкторій мають різну побудову блоків, вони не можуть відповідати одній і тій же системі, навпаки, ідентична блокова структура ГП визначає ідентичну динаміку. Аналіз повторень є корисним засобом для визначення нестійких періодичних траєкторій в хаотичних тимчасових рядах даних і біфуркаціоної поведінки, а також для встановлення виду динаміки системи. Розглянемо основи *теорії Флоке (Floquet).*

Для виявлення нестійкої і хаотичної поведінки систем, для яких відома нелінійна динамічна модель, використовується теорія Флоке, що розширює теорію стійкості Ляпунова.

Управління системою, періодичною в часі, є складною задачею через природу коефіцієнтів, що змінюється в часі. Основна проблема полягає у тому, що власні значення періодичної матриці, що змінюються в часі, не визначають стійкість системи, і стандартні методи теорії управління не можуть застосовуватися безпосередньо.

Отже, один з можливих методів рішення таких проблем полягає в створенні еквівалентних, інваріантних в часі систем, придатних для застосування стандартних методів. Система, F інваріантна в часі, може бути одержана при використовуванні перетворення Ляпунова - Флоке $(L-F)$. Теорія Флоке відома зараз як теорія Флоке - Ляпунова, яка перетворює лінійну частину періодичного квазілінійного рівняння в інваріантну в часі форму, що зберігає початкові динамічні характеристики системи.

Стійкість системи визначається власними векторами матриці переходу, так що якщо речовинна частина всіх множників Флоке негативна, рішення стійке, тоді як позитивні показники указують на нестабільність.

Пропоновані методи повинні забезпечити корисний інструментарій для спрощення лінійних і нелінійних періодичних систем.. Оскільки методи аналізу і управління для систем, що не змінюються в часі, розроблені достатньо добре, тепер стане можливим використовувати ці методи і для періодичних в часі систем.

Цей метод широко використовується для оцінки стійкості систем малої розмірності з періодичними коефіцієнтами. Для систем, які характеризуються великим числом ступенів свободи, пропонується новий метод, що включає аналіз Флоке для оцінки домінуючих власних значень матриці переходу, використовуючи алгоритм Арнольді (Arnoldi), без явного обчислення цієї матриці. Цей метод значно більш ефективний в обчислювальному відношенні, ніж класичний і ідеально підходить для систем з великим числом ступенів свободи.

Теорія Флоке може бути використана для аналізу біфуркації поведінки, що забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр поволі змінюємося з часом.

Розглянемо систему лінійних, однорідних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами:

$$x' = G(t)x \quad (4.1)$$

де $G(t)$ - дійсна $m \times m$ матрична функція, $t \in R$;

x- вектор-стовпець розмірності m.

$G(t)$ - періодична функція з мінімальним періодом T.

Розглянемо довільну множину m рішень системи (1), лінійно незалежних для будь-якого $t \in R$:

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t).$$

Матриця $X(t)$, складена із стовпців $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)$ називається *фундаментальною матрицею.*

Якщо $X(0) = E$, де E - одинична $m \times m$ матриця, то $X(t)$ називається *головною фундаментальною матрицею.*

Матриця

$$F = X(T) \quad (4.2)$$

називається *матрицею переходу Флоке,* або *монодромною матрицею.*

Власні значення матриці F називають *характеристичними множниками системи (2)*, або *мультиплікаторами системи.*

Властивості мультиплікаторів системи ґрунтуються на наступній теоремі:

Число 1 є мультиплікатором системи (1) в тому і лише в тому випадку, якщо існує таке рішення $x(t)$*, не рівне тотожне нулю на всій дійсній осі, що*

$$x(t+T) = \lambda x(t),\ t \in R \quad (4.3)$$

З теореми, зокрема, витікає, що

1) система (1) має періодичне рішення в тому і лише тому випадку, якщо 1 є її мультиплікатором;

2) всі рішення системи є періодичними, якщо матриця переходу Флоке дорівнює одиничній: $\Phi(T) = E$.

Типи біфуркації визначається залежно від способу, яким мультиплікатори Флоке покидають одиничне коло. Принципово різними є три випадки:

а) якщо мультиплікатор Флоке залишає одиничне коло через +1, ми одержуємо транскритичну, симетрично розривну біфуркацію або циклічну складку;

б) якщо мультиплікатор Флоке проходить через -1, відбувається подвоєння періоду біфуркаціє (перекинута біфуркація);

в) якщо комплексно зв'язані мультиплікатори Флоке залишають одиничне коло уздовж уявної осі, то має місце вторинна біфуркація Хопфа (Hopf).

Обчислення матриці переходу Флоке зіставляє всі стани системи в даний момент з тими ж станами на один період пізніше. Розмір цієї матриці переходу рівний загальному числу станів системи.

Аналіз характеристичних множників дозволяє визначити стійкість рішень системи (1). Найближчі до уявної осі з будь-якої сторони власні значення виконують важливу роль і називаються провідними власними значеннями. Фактично, якщо всі характеристичні множники розташовані в одиничному колі на комплексній площині, то всі рішення збігаються до нуля. Якщо який-небудь з характеристичних множників знаходиться за межами одиничного кола, то існує необмежене рішення. Якщо всі множники знаходяться всередині або на одиничному колі, то умови стійкості визначаються відмінністю між і геометричної кратністю алгебри множників, розташованих на одиничному крузі. Алгебраїчна кратність власного значення — це його кратність як рішення характеристичного рівняння, а геометрична кратність — це розмірність підпростору, визначуваного лінійно незалежними власними векторами, відповідними даному власному значенню. Геометрична кратність власного значення завжди не більше його алгебраїчної кратності.

Теорія Флоке активно використовується для дослідження моделей економічної динаміки, зокрема, моделі Хикса і ін.

Розглянемо тепер *можливості об'єднання* описаних вище двох інструментів у області аналізу тимчасових рядів.

Основна ідея такого об'єднання була виказана Auerbach et al. Мета полягала в тому, щоб:

а) витягувати всі періодичні траєкторії в експериментальному хаотичному тимчасовому ряду і обчислити їх стійкість за допомогою показника Ляпунова;

б) ця інформація може бути використана для того, щоб описати важливі властивості загальних хаотичних множин. Передбачалося, що тимчасові ряди достатньо великі, щоб можна було виділити нестійкі періодичні орбіти з безлічі хаотичних спостережень порядку n, залежно від об'єму доступних даних. Після локалізації періодичних орбіт методами, схожими на графік повторень, для обчислення власних значень і власних векторів для кожної точки періодичного циклу використовувалася матриця Якобі.

Об'єднання аналізу повторень і теорії Флоке дозволяє подолати деякий недолік цього методу.

Фактично, для даного тимчасового ряду ми могли б використовувати аналіз повторень, щоб знайти хаотичну поведінку, зокрема, локалізувати нестійкі орбіти і біфуркацію. Як сказано вище, виявлення періодичних орбіт в експериментальних даних — центральний момент у області управління хаосом. Крім того, нестійкі періодичні орбіти, що входять до складу хаотичного аттрактора, є основними для розуміння хаотичної динаміки. Нестійкість, характерна для цих траєкторій, утрудняє їх виявлення. Інструментальні засоби розпізнавання НПТ в тимчасових рядах дотепер не розроблені.

Використовуючи графік повторень, ми можемо виділити періодичні траєкторії з даного тимчасового ряду, і тепер необхідно обчислити їх стійкість. Це важливий момент, оскільки властивості стійкості НПТ визначають, яким чином траєкторії переміщаються уподовж і біля аттрактора. Питання стійкості може бути вирішений з використанням теорії Флоке. Обчислюючи власні значення і власні вектори матриці, ми можемо визначити стійкість періодичної орбіти.

Однією з цікавих проблем є *управління хаосом.*

Термін «управління хаосом» був введений E. Ott, З. Grebogi і J. Yorke в опублікованій ними в журналі Physical Review Letters (1990 р.) статті «Управління хаосом». Ключовим елементом цієї статті була демонстрація того, що значущої зміни в поведінці хаотичної системи можна досягти за допомогою невеликої, найдрібнішої корекції параметрів системи і, зокрема, ця корекція може бути зроблена без впливу на властивості системи. Після виходу цієї статті управління хаотичними системами привернуло підвищену увагу дослідників з інших областей.

В цілому методи управління хаосом можуть бути розділені на два основні класи:

1) замкнутий цикл, або методи зворотного зв'язку;

2) відкритий цикл, або методи без зворотного зв'язку, де дії залежать від інформації про стан. Ідея цього методу в тому, до щоб змінювати поведінку нелінійних систем, прикладаючи правильно вибрану вхідну функцію.

Далі можна розділити методи на дискретні і безперервні в *часі*, а також методи, в яких дії додаються до параметрів і до динамічних змінних відповідно.

Розглянемо *методи замкнутого циклу (із зворотним зв'язком).* Цей клас включає ті методи, які вибирають дію, засновану на знанні про стан системи, і орієнтовані на управління заданою динамікою. Серед них ми можемо розглянути так званий випадково пропорційний зворотний зв'язок (OGY) і метод, запропонований Pyragas, в якому застосовується затриманий зворотний зв'язок з однією із змінних системи. Всі ці методи є модально незалежними в тому значенні, що знання про систему, необхідне, для вибору дії може бути одержане за допомогою простого спостереження за системою протягом деякого прийнятного часу навчання.

Метод OGY ґрунтується на визначенні періодичної траєкторії і застосуванні невеликих дій до параметрів системи, щоб стабілізувати нестійкі стани або нестійкі періодичні траєкторії. Хоча ці дії додається тільки тоді, коли система близька до бажаної періодичної траєкторії і доступний єдиний часовий ряд, використовування його для стабілізації обший стійкій періодичній траєкторії (НПТ) вимагає наявності точної інформації про цільову траєкторію. Отже, цей метод неадекватний для нестаціонарних систем або задач вибору мети. Цей метод вимагає, крім того, первинно великих змін параметрів і обмежений при стабілізації нестійких періодичних фіксованих точок сідла. Хоча метод OGY добре зрозумілий з теоретичної точки зору, експериментальна реалізація його серйозно обмежується тим, що всі величини, необхідні для обчислення значень параметрів управління системою, безпосередньо не задаються в експериментальній послідовності даних, і щоб виконувати управління, необхідно застосувати складний аналіз даних. У протилежність методу OGY метод управління хаосом, запропонований Pyragas, може легко бути застосований до експериментальних систем, де рівняння руху невідомі. Основна ідея методу Pyragas полягає в простому використовуванні затриманого стану як елементу зворотного зв'язку. Перевага цього методу у тому, що він не вимагає повної інформації про цільову НПТ; але в ньому використовується постійна затримка часу в блоці зворотного зв'язку.

Розглянемо *методи відкритого циклу (без зворотного зв'язку).*

Цей клас включає ті стратегії, в яких розглядаються ефекти зовнішніх дій (незалежно від знань про фактичний динамічний стан) на еволюцію системи. Періодичні або стохастичні дії розглядаються як причина корінних змін в динаміці хаотичної системи, що приводять, кінець кінцем, до стабілізації деякої періодичної поведінки. Ці підходи, проте, в загальному випадку обмежені тим, що їх дія не є цілеорієнтірованим, тобто кінцевий періодичний стан не може бути визначене управляючою системою. Критичні моменти для всіх таких методів управління хаосом наступні:

а) припущення про те, що хаос істотно залежимо від малих змін в поточному стані і, отже, стан системи непередбачуваний в довгому періоді, також має на увазі, що поведінка системи може бути змінене використовуванням невеликих обурень;

б) хаотична множина, в якому знаходиться траєкторія хаотичного процесу, може містити в собі багато нестійких періодичних траєкторій, так що, на відміну від лінійної системи, в якій заданий параметр припускає тільки один тип руху, в нелінійній системі одночасно можливе багато різних напрямів еволюції;

в) через ергодичності траєкторія відвідує околицю кожної періодичних траєкторій (орбіт), що формують аттрактор.

Управління хаотичними системами має на увазі стабілізацію нестійких періодичних траєкторій. Основна ідея полягає в очікуванні природного підходу хаотичної траєкторії до бажаної періодичної поведінки, і коли траєкторія наближається до цієї бажаної періодичної траєкторії, вставленої в аттрактор, необхідно надати невеликі дії для стабілізації такої орбіти. Цей підхід використовує ідею про те, що критична чутливість хаотичної системи до зміни в своїх початкових умовах може бути, фактично, дуже бажаної в практичних експериментальних ситуаціях. Представимо *різні економічні додатки теорії хаосу.*

Історично економісти використовували лінійні рівняння, щоб моделювати економічні явища, оскільки з ними достатньо легко поводитися і вони звичайно дають єдине рішення. У міру того, як математичні і статистичні інструментальні засоби, використовувані економістами, ставали складнішими, стало неможливо ігнорувати той факт, що багато важливих і цікавих явищ не піддаються такій лінійній обробці. Отже, управління, принаймні, деякими економічними процесами стає одній з найважливіших і значніших задач, що зустрічаються економістам. Важливі явища, для яких лінійні моделі не підходять, включають депресії і періоди підйому, спалахи цін на фондовій біржі і відповідні крахи, стійкі зсуви валютного курсу, регулярні і нерегулярні ділові цикли. Отже, фахівці в економічній теорії звертаються до дослідження нелінійної динаміки і, по можливості, інструментів теорії хаосу, щоб моделювати ці і інші явища.

Фактично недавно з'явилися деякі додатки хаосу в методах управління економічними системами, розглядаючи розпізнавання і управління циклічними явищами і оцінку складної динаміки як засоби, наприклад, виявлення ділового циклу, сезонних змін в метеорології і варіації популяцій в екології. Приклади додатків: Holyst et at. розробили прикладний метод Ott Greboqi-Yorke для моделювання поведінки двох конкуруючих фірм; Kopel показав, використовуючи просту модель ринкової динаміки, що розвивається, як хаотична поведінка може управлятися невеликою зміною параметра, який доступний ЛПР, і як фірми можуть поліпшити своє функціонування, використовуючи метод цільового управління. Xu et al. розробив метод виявлення траєкторій типа НПТ в хаотичному тимчасовому ряду моделі ділового циклу Kaldor. Kaas довів, що в межах макроекономічної не рівноважної моделі, стійкі і прості адаптивні політики не здатні стабілізувати ефективні стійкі стани і приводять до періодичних або нерегулярних коливань для великої множини параметрів управління. Додаток методів управління до хаотичних динамічних систем показує, що уряд може, у принципі, стабілізувати нестійку рівновагу Вальраса протягом короткого часу, змінюючи податкові показники або державні витрати.

Лінійні моделі стають в корінні невірними, вводячи в оману, перекошуючи розуміння економіки. У цьому контексті хаос є радикальною зміною перспективи розвитку економічної науки, оскільки не тільки здатний пояснювати нерегулярну динамічну поведінку, яка характеризує економічні явища, але також забезпечує корисний засіб для стабілізації нелінійних динамічних систем. Дійсно, багато нелінійних динамічних систем, навіть якщо вони показують дуже нерегулярну поведінку, фактично піддаються стабілізації, ніж істотно відрізняються від системи з нерегулярністю, залежною винятково від стохастичних обурень. Хаотичні системи показують безперервну залежність від параметрів, а управління ними полягає в невеликих змінах в цих параметрах, які ведуть до змін в динамічних властивостях моделі. Деякі з цих параметрів представляють правила економічної теорії, як, наприклад, ставка оподаткування, темп фінансового зростання (приріст) або державні витрати, і встановлюються фахівцями в цій області. Отже, уряд має значно вплив на динамічні результати.

Використовуючи такі фундаментальні характеристики хаотичних систем, як чутливість до початкових умов і наявність нестійких траєкторій, уряд може добитися результатів лише невеликим втручанням. Отже, фахівці в політиці, які хочуть добитися якнайкращого результату в зростанні зайнятості, зростанні добробуту, не можуть використовувати економічні моделі, засновані на лінійності і припущенні простоти традиційних економічних моделей. Втручання політики, навпаки, повинне бути засноване на міркуваннях про те, що економіка є складною системою. Звичайно, це має на увазі використовування типових інструментальних засобів дослідження складних систем.

З цієї точки зору аналіз повторень і теорія Флоке є корисними інструментами аналізу і управління складною системою. Крім того, в аналізі тимчасових рядів запропонована методологія, комбіноване використовування цих інструментальних засобів дозволяє долати труднощі прикладного використовування традиційних інструментів, а також деяких відоміших складних способів, як, наприклад, показник Ляпунова. Фактично, наприклад, аналіз повторень виявляється особливо корисним для випадків, в яких обмежений доступ до даних, для виявлення нестійких періодичних траєкторій, оскільки він зберігає незмінність динаміки. Теорія Флоке забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр поволі змінюється з часом. Тоді як інші методи можуть бути використані для: систем, де періодичні коефіцієнти можуть бути виражені залежно від невеликого параметра, техніка перетворення Ляпунова — Флоке не має такого обмеження, і, отже, вона може бути застосована і до загальної періодичної системи.

Тема5: ТРЕНДОВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Лекція 5. Траєкторії та динамічні ряди

В основі динамічного аналізу економічних систем, явищ, процесів лежить поняття *траєкторії.*

Траєкторія - це функція від часу, яка описує стан об'єкта дослідження (значення деякого показника, що розглядається):

$Q=Q(t)$, $t \in [0,T]$

де **[0,T]** - скінченний відрізок часу, на якому визначена траєкторія.

В теоретичних моделях економічної динаміки досліджуються також нескінченні траєкторії $Q=Q(t)$,

для яких $t \in [0,\infty)$. В ретроспективному аналізі можуть бути досліджені траєкторії $Q=Q(t)$, для яких $t \in [T_1, T_2]$, де початковий момент часу T_1 може бути від'ємним.

При дослідженні траєкторій час t можна враховувати *дискретно* (моментами, інтервалами) або *неперервно.* Якщо час враховувати дискретно, то моделі економічної динаміки будуть описані скінченно-різницевими рівняннями, якщо ж неперервно - диференціальними рівняннями.

Динамічний (часовий) ряд - це таблиця значень траєкторії, для якої час змінюється дискретно.

За часовою ознакою економічні показники поділяють на *моментні* та *інтервальні.* Моментні показники дають кількісну характеристику об'єкту дослідження на певний момент часу: чисельність населення Львівської області на початок 2007 року, курс гривні щодо євро на 28 січня 2007 року, об'єм основних фондів деякого підприємства на кінець 2006 року. Інтервальні показники характеризують об'єкт дослідження за певний період часу: обсяг виготовленої продукції деякого підприємства за рік, прибуток за місяць, виручка торговельного підприємства за один робочий день.

Інтервальні показники володіють властивістю динамічної adи- тивності, тобто для них можна застосовувати операцію сумування при переході від менших інтервалів часу до більш тривалих. Моментні показники не є адитивними у часі.

Відповідно до показника, значення якого утворює траєкторію, динамічні ряди поділяють на моментні та інтервальні.

У математичній статистиці динамічний ряд розглядають як реалізацію випадкового процесу. У стаціонарних випадкових процесах, для яких характерна рівновага щодо певного середнього рівня, основні характеристики обчислюють за однією реалізацією процесу (за результатами одного досліду). Проте динамічні ряди економічних показників здебільшого нестаціонарні, їм властиві тенденції, які відображають динамічність економіки. До цих тенденцій можна віднести:

- нарощування виробничих ресурсів;
- підвищення науково-технічного рівня;
- вдосконалення управління системою тощо.

Разом з тим, поряд з динамічністю економічним процесам властива інерційність, яка насамперед проявляється у типі розвитку (напрямок, темпи, коливання).

Характеристики швидкості та інтенсивності динаміки

Динамічний ряд містить перелік моментів часу $t_0, t_1, t_2 \ldots, t_t$ та відповідних значень траєкторії $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots, Q_T$.Значення траєкторії $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots, Q_T$ називають *рівнями ряду.*

Розрахунок характеристик динаміки ряду ґрунтується на порівнянні рівнів ряду. Рівень ряду**,** відносно якого проводять порівняння, називають *базовим* (базою). База порівняння може бути постійною або змінною. За постійну базу приймають один певний рівень ряду, здебільшого - це початковий рівень 00. Змінною базою служить попередній рівень. Характеристики динаміки, обчислені відносно постійної бази, називають ***базовими***, а характеристики, обчислені відносно змінної бази, - ***ланцюговими***.

Основними показниками економічного розвитку є:

- абсолютний приріст;
- темп зростання;
- темп приросту;
- абсолютне прискорення;
- відносне прискорення.

5.1Абсолютний приріст

Базовий абсолютний приріст:

$$\delta^{t}/_{0} = Q_t - Q_0 \qquad (5.1)$$

Ланцюговий абсолютний приріст:

$$\delta^{t}/_{t-1} = Q_t - Q_{t-1} \qquad (5.2)$$

Абсолютний приріст за одиницю часу характеризує швидкість динаміки. Знак абсолютного приросту засвідчує напрямок динаміки (якщо абсолютний приріст додатний, то значення рівнів ряду зростають, а якщо від’ємний, то спадають).

5.2Темп зростання

Базовий темп зростання:

$$\beta_{t/_0} = \frac{Q_t}{Q_0} \qquad (5.3)$$

Ланцюговий темп зростання:

$$\beta_{t/_{t-1}} = \frac{Q_t}{Q_{t-1}} \qquad (5.4)$$

Темп зростання характеризує інтенсивність динаміки. Темп зростання може бути виражений числом (коефіцієнт зростання) або у відсотках.

1.2.3.Темп приросту

Базовий темп приросту:

$$\rho_{t/_0} = \frac{Q_t - Q_0}{Q_0} \qquad (5.5)$$

Ланцюговий темп приросту:

$$\rho_{t/_{t-1}} = \frac{Q_t - Q_{t-1}}{Q_{t-1}}$$

Темп приросту характеризує відносну швидкість, тобто прискорення динаміки. Темп приросту в прикладних застосуваннях виражають у відсотках.

1.2.4. Абсолютне прискорення

Абсолютне прискорення:

$$\varphi_t = \sigma_{t+1/_t} - \sigma_{t/_{t-1}} \qquad (5.6)$$

Якщо $\varphi_1 > 0$, то спостерігається прискорення динаміки, а якщо $\varphi < 0$, то маємо уповільнення динаміки.

1.2.5. Відносне прискорення

Відносне прискорення:

$$x_t = \frac{\varphi_t}{\varphi_{t/_{t-1}}} \qquad (5.7)$$

Відносне прискорення характеризує темп приросту абсолютного приросту.

Між абсолютними та відносними показниками динаміки існують такі взаємозв’язки:

1. Якщо абсолютні прирости зменшуються або залишаються постійними, то темпи зростання та приросту обов’язково зменшуються.

2. Якщо абсолютні прирости збільшуються, то можливі три випадки зміни темпів зростання та приросту: зменшення, стабільність та збільшення.

3. Якщо темпи зростають, то абсолютні прирости (за^ абсолютною величиною) завжди збільшуються.

4. Якщо темпи спадають, то можливі три випадки зміни абсолютних приростів: зменшення, стабільність та збільшення.

Досліджуючи економічну динаміку можна порівнювати інтенсивність динаміки різних траєкторій. Для цього використовують ***коефіцієнти випередження та еластичності.***

Коефіцієнтом випередження к називають відношення темпів зростання двох динамічних рядів.

За допомогою коефіцієнта випередження порівнюють відносну швидкість динаміки однакового змісту для різних об'єктів або динаміки різного змісту для одного об'єкта. Наприклад, за рік фондоозброєність праці в одній галузі зросла на 50%, а в іншій - на 25%. Тоді коефіцієнт випередження темпу зростання фондо-озброєності першої галузі, порівняно з другою, становить: k=1,5:1,25=1,2.

Для однієї галузі можна порівнювати, наприклад, динаміку фондоозброєності та продуктивності праці. Якщо у певній галузі фондоозброєність зросла на 50%, а продуктивність праці - на 65%, то коефіцієнт випередження зростання продуктивності праці, порівняно із зростанням фондоозброєності, становить: k=1,65:1,50=1,1.

Коефіцієнтом еластичності у називають відношення темпів приросту двох взаємопов'язаних показників.

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться один показник при зміні іншого на 1%.

Наприклад, протягом року ціна на деякий товар зросла на 5%, а попит зменшився на 10%. Тоді цінова еластичність попиту на

-10 - . товар становить: $\gamma = \frac{-10}{5}$ = -2, тобто із зростанням ціни на товар

на 1% попит на цей товар зменшиться на 2%.

Лекція 7.Правила взаємного переходу між базовими та ланцюговими показниками

Для базових та ланцюгових абсолютних показників справедливі такі правила взаємного переходу:

1. Сума послідовних ланцюгових приростів дорівнює базовому абсолютному приросту:

$$\sum_{t=1}^{l} \sigma_{t/_{t-1}} = \sum_{t=1}^{l} (Q_t - Q_{t-1}) = Q_l - Q_0 = \sigma_{l/_0}, l = \overline{2,T}$$

2. Різниця між наступним і попереднім базовими абсолютними приростами дорівнює відповідному ланцюговому абсолютному приросту:

$$\delta_{t/0} - \delta_{t-1/0} = (Q_t - Q_0) - (Q_{t-1} - Q_0) = Q_t - Q_{t-1} = \delta_{t/t-1}, \ t = \overline{2,T} .$$

$$\sigma_{t/_0} - \sigma_{t-1/_0} = (Q_t - Q_0) - (Q_{t-1} - Q_0) = Q_t - Q_{t-1}$$

3. Добуток послідовних ланцюгових темпів зростання дорівнює базовому темпу зростання:

$$\prod_{t=1}^{l} \eta_{t/t-1} = \prod_{t=1}^{l} \frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \frac{Q_l}{Q_0} = \eta_{l/0}, \qquad l = \overline{2,T} .$$

Наслідок. Будь-який член динамічного ряду можна виразити через ***Qo*** та ланцюгові темпи зростання:

$$Q_l = Q_0 \prod_{t=1}^{l} \eta_{t/t-1}, \qquad l = \overline{2,T}.$$

4. Частка від ділення наступного базового темпу зростання на попередній дорівнює відповідному ланцюговому темпу зростання:

$$\frac{\eta_{t/0}}{\eta_{t-1/0}} = \frac{\dfrac{Q_t}{Q_0}}{\dfrac{Q_{t-1}}{Q_0}} = \frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \eta_{t/t-1}, \qquad t = \overline{2,T}.$$

Правила взаємного переходу між базовими та ланцюговими показниками справджуються завдяки адитивності абсолютних приростів та мультиплікативності ланцюгових темпів зростання.

Ланцюгові темпи приросту не володіють властивістю мультиплікативності.

Неперервні характеристики швидкості та інтенсивності динаміки

У разі теоретичного аналізу зручно розглядати час та показники зростання як неперервні величини, що володіють властивістю диференційованості (неперервно-диференційовані величини). Це дає змогу використовувати для характеристики поведінки траєкторії апарат диференціального числення. Такі характеристики економічної динаміки називають *неперервними.*

1. Неперервний абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

2. Неперервний темп приросту:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\hat{\delta}(t)}{Q(t)} = \frac{\dfrac{dQ(t)}{dt}}{Q(t)} = \frac{d\ln Q(t)}{dt}.$$

3. Неперервне абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = \frac{d^2 Q(t)}{dt^2}.$$

4. Неперервне відносне прискорення:

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\hat{\varphi}(t)}{\hat{\delta}(t)} = \frac{\dfrac{d\hat{\delta}(t)}{dt}}{\hat{\delta}(t)} = \frac{d\ln\hat{\delta}(t)}{dt}.$$

Лекція 8. Середні характеристики динаміки

З плином часу абсолютні прирости та темпи зростання динамічних рядів змінюються, тому постає проблема узагальнення характерних динамічному ряду властивостей, узагальнення типових характеристик розвитку. Для узагальнюючого оцінення швидкості та інтенсивності зміни динамічного ряду використовують середні характеристики, серед яких основними є:

1) середній рівень;
2) середній абсолютний приріст;
3) середній темп зростання;
4) середній темп приросту.

Для обчислення середніх характеристик економічної динаміки використовують різні способи, які здебільшого орієнтовані на розв'язування різних змістовних економічних задач.

Середній рівень

Залежно від специфіки динамічного ряду застосовують такі способи обчислення середнього рівня:

1. Для інтервального динамічного ряду, рівні якого динамічно адитивні, використовують ***середню арифметичну просту:***

$$\overline{Q} = \frac{\sum_{t=0}^{T} Q_t}{T+1}.$$

2. Для моментного динамічного ряду середню арифметичну просту обчислюють за формулою:

$$\overline{Q} = \frac{Q_0 + Q_T}{2}.$$

3. Якщо у моментному ряді є T+1 рівень з однаковими інтервалами у часі, то використовують ***середню хронологічну:***

$$\overline{Q} = \frac{\frac{Q_0 + Q_T}{2} + \sum_{t=1}^{T-1} Q_t}{T}.$$

4. Для моментних рядів із змінними інтервалами у часі використовують ***середню арифметичну зважену:***

$$\overline{Q} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Q_t D_t}{\sum_{t=1}^{n} D_t},$$

де D_t -інтервал часу між суміжними моментами;
n - кількість інтервалів часу.

Середній рівень використовують для узагальнення коливних рядів. Наприклад, при аналізі динаміки сільсько-господарського виробництва оперують не річними, а більш сталими середньорічними показниками.

Для обчислення середнього абсолютного приросту, середнього темпу зростання та середнього темпу приросту найчастіше використовують два підходи:

- враховуючи загальний абсолютний приріст за весь період $(\overline{\delta}_1, \overline{\eta}_1, \overline{\rho}_1)$;
- враховуючи суму абсолютних рівнів за період $(\overline{\delta}_2, \overline{\eta}_2, \overline{\rho}_2)$.

Середній абсолютний приріст

Середній абсолютний приріст згідно з першим підходом розраховують за формулою:

$$\overline{\delta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \delta_{t/t-1}}{T} = \frac{Q_T - Q_0}{T}.$$

За другим підходом:

$$\overline{\delta}_2 = \frac{2\sum_{t=1}^{T}\delta_{t/0}}{T(T+1)} = \frac{2\left(\sum_{t}^{T} Q_t - T Q_0\right)}{T(T+1)}.$$

Знаючи δ_2, можна визначити суму значень показника за T інтервалів часу:

$$\sum_{t=1}^{T} Q_t = \frac{T\left(2 Q_0 + (T+1)\overline{\delta}_2\right)}{2}.$$

Середній абсолютний приріст характеризує абсолютну швидкість динаміки.

Якщо, $\overline{\delta}_1 = \overline{\delta}_2$, то ланцюгові абсолютні_ прироcти постійні; якщо $\overline{\delta}_1 > \overline{\delta}_2$ - послідовно зростають; якщо $\overline{\delta}_1 < \overline{\delta}_2$ - послідовно спадають.

Середній темп зростання

Відповідно до першого підходу середній темп зростання розраховують за формулою:

$$\overline{\eta}_1 = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}\eta_{t/t-1}} = \sqrt[T]{\eta_{T/0}} = \sqrt[T]{\frac{Q_T}{Q_0}}.$$

Середній темп зростання $\overline{\eta}_1$ називають ***середнім геометрих-ним темпом зростання.***

За другим підходом $\overline{\eta}_2$ визначають як додатний корінь рівняння порядку Т:

$$\sum_{t=1}^{T}(\overline{\eta}_2)^t = \frac{\sum_{t=1}^{T} Q_t}{Q_0}.$$

Середній темп зростання , називають ***середнім параболічним (поліноміальним) темпом зростання***.

Якщо $\overline{\eta}_1 = \overline{\eta}_2$, то ланцюгові темпи зростання постійні протягом

усього періоду; якщо $\overline{\eta}_1 > \overline{\eta}_2$, то ланцюгові темпи зростання збільшуються; якщо $\overline{\eta}_1 < \overline{\eta}_2$, то ланцюгові темпи зростання зменшуються.

Середній темп приросту

Оскільки $\rho_{t/t-1} = \frac{Q_t - Q_{t-1}}{Q_{t-1}} = \frac{Q_t}{Q_{t-1}} - 1 = \eta_{t/t-1} - 1$, то за першим підходом

$$\overline{\rho}_1 = \overline{\eta}_1 - 1,$$

а за другим – $\overline{\rho}_2 = \overline{\eta}_2 - 1$.

Лекція 9.Типи економічного розвитку та їхні трендові моделі

9.1. Згладжування динамічних рядів і трендові моделі

Загалом у складі динамічного ряду можна виділити чотири компоненти:

1. ***Головна (вікова) тенденція або тренд.***
2. ***Регулярні коливання відносно тренду (цикли).***
3. ***Сезонні коливання відносно тренду.***
4. ***Випадкова компонента, яка відображає вплив факторів стохастичного характеру.***

Однією із найважливіших задач дослідження економічної динаміки є встановлення загальної закономірності (тенденції) розвитку. Для розв’язання цієї задачі використовують різноманітні методи зменшення коливальності ряду, серед яких можна виділити дві групи:

- згладжування ряду за допомогою середніх (методи згладжування);
- аналітичне вирівнювання ряду (моделі тренду).

Суть методів згладжування полягає в укрупненні інтервалів часу та заміні вихідного (первинного) ряду рядом середніх за інтервалами. У середніх коливання рівнів первинного ряду взаємно врівноважуються, внаслідок чого основна тенденція розвитку вирізняється чіткіше.

Серед методів згладжування можна виділити:

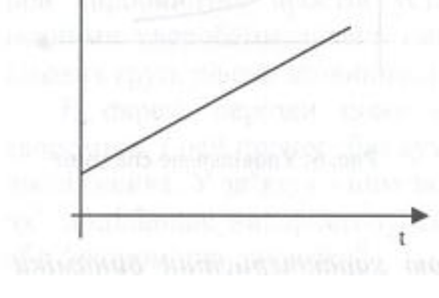
1. метод ступінчастої середньої;
2. метод плинної середньої;
3. метод зваженої плинної середньої;
4. методи подвійного згладжування.

Наприклад, метод плинної середньої полягає в тому, що середні показники розраховують послідовно для періодів [1,l]
[2,l + 1] [3,l+ 2]... . Ряд плинних середніх коротший за первинний на
l-1 рівень.

Аналітичне вирівнювання динамічного ряду - це метод вираження головної тенденції розвитку у вигляді функції показника від часу. Таку функцію називають моделлю тренду.

Таким чином, динамічний ряд, який відображає деякий економічний процес, у межах періоду з більш-менш стабільними умовами розвитку виявляє певну закономірність динаміки - головну тенденцію. Різні економічні процеси або один і той же процес, але у різні періоди свого розвитку, можуть суттєво відрізнятись за характеристиками розвитку. За основу типізації економічного розвитку зручно взяти динаміку абсолютних приростів. У цьому випадку можна виділити щонайменше чотири ***типи економічного розвитку:***

1. ***Рівномірний (постійний, стабільний) розвиток*** - характеризується постійним або близьким до нього абсолютним приростом.



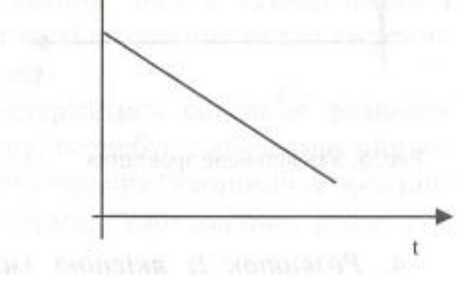
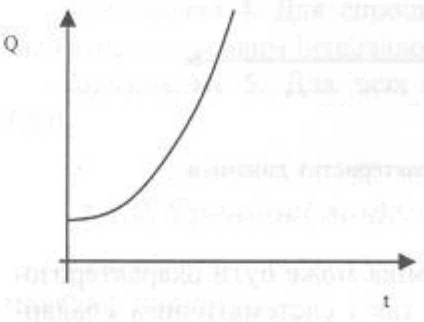


Рис. 1. Рівномірне зростання Рис. 2. Рівномірне спадання

2. ***Прискорений розвиток*** - характеризується абсолютним приростом, який з плином часу збільшується(для спадання - за абсолютною величиною)



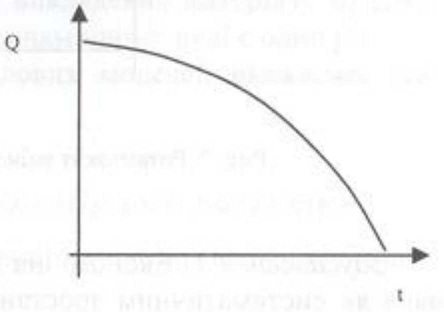
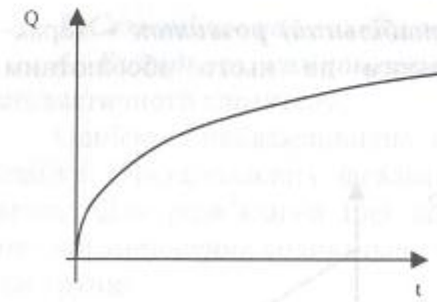


Рис. 3. Прискорене зростання Рис. 4. Прискорене спадання

3. ***Уповільнений розвиток*** - характеризується абсолютним приростом, який з плином часу зменшується (для спадання - за абсолютною величиною)



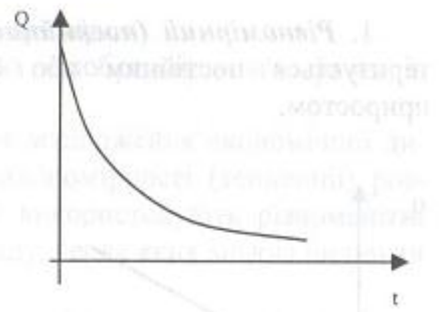


Рис. 5. Уповільнене зростання Рис.6.Уповільнене спадання

4. ***Розвиток із якісною зміною характеристик динаміки протягом періоду часу, який розглядається***

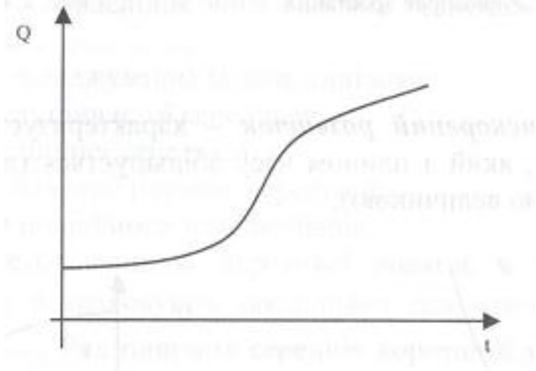


Рис. 7. Розвиток із зміною характеристик динаміки

Зауваження 1. Економічна динаміка може бути охарактеризована як систематичним зростанням, так і систематичним спаданням (зниженням) значень економічних показників. У більшості випадків досліджують прогресуючий розвиток соціально-економічних систем, економіко-математичні моделі використовують для вдосконалення ефективності їхнього функціонування. В цьому випадку більшість показників, які характеризують розвиток системи, зростають. Саме тому в літературі вживають термін "економічне зростання", а напрямок в економіко-математичній науці названо "Аналіз економічного зростання". Проте навіть при прогресуючому розвитку соціально-економічних систем є низка показників, для яких прогресивне "зростання" - це спадання значень показника, наприклад, питомі виробничі витрати, рівень використання ручної праці, рівень виробничого травматизму, втрати при виробництві, простій устаткування, рівень захворюваності певними хворобами, рівень смертності населення серед окремих вікових груп, рівень злочинності тощо.

В окремі періоди може спостерігатись спадання розвитку економіки, і цей процес, без сумніву, потребує свого самостійного дослідження. У зв'язку з цим замість терміна "економічне зростання" доцільніше використовувати термін "економічний розвиток" або "економічна динаміка".

Зауваження 2. Для теоретичних досліджень важливою є властивість гладкості моделі тренду. З огляду на це обираючи трендові моделі перевагу надають диференційованим функціям.

Зауваження 3. На відміну від фактичної траєкторії динаміки Q(t) модель тренду будемо позначати $x(t)$, а замість фактичного значення показника динаміки ряду Q_t будемо використовувати позначення x_t .

Зауваження 4. Для спрощення викладення матеріалу будемо вважати, що часовим інтервалом у динамічному ряді є один рік.

Зауваження 5. Для всіх трендових моделей вважаємо, що $t \geq 0$.

9.2. Трендові моделі рівномірного розвитку

Рівномірний розвиток найчастіше описують лінійною моделлю тренду.

1. *Лінійна модель тренду*:

$$x(t)=a+bt\,,\ a > 0 \qquad (1.1)$$

де a - теоретичний рівень базового року;
b - постійний щорічний абсолютний приріст:

$$b = \frac{dx(t)}{dt} = \hat{\delta}\,.$$

Темп приросту динаміки, яку описують лінійною моделлю тренду,

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d \ln x(t)}{dt} = \frac{b}{a+bt}\,.$$

Якщо апроксимується динаміка минулого розвитку (ретроспективний аналіз), то параметри a і b можуть збігатися з фактичним рівнем базового року Q_0 і середнім абсолютним приростом $\bar{\delta}_1$ відповідно.

При $b > 0$ маємо модель рівномірного зростання, при $b < 0$ - модель рівномірного спадання.

Очевидно, що при $b > 0$ темп приросту з плином часу монотонно спадає й асимптотично наближається до 0, а при $b < 0$ темп приросту (темп спадання) за модулем монотонно зростає в області визначення функції (x(t) ≥ 0).

До рівномірного розвитку відносять також процеси, які характеризуються незначними коливаннями абсолютних приростів. Для опису динаміки таких процесів використовують комбіновані трендові моделі. Розглянемо дві з них.

2. *Комбінована лінійно-гіперболічна модель тренду*:

$$x(t) = a + bt + \frac{c}{t}\,. \qquad (1.2)$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують лінійно-гіперболічною моделлю:

$$\hat{\delta}(t) = b - \frac{c}{t^2}\,.$$

Очевидно, що характер розвитку в початкові періоди (при малих t) залежить від знака параметра с. Якщо $c > 0$, то з плином часу абсолютний приріст монотонно зростає, при $c < 0$

абсолютний приріст з плином часу монотонно спадає. В подальші періоди часу розвиток стабілізується і наближається до рівномірного:

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\delta}(t) = b.$$

3. *Комбінована параболічно-логарифмічна модель тренду:*

$$x(t) = a + b\ln t + c\ln^2 t\,. \quad (1.3)$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують параболічно- логарифмічною моделлю:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{b + 2c\ln t}{t}\,.$$

Характер розвитку визначають за знаком та величиною параметрів *b* та *c.* З плином часу розвиток наближається до рівномірного з нульовим абсолютним приростом:

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\delta}(t) = 0.$$

Недоліком комбінованих трендових моделей (1.2), (1.3) є те, що вони не визначені в початковий період часу $t = 0$.

Лекція10. Трендові моделі прискореного розвитку

Найчастіше прискорений розвиток описують показниковою та експоненційною моделями тренду.

1. *Показникову модель тренду*

$$x(t) = a(1+b)^t, \quad a > 0 \quad (1.4)$$

використовують для опису дискретних процесів. У цій моделі:
a - теоретичний початковий рівень;
$b = p$ — дискретний темп приросту.

2. *Експоненційну модель тренду*

$$x(t) = ae^{bt}, \quad a > 0 \quad (1.5)$$

використовують для опису неперервних процесів. У цій моделі:
a - теоретичний початковий рівень;
$b = p$ - неперервний темп приросту:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d\ln x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt) = b.$$

При $b > 0$ трендові моделі (1.4), (1.5) описують прискорене зростання, а при $-1 < b < 0$ - прискорене спадання. Проаналізуємо модель для випадку $b > 0$.

Абсолютні прирости $\hat{\delta}(t)$ динаміки, яку описують за допомогою моделей (1.4), (1.5), неперервно зростають:

- для моделі (1.4)

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = a(1+b)^t \ln(1+b) = (a\ln(1+b))(1+b)^t\,;$$

- для моделі (1.5)

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = abe^{bt}.$$

Зауважимо, що при вирівнюванні динамічного ряду за допомогою показникової функції (1.4), яка збігається з експонен- ційною (1.5), значення параметра b не обов'язково має бути рівне середньому темпу приросту $\overline{\rho}_1$, одержаному за формулою

$$\overline{\rho}_1 = \overline{\eta}_1 - 1 = \sqrt[t]{\frac{Q_t}{Q_0}} - 1$$

і не обов'язково, щоб $a = Q_0$.

Порівняємо два еквівалентні представлення (1.4), (1.5) трендової моделі однієї і тої ж траєкторії x(t):

$$a(1+b)^t = ae^{bt}, \qquad 1+b = e^b, \qquad 1+\rho = e^{\hat{\rho}}.$$

Розкладаючи функцію e^x в степеневий ряд Тейлора-Маклорена, маємо

$$e^{\hat{\rho}} = 1 + \frac{\hat{\rho}}{1!} + \frac{\hat{\rho}^2}{2!} + \ldots + \frac{\hat{\rho}^n}{n!} + \ldots;$$

$$1+\rho = 1+\hat{\rho}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\hat{\rho}^i}{i!},$$

тобто

$$1+\rho > 1+\hat{\rho}, \quad \rho > \hat{\rho}.$$

Отже, лише при достатньо малих значеннях p і $\acute{p}$ та обмеженому t еквівалентні представлення показникової та експоненціальної функцій можна рахувати еквівалентними моделями тренду.

Наприклад, при $b = 0{,}05$ і $t = 5 (1+b)^t \approx 1{,}276;\ e^{bt} \approx 1{,}284$, а при $b = 0{,}10$ і $t = 20$ $(1+b)^t \approx 6{,}724;$ $e^{bt} \approx 7{,}389$.

У першому випадку різниця становить 0,008, тобто менше одного відсоткового пункту, у другому різниця становить 0,665, тобто більше 66 відсоткових пунктів.

3. Трендові моделі (1.4), (1.5) описують економічний розвиток з постійною відносною швидкістю динаміки. В рамках прискореного розвитку можна виділити динаміку з постійним абсолютним прискоренням φ. Такий розвиток описують *трендовою моделлю у вигляді параболи другого порядку:*

$x(t) = a + bt + ct^2$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. (1.6)

Абсолютний приріст динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.6):

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = b + 2ct.$$

Абсолютне прискорення динаміки

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2c = const.$$

Темп приросту динаміки:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d\ln x(t)}{dt} = \frac{b+2ct}{a+bt+ct^2}.$$

Темп приросту динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.6), може змінюватись двома способами:

1) монотонно спадає;

2) на початковому інтервалі часу зростає, а потім спадає. Дослідимо зміну темпу приросту динаміки, яку описують

моделлю (1.6), тобто знайдемо проміжки монотонності функції

$$\hat{\rho}(t) = \frac{b + 2ct}{a + bt + ct^2}.$$

Для цього необхідно розв'язати систему нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d\hat{\rho}(t)}{dt} > 0 \\ \dfrac{d\hat{\rho}(t)}{dt} < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{2c(a + bt + ct^2) - (b + 2ct)(b + 2ct)}{(a + bt + ct^2)^2}.$$

Отже, знак $\dfrac{d\hat{\rho}(t)}{dt}$ збігається зі знаком чисельника *dt*

$$2ac + 2bct + 2c^2t^2 - b^2 - 4bct - 4c^2t^2 = -2c^2t^2 - 2bct + 2ac - b^2.$$

Знайдемо проміжки знакосталості параболи

$$y(t) = -2c^2t^2 - 2bct + (2ac - b^2).$$

$$2c^2t^2 - 2bct + (2ac - b^2) = 0;$$

$$2c^2t^2 + 2bct - (2ac - b^2) = 0;$$

$$D = (2bc)^2 + 4 \cdot 2c^2 \cdot (2ac - b^2) = 4b^2c^2 + 16ac^3 - 8b^2c^2 =$$

$$= 16ac^3 - 4b^2c^2;$$

$$D = 4c^2(4ac - b^2).$$

Якщо $4ac-b^2 <0$, то парабола $y(t)=-2c^2t^2-2bct+(2ac-b^2)$
коренів не має і вона завжди від'ємна. До речі, при
$t > 0$ $y(t) = -2c^2t^2 - 2bct + (2ac - b^2) < 0$, якщо $2ac -b^2 <0$, тобто
$2ac < b^2$.

Якщо ж $4ac-b \geq 0$, то парабола $y(t)$ має два корені:

$$t_{1,2} = \frac{-2bc \pm 2c\sqrt{4ac - b^2}}{4c^2} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}}{2c},$$

серед яких при додатних параметрах b,c і $2ac>b^2$ лише один додатний:

$$t_0 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}}{2c}.$$

В цій точці $p(t)$ досягає свого максимуму і відбувається перехід зростання на спадання.
Отже:

1. Якщо $2ac <b^2$, то $p(t)$ монотонно спадає на всьому інтервалі [0,оо).
2. Якщо $2ac>b^2$, то на проміжку $\left[0, \dfrac{-b + \sqrt{4ac - b^2}}{2c}\right]$ $\hat{\rho}(t)$

монотонно зростає, а на проміжку $\left[\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}}{2c},\infty\right)$ монотонно спадає.

Трендова модель (1.6) добре відображає основні тенденції розвитку багатьох економічних процесів на сучасному етапі, коли абсолютні прирости продовжують збільшуватись, а темпи приросту спадають.

3. Більш широкими апроксимаційними властивостями володіють трендові моделі, які описуються многочленами вищих порядків. Так, наприклад, *трендова модель у вигляді параболи третього порядку*:

$$x(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \qquad (1.7)$$

при додатних параметрах a, b, c, d має зростаючий абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t) = b + 2ct + 3dt^2,$$

зростаюче абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = 2c + 6dt,$$

і постійний приріст абсолютного прискорення:

$$\frac{d\hat{\varphi}(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} = 6d = const.$$

Якщо деякі параметри кубічної параболи брати від'ємними, то трендова модель (1.7) може описувати більш складні траєкторії розвитку.

Недоліком трендових моделей у вигляді многочленів вищих порядків є необхідність оцінювання великого чцсла параметрів.

4. Для аналізу динаміки прискореного розвитку зручно використовувати також *узагальнену експоненційну модель тренду.* Таку модель використовують тоді, коли темп приросту $\acute{p}(t)$, який властивий деякому економічному процесу, змінний, причому функція, яка його задає, відома: $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t),$.

Побудуємо узагальнену економічну модель тренду цього процесу.

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d\ln x(t)}{dt};$$

$$d\ln x(t) = \hat{\rho}(t)dt;$$

$$\ln x(t) = \int_0^t \hat{\rho}(t)dt + C;$$

$$x(t) = e^{\int_0^t \hat{\rho}(t)dt + C} = e^C \cdot e^{\int_0^t \hat{\rho}(t)dt}.$$

При заданій початковій умові:

$x(0) = x_0,\ C = x_0.$

Остаточно маємо:

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \hat{\rho}(t)dt}. \qquad (1,8)$$

Як функції, що задають темп приросту $\boldsymbol{p(t)},$ можуть бути використані лінійна, експоненційна, параболічна та інші.

5. Для аналізу динаміки прискореного розвитку використовують також інші трендові моделі, наприклад:

— степеневу (мультиплікативну) модель тренду:

$x(t) = at^b,\ a > 0,\ b > 1;$ (1.9)

— кінетичну модель тренду:

$x(t) = ae^{bt} * t^c$, $a > 0$;   (1.10)

— комбіновану експоненційно-логарифмічно-степеневу модель тренду:

$x(t) = ae^b(lnt)^c$, $a > 0$.   (1.11)

У деяких випадках трендові моделі (1.9) - (1.11) мають кращі статистичні оцінки вирівнювання динамічного ряду, ніж моделі (1.4) - (1.8), проте в разі їхнього використання ускладнюється економічна інтерпретація характеристик динаміки.

Лекція 11. Трендові моделі уповільненого розвитку

При побудові трендових моделей динаміки уповільненого розвитку доцільно виділити два типи такого розвитку:

- уповільнений розвиток, який не має межі (розвиток без насичення);
- уповільнений розвиток, який має межу (розвиток з насиченням).

Моделями тренду, які описують динаміку уповільненого розвитку, що не має межі, можуть бути:

1. *Лінійно-логарифмічна модель тренду:*

$x(t)a + blnt$, $a > 0$, $b > 0$.   (1.12)

Абсолютний приріст динаміки, яку описують трендовою ^{a} ***b***

$$\hat{\delta}(t) = \frac{b}{t}$$

моделлю (1.12), з плином часу спадає.

2. *Степенева модель тренду*:

$x(t) = at^b$, $a > 0$, $0 < b < 1$.   (1.13)

Абсолютний приріст динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.13), $\hat{\delta}(t) = abt^{b-1}$ з плином часу спадає.

3. Крім того, для апроксимації динаміки уповільненого розвитку без межі можна використовувати трендові моделі динаміки прискореного розвитку, деякі параметри яких від'ємні. Наприклад, квадратична парабола (1.6) при $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ дає абсолютні прирости, які щорічно зменшуються на 2с, тому вона може бути використана для опису динаміки

уповільненого розвитку без межі при $t \le -\frac{b}{2c}$.

Моделями тренду, які описують динаміку уповільненого розвитку з насиченням, можуть бути:

4. *Гіперболічна трендова модель першого порядку (узагальнена зворотна модель*):

$$x(t) = a + \frac{b}{t}. \qquad (1.14)$$

Очевидно, що $\lim_{t\to\infty} x(t) = a$ - межа насичення.

Абсолютний приріст $\hat{\delta}(t) = -\frac{b}{t^2}$ - з плином часу спадає за абсолютною величиною.

При $b < 0$ узагальнена зворотна модель описує динаміку уповільненого зростання із верхньою межею, а при $b > 0$ - динаміку уповільненого спадання із нижньою межею.

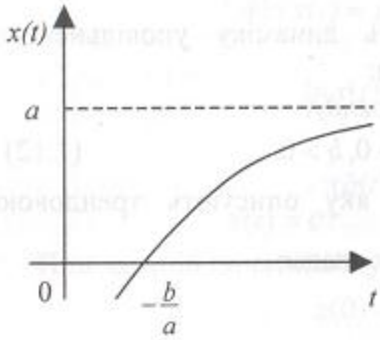


Рис. 8. Узагальнена зворотна модель ($b<0$)

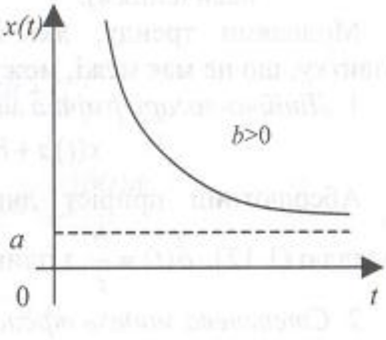


Рис. 9. Узагальнена зворотна модель ($b>0$)

Яскравими прикладами використання зворотної моделі в економічних дослідженнях є криві Енгеля і Філіпса.

Крива Енгеля:

$$x(t) = a + \frac{b}{t}, \quad a > 0, b < 0.$$

Наприкінці XIX ст. німецький статистик Е. Енгель сформулював емпіричні закони споживання і побудував криві, відповідно до яких із зростанням доходу доля витрат на харчування зменшується, а доля витрат на одяг і житло залишається стабільною. Криві, які пов’язують споживчі витрати на товари із загальними витратами або доходом, називають кривими Енгеля. Очевидно, що крива Енгеля для певного товару вказує на такі особливості:

-критичний рівень доходу $-\frac{b}{a}$, нижче від якого товар не буде куплено;

- межу насичення (стелю) a, яку не можна збільшити, скільки б не зростав дохід.

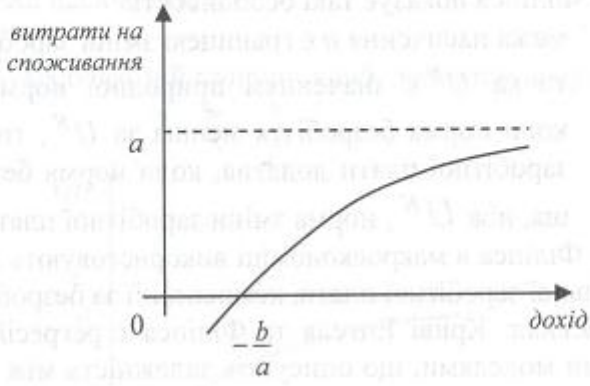


Рис. 10. Крива Е. Енгеля

Крива Філіпса:

$$x(t) = a + \frac{b}{t}.$$

Англійський економіст Філіпс, аналізуючи дані про норми відсотка зміни заробітної плати і відсотка безробіття для Англії за період з 1861 по 1957рр., побудував криву, яка описує залежність норми зміни заробітної плати від норми безробіття і яку називають кривою Філіпса.

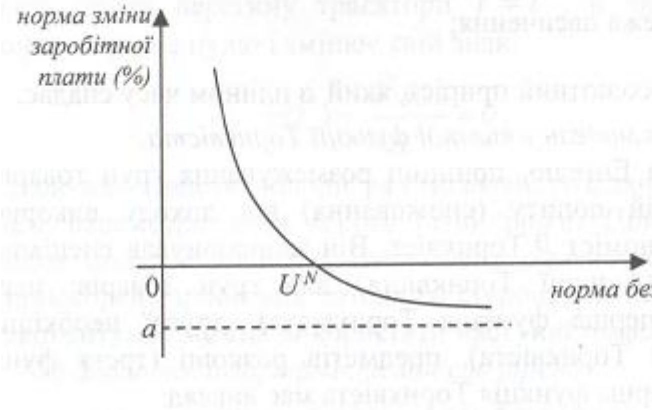


Рис. 11. Крива Філіпса

Крива Філіпса показує такі особливості:

- межа насичення *a* є границею зміни заробітної плати;
- точка U^N *є* значенням природної норми безробіття:

коли норма безробіття менша за U^N, то норма зміни заробітної плати додатна, коли норма безробіття більша, ніж U^N, норма зміни заробітної плати від'ємна.

Криву Філіпса в макроекономіці використовують для розрахунків мінімальної заробітної плати, компенсації за безробіття тощо.

Зауваження. Криві Енгеля та Філіпса є регресійними еконо- метричними моделями, що описують залежність між двома економічними показниками, проте можуть бути використані і для моделювання динаміки окремих економічних показників.

5. *Гіперболічна трендова модель другого порядку*:

$$x(t) = a - \frac{b}{t} - \frac{c}{t^2},\ a > 0,\ \ \mathrm{b} > 0,\ \mathrm{c} > 0. \qquad (1.15)$$

Очевидно, що $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = a$ - межа насичення.

Абсолютний приріст

$$\hat{\delta}(t) = \frac{b}{t^2} + \frac{2c}{t^3} = \frac{2c + bt}{t^3}$$

з плином часу спадає.

6.*Модифікована експоненційна трендова модель:*

$$x(t) = a - be^{-t},\ a > 0,\ \mathrm{b} > 0,\ a > \mathrm{b}. \qquad (1.16)$$

$\lim\limits_{t\to\infty} x_t = a$ - межа насичення;

$\hat{\delta}(t) = be^{-t}$ - абсолютний приріст, який з плином часу спадає.

Трендова модель у вигляді функції Торнквіста.

Аналогічно Енгелю, принцип розмежування груп товарів за типами функцій попиту (споживання) від доходу використав шведський економіст Л.Торнквіст. Він запропонував спеціальний тип функцій (функції Торнквіста) для груп товарів: першої необхідності (перша функція Торнквіста), другої необхідності (друга функція Торнквіста), предметів розкоші (третя функція Торнквіста). Перша функція Торнквіста має вигляд:

$$x(t) = \frac{at}{b+t}, \quad a > 0, \quad b > 0. \qquad (1.17)$$

$\lim\limits_{t\to\infty} x_t = a$ - межа насичення;

$\hat{\delta}(t) = \frac{abt}{(b+t)^2}$ — абсолютний приріст, якии з плином часу спадає.

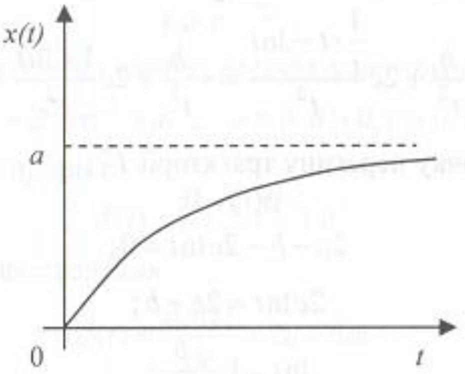


Рис. 12. Перша функція Торнквіста

Лекція 12. Трендові моделі розвитку із зміною характеристик динаміки

Характерною властивістю трендових моделей, що описують економічний розвиток із зміною характеристик динаміки, є
наявність точки перегину траєкторії $t = t^*$, в якій абсолютне прискорення рівне нулю і змінює свій знак:

$$\hat{\varphi}(t^*) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0.$$

Такою властивістю володіє ряд моделей, розглянутих попередньо, але параметри яких мають різні знаки. При дослідженні трендових моделей динаміки цього типу обмежимося випадком, коли прискорене зростання змінюється уповільненим зростанням. Для такої ситуації можна використати наступні моделі:

1. *Параболічно-логарифмічна модель тренду*

$$x(t) = a + b\ln t + c\ln^2 t, \quad a > 0, b > 0, c > 0. \qquad (1.18)$$

Абсолютний приріст динаміки:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{b}{t} + 2c\frac{\ln t}{t}.$$

Абсолютне прискорення:

$$\widehat{\varphi}(t)=\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}=-\frac{b}{t^2}+2c\frac{\frac{1}{t}\cdot t-\ln t}{t^2}=-\frac{b}{t^2}+2c\frac{1-\ln t}{t^2}=\frac{2c-b-2c\ln t}{t^2}.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\varphi(t)=0;$$

$$2c-b-2c\ln t=0;$$

$$2c\ln t=2c-b;$$

$$\ln t=1-\frac{b}{2c};$$

$t^*=e^{1-\frac{b}{2c}}$ - точка перегину траєкторії.

Дослідимо проміжки монотонності абсолютного приросту $\delta(t)$ динаміки, яку описують за допомогою моделі (1.16).

Якщо $\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}>0$, то абсолютний приріст зростає:

$$\frac{2c-b-2c\ln t}{t^2}>0;$$

$$2c\ln t<2c-b;$$

$$\ln t<1-\frac{b}{2c};$$

$$t<e^{1-\frac{b}{2c}}.$$

Якщо $\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}<0$, то абсолютний приріст спадає:

$$\frac{2c-b-2c\ln t}{t^2}<0;$$

$$2c\ln t>2c-b;$$

$$\ln t>1-\frac{b}{2c};$$

$$t>e^{1-\frac{b}{2c}}.$$

2.*Трендова модель у вигляді параболи третього порядку*

$$x(t)=a+bt+ct^2+dt^3,\quad a>0, b>0, c>0, d<0. \qquad (1.19)$$

Абсолютний приріст:

$$\widehat{\delta}(t)=b+2ct+3dt^2.$$

Абсолютне прискорення:

$$\widehat{\varphi}(t)=\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}=2c+6dt.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$\varphi(t)=0;$
$2c+6dt=0;$
$t^{*}=-\frac{c}{3d}$ точка перегину траєкторії.

Якщо $t<-\frac{c}{3d}$, то $\hat{\delta}(t)$ зростає, якщо $t>-\frac{c}{3d}$, то $\hat{\delta}(t)$ спадає.

3. *Трендова модель у вигляді логістичної функції*

$$x(t)=\frac{a}{1+be^{-ct}},\quad a>0, b>0, c>0. \qquad (1.20)$$

Абсолютний приріст динаміки:

$$\hat{\delta}(t)=\frac{abce^{-ct}}{(1+be^{-ct})^2}.$$

Абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t)=\frac{d\hat{\delta}(t)}{dt}=abc\frac{-ce^{-ct}(1+be^{-ct})-e^{-ct}-2(1+be^{-ct})(-bce^{-ct})}{(1+be^{-ct})^4}=$$
$$=abc^2\frac{-e^{-ct}(1+be^{-ct})(1+be^{-ct}-2be^{-ct})}{(1+be^{-ct})^4}=abc^2\frac{e^{-ct}(be^{-cr}-1)}{(1+be^{-ct})^3}.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^{*}:

$\varphi(t)=0;$
$be^{-ct}-1=0;$
$be^{-ct}=1;$
$e^{-ct}=b^{-1};$
$-ct=-\ln b;$
$t^{*}=\frac{\ln b}{c}$ = точка перегину траєкторії.

Якщо t< $\frac{lnb}{c}$, то абсолютний приріст зростає, якщо t> $\frac{lnb}{c}$, то абсолютний приріст спадає. Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=a$, то логістична модель при t > $\frac{lnb}{c}$ характеризує уповільнений розвиток з насиченням.

Логістичну модель тренду можна застосовувати в більш загальному вигляді:

$$x(t)=\frac{1}{ab^t+c},\quad a>0, 0<b<1, c>0. \qquad (1.21)$$

Абсолютний приріст динаміки:

$$\hat{\delta}(t)=-\frac{ab^t\ln b}{(ab^t+c)^2}.$$

Абсолютне прискорення:

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = -a\ln b\frac{b^t\ln b(ab^t+c)^2 - b^t\cdot 2(ab^t+c) - ab^t\ln b}{(ab^t+c)^4} =$$

$$= -a\ln b\frac{b^t\ln b(ab^t+c)(ab^t+c-2ab^t)}{(ab^t+c)^4} = -a(\ln b)^2\frac{b^t(c-2ab^t)}{(ab^t+c)^3} =$$

$$= a\ln^2 b\frac{b^t(ab^t-c)}{(ab^t+c)^3}.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^* :
$\varphi(t)=0$;

$$ab^t - c = 0;$$

$$ab^t = c;$$

$$b^t = \frac{c}{a};$$

$$t\ln b = \ln\left(\frac{c}{a}\right);$$

$$t^* = \frac{\ln\frac{c}{a}}{\ln b}$$ точка перегину траєкторії.

t^* можна знаходити ще й за такою формулою:

$$t^* = \log_b\left(\frac{c}{a}\right).$$

Дослідимо властивості логістичної моделі тренду:

$$x(0) = \frac{1}{a+c};$$

$$x(t^*) = \frac{1}{ab^{\log_b(\frac{c}{a})}} = \frac{1}{a\frac{c}{a}+c} = \frac{1}{2c};$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{c}.$$

Логістична крива має такий вигляд:

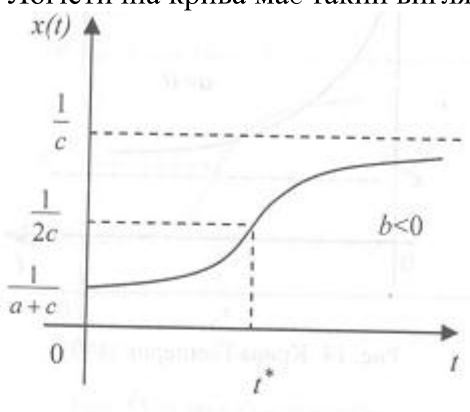


Рис. 13. Логістична крива

Таким чином, логістична крива - це S-подібна крива з нижньою межею ; $\frac{1}{a+c}$; верхньою межею насичення $\frac{1}{c}$ та з точкою перегину $t^* = \frac{\ln\frac{c}{a}}{\ln b}$.

4. *Трендова модель у вигляді кривої Гомперця.*

Криву Гомперця широко використовують для опису процесів у демографії, маркетингу, дослідженні ринку, збуту продукції.

Вона має такий вигляд:

$$x(t) = e^{ab^t + c}, \quad 0 < b < 1. \qquad (1.22)$$

$\lim\limits_{t\to\infty} x_t = e^c$ — межа насичення.

Абсолютний приріст динаміки:

$$\widehat{\delta}(t) = e^{ab^t + c} ab^t \ln b = a \ln b \cdot b^t e^{ab^t + c}.$$

Отже, при $a > 0$ крива Гомперця описує уповільнене спадання із нижньою межею e^c:

$$x(0) = x_0 = e^{a+c}.$$

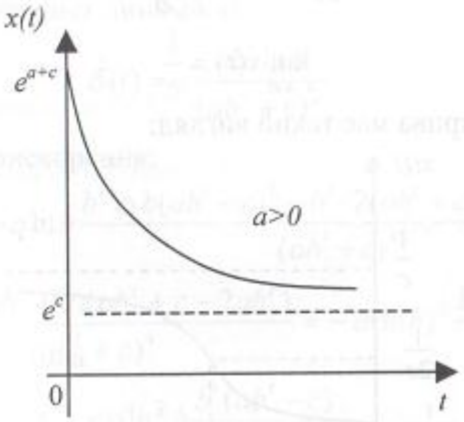


Рис. 14. Крива Гомперця (a>0)

Дослідимо поведінку кривої при $a < 0$.

$$\widehat{\varphi}(t) = \frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt} = a \ln b (b^t \ln b \cdot e^{ab^t + c} + b^t \cdot e^{ab^t + c} \cdot ab^t \ln b) =$$

$$= a(\ln b)^2 \cdot b^t e^{ab^t + c}(1 + ab^t).$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\widehat{\varphi}(t) = 0;$$

$$1 + ab^t = 0;$$

$$ab^t = -1;$$

$$b^t = -\frac{1}{a};$$

$$t^* = \log_b(-\frac{1}{a});$$

$$t^* = \frac{\ln(-\frac{1}{a})}{\ln b}$$ - точка перегину траєкторії.

$$x(t^*) = e^{c-1}.$$

Крива Гомперця при $a < 0$ має вигляд:

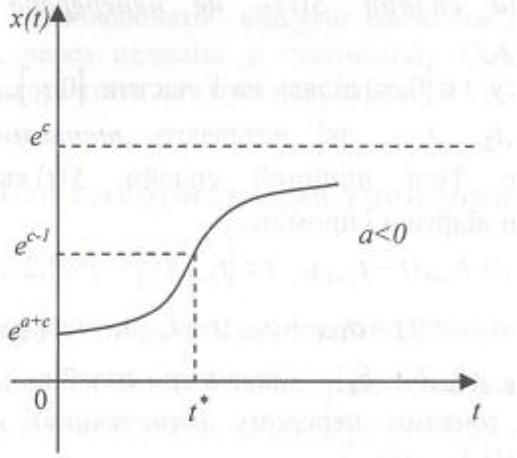


Рис. 15. Крива Гомперця (а<0)

Отже, крива Гомперця при ***а*** < 0 має форму S-подібної кривої, яка спочатку зростає дуже швидко, а потім дуже повільно. Такою функцією описують типову еволюцію продажу товару.

Більш загальні задачі аналізу динаміки із змінними тенденціями розвитку розв'язують за допомогою ***сплайн-функцій.***

Лекція 13. Сплайн - функції

Як ми вже зазначали, важливою вимогою до функції тренду є її гладкість. Проте підібрати гладку функцію з невеликим числом параметрів для всього аналізованого часового інтервалу не завжди вдається. В такій ситуації задачу згладжування динамічного ряду можна розв'язувати за допомогою сплайн-функції, що являє собою кусково-гладку функцію, окремі куски якої з'єднані гладко.

Як куски сплайн-функції здебільшого вибирають поліноми, тому загальне означення сплайн-функції дамо за цим припущенням.

Поліноміальним сплайном n-го степеня називають складену з кусків поліномів степеня не вище n неперервну кусково- поліноміальну функцію, всі похідні якої до порядку n-1 включно неперервні.

Методику побудови сплайн-функції проілюструємо на прикладі ***лінійного сплайну***, тобто поліноміального сплайну першого степеня. ***Лінійний сплайн S(t) - це неперервна кусково-лінійна***
функція від t
Вісь часу $t \in [0, \infty)$ **ділять на** k **частин** $[0,t_1]$, $[0,t_2]$,…, $[t_{k-1},t_\infty)$ точками $t_1, t_2,…,t_{k-1}$, які називають ***точками перелому***, або
стикування. Тоді лінійний сплайн *S(t)* являє собою k-1 прямолінійні відрізки і промінь.

$$x(t) = a_{j-1} + b_{j-1}(t - t_{j-1}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1,2,...,k-1, \quad t_0 = 0;$$

$$x(t) = a_{k-1} + b_{k-1}(t - t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, \infty), \qquad (1.23)$$

де $a_0, a_1, \dots a_{k-1}; b_0, b_1, \dots b_{k-1}$ — параметри сплайну.

Інколи точками перелому (стикування) називають точки $x(t_1),\ x(t_2),\ x(t_3), \dots x(t_{k-1})$.

Якщо замість змінної t ввести $\boldsymbol{k}$ нових змінних $\varpi_j, j=\overline{1,k}$

$$\varpi_j = \begin{cases} t-t_{j-1}, & при \quad t \ge t_{j-1} \\ 0, & при \quad t < t_{j-1} \end{cases},$$

то лінійний сплайн можна записати так:

$$S(t) = a_1 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \varpi_j \ , \qquad (1.24)$$

де – $\beta_1=b_1,\ \beta_j=b_j-b_{j-1},\ j=2,k$.

Лінійний сплайн, порівняно з поліноміальними сплайнами більш високих степенів, має такі переваги:

1. Очевидна економічна інтерпретація - розвиток з кусково- постійними абсолютними приростами (скороченнями).
2. Менша кількість параметрів.
3. Можливість використання досить простого і добре розробленого математичного апарату - лінійної алгебри, лінійного програмування.

Використання сплайнів ефективне, коли на аналізованому часовому періоді характер розвитку змінюється, тобто досліджують розвиток із зміною характеристик динаміки.

Водночас сплайн може з’єднувати як куски однакових функцій з різними параметрами, так і різні види функцій. За допомогою сплайнів зручно „відновлювати” відсутні елементи динамічного ряду (наприклад, через недоліки в статистиці). Останній кусок сплайну можна використати для прогнозування.

Лекція 14. Лінійні динамічні моделі

14.1. Модель Харрода-Домара

Як приклад динамічної моделі з безперервним часом, представленої лінійним диференціальним рівнянням, розглянемо модель макроекономічної динаміки, запропонованої Харродом і Домаром. Модель описує динаміку доходу $Y(t)$, який розглядається як сума споживання $C(t)$ і інвестицій $I(t)$. Економіка вважається закритою, тому чистий експорт рівний нулю і державні витрати не виділяються. Основна передумова моделі зростання – формула взаємозв'язку між інвестиціями і швидкістю росту доходу. У моделі передбачається, що швидкість росту доходу пропорційна інвестиціям

$$I(t) = B\frac{dY}{dt} \ , \qquad (14.1)$$

де B – коефіцієнт капіталоємкості приросту доходу, або коефіцієнт прірістної капіталоємкості. Зворотна йому величина 1/B називається пріростною капіталовідачею.

Тим самим, в модель фактично включаються наступні передумови:

- інвестиції миттєво перетворюються на приріст капіталу. Формально це означає, що $\Delta K(t) = I(t)$, де $K(t)$ - безперервна функція приросту капіталу за часом.
- вибуття капіталу відсутнє
- виробнича функція в моделі лінійна. Це витікає з пропорційності приросту доходу приросту капіталу

Лінійна виробнича функція

$$Y(t) = aL(t) + bK(t) + c \qquad (14.2)$$

де b=1/B цією властивістю в тому випадку, якщо a=0, або L(t)=Const.
- витрати праці постійні в часі, або випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом.
- модель не враховує технічного прогресу.

Ці передумови, звичайно, істотно огрублюють опис динаміки реальних макроекономічних процесів, роблять проблематичним застосування цієї моделі, наприклад, для прогнозування величини сукупного випуску, або доходу. У теж час, її відносна простота дозволяє більш глибоко вивчити взаємозв'язок динаміки інвестицій і зростання випуску, одержати точні формули траєкторій даних параметрів.

У цій моделі передбачається, що динаміка споживання C(t) є заданою функцією. Простий варіант моделі вийде, якщо вважати, що C(t) ≡0. Цей варіант абсолютно нереалістичний з практичної точки зору, проте в ньому всі ресурси прямують на інвестиції, внаслідок чого можуть бути визначені максимально можливі темпи зростання. В цьому випадку одержуємо

$$Y(t) = C(t) + I(t) = 0 + B\frac{dY}{dt} = BY'(t)\,. \qquad (14.3)$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Легко перевірити безпосереднім диференціюванням, що його рішення має вигляд:

$$Y(t) = Y(0)e^{(1/B)t}\,. \qquad (14.4)$$

Безперервний темп приросту доходу $y(t) = \dfrac{Y'(t)}{Y(t)}$ в цьому випадку рівний 1/B. Це максимально можливий технологічний темп приросту.

Хай тепер З(t)=С постійно в часі. В цьому випадку одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$Y(t) = BY'(t) + C\,. \qquad (14.5)$$

Його частковим рішенням, очевидно, є функція $y_r = C$, а загальним рішенням – сума загального рішення однорідного рівняння і знайденого часткового рішення

$$Y(t) = Ae^{(1/B)t} + C\,. \qquad (14.6)$$

Константу інтегрування А знайдемо, підставивши в цю функцію задану початкову умову

$$Y(0) = Ae^{(1/B)0} + C = A + C, \qquad (14.7)$$

звідки A=Y(0) -C. Значить, рішенням рівняння є функція

$$Y(t) = (Y(0) - C)e^{(1/B)t} + C. \qquad (14.8)$$

Безперервний темп приросту доходу $y(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$ у цьому рішенні рівний $y(t) = \frac{1}{B} \cdot \left[1 - \frac{C}{Y(t)}\right]$. Він складає $\frac{1}{B} \cdot \left[1 - \frac{C(0)}{Y(0)}\right]$ у початковий момент часу (при t = 0) і, зростаючи, прагне до 1/B при t > ?, що зрозуміле, оскільки дохід росте, а постійний об'єм споживання складає все меншу його частку.

Величина $\alpha(t) = \left[1 - \frac{C}{Y(t)}\right]$ - норма накопичення у момент часу t, і темп приросту доходу виявляється пропорційним цій величині, як і показнику прірістної капіталовіддачи 1/B.

Отже, за інших рівних умов зростання норми накопичення пропорційно збільшує темпи приросту доходу. В той же час це знижує рівень поточного споживання, і для дозволу проблеми узгодження конкурентних цілей збільшення темпів зростання і рівня поточного добробуту в модель звичайно включають елементи оптимізації. В цьому випадку розв'язується оптимізаційна задача на максимум загального об'єму споживання за кінцевий або нескінченний період часу. Для віддзеркалення переваги раніше отриманого результату в модель включається тимчасове дисконтування, при якому раніший результат враховується в критерії з великою «вагою».

Нарешті, розглянемо варіант моделі з показником споживання $C(t)$, що росте з постійним темпом r: $C(t) = C(0) \cdot e^{rt}$. Диференціальне рівняння цієї моделі має вигляд:

$$Y(t) = BY'(t) + C(0) \cdot e^{rt}. \qquad (14.9)$$

Рішення цього рівняння таке:

$$Y(t) = \left[y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot e^{\frac{1}{B}t} + \left[\frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot e^{rt}. \qquad (14.10)$$

З аналізу формули ясно, що темп приросту споживання r повинен бути більше максимально можливого загального темпу приросту 1/B, оскільки інакше споживання займатиме все велику і врешті-решт - переважну частину доходу, що зведе до нуля спочатку інвестиції, а потім і дохід. Ясно це з формули рішення моделі, оскільки у випадку $r > \frac{1}{B}$ коефіцієнт $\frac{1}{1 - Br}$ негативний, а e^{rt} росте швидше, ніж $e^{(1/B)t}$, отже, другий доданок за цих умов негативно і через деякий час «переважить» перший.

У рішенні даної моделі зростання при $r < \frac{1}{B}$ багато що залежить від співвідношення між r і $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B}$ (у чисельнику $\alpha_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)}$ стоїть норма накопичення в початковий момент часу $t = 0$). Якщо $r = \rho_0$, то темп приросту доходу рівний темпу приросту споживання, і рішенням є

$$Y(t) = Y(0) \cdot e^{(\alpha_0 / B)t}.$$

Норма накопичення $\alpha(t)$ в цьому випадку постійна в часі і рівна α_0, а темп приросту доходу пропорційний нормі накопичення і обернено пропорційний прірістної капіталоємкості. Саме ця модифікація моделі економічного зростання, в якій норма накопичення постійна, називається *моделлю* Харрода -Домара.

Якщо в даній моделі зростання $\frac{1}{B} > r > \rho_0$, то необхідний темп приросту споживання виявляється дуже високим для економіки. В цьому випадку коефіцієнт $\left[Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot$ негативний, оскільки $\frac{1}{B} > r$, перший негативний доданок в рішенні «переважує» зрештою другий. Тому темп приросту доходу падає і стає з деякого моменту негативним. Через деякий час сам дохід стає рівним нулю, після чого модель втрачає економічне значення. Це аналогічно випадку $r \ge \frac{1}{B}$, хоча в даному випадку вже річ не в тому, що потрібний темп приросту споживання у принципі недосяжний за тривалий період. У цій ситуації дуже низькою виявляється початкова норма накопичення α_0. Якщо $r < \rho_0$, то норма накопичення, а разом з нею і темп приросту доходу ростуть, причому останній в межі наближається до 1/B. Проте в цьому випадку відбувається накопичення ради накопичення, бо споживання росте заданим темпом r, а темп приросту доходу вдається збільшити за рахунок швидшого зростання інвестицій. Норма накопичення α_0 перевищує Br, і якщо виходити із задачі максимізації об'єму споживання, то ця норма дуже висока. Вищий її рівень вимагає збільшення інвестицій $I(0)$ за рахунок скорочення споживання $C(0)$ у початковий момент, що при фіксованому темпі приросту споживання r обумовлює нижчий його рівень на всій траєкторії. В той же час потрібний темп приросту споживання $r < \frac{1}{B}$ можна підтримувати, як показано вище, при $\alpha_0 = Br$.

Таким чином, якщо вимагається підтримувати постійний темп приросту споживання r, не перевищуючий технологічного темпу, то для максимізації об'єму споживання за будь-який період потрібно встановити початкову норму накопичення $\alpha_0 = Br$.

Складнішим є питання про те, який рівень темпу r більш переважний. Велика його величина дозволяє забезпечити великий об'єм споживання за тривалий період, але це відбувається за рахунок скорочення споживання на початковому етапі.

Приклад. Розглянемо варіанти траєкторій основних макроекономічних показників в моделі Харрода - Домара за різних умов темпу споживання.

Нехай динаміка споживання $C(t) = C(0) \cdot e^{rt}$ а динаміка ВВП $Y(t) = \left[y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot e^{\frac{1}{B}t} + \left[\frac{C(0)}{1 - Br}\right] \cdot e^{rt}$. Початкові умови $Y(0) = 1000$ і $C(0) = 200$. Тоді норма споживання $\alpha_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)} = 1 - \frac{200}{1000} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Коефіцієнт прірістної капіталоємкості $B = 2$.

Варіант а) - темп приросту споживання $r = 0{,}75$.

Траєкторія ВВП за заданих умов

$$Y(t)=\left[1000-\frac{200}{1-\frac{3}{2}}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}t}+\frac{200}{1-\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{3}{4}t}.$$

Знайдемо момент часу, коли $Y(t)=0$. Розв’язуючи це рівняння, одержимо $1400\cdot e^{\frac{1}{2}t}=400\cdot e^{\frac{3}{4}t}$ або $e^{\frac{1}{4}t}=3{,}5$, де $t=5{,}01105$. Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним тобто $Y'(t)=0$. Розв’язуючи рівняння $Y'(t)=0$, одержимо

$$Y'(t)=1400\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}t}-400\cdot\frac{3}{4}\cdot e^{\frac{3}{4}t}=0, \text{ або } 700\cdot e^{\frac{1}{2}t}=300\cdot e^{\frac{3}{4}t}.$$

Таким чином, можна визначити момент часу, при якому рівень ВВП буде максимальним, $e^{\frac{1}{4}t}=2{,}333$, або $t=3{,}389$. Рівняння, що відображає динаміку інвестицій

$$I(t)=B\cdot Y'(t)=2\cdot(700\cdot e^{\frac{1}{2}t}-300\cdot e^{\frac{3}{4}t}).$$

Момент часу, при якому інвестиції будуть рівні 0, тобто $I(t)=0$, рівний $t=3{,}389$. Траєкторії основних показників приведені на рис. 1.

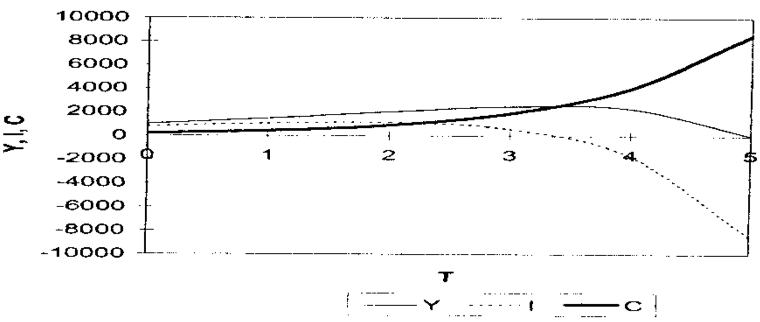


Рис .1. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання r = 0,75.

Варіант б) — темп приросту споживання $r=0{,}45$.

Таким чином, виконується умова $\frac{\alpha_0}{B}<r<\frac{1}{B}$. Траєкторія ВВП за цих умов

$$Y(t)=\left[1000-\frac{200}{1-2\cdot 0{,}45}\right]\cdot e^{0{,}5t}+\frac{200}{1-2\cdot 0{,}45}\cdot e^{0{,}45t}.$$

Знайдемо момент часу, коли $Y(t)=0$, тобто

$$[1000-\frac{200}{0{,}1}]\cdot e^{0{,}5t}+\frac{200}{0{,}1}\cdot e^{0{,}45t}=0, \text{ або}$$

$$-1000\cdot e^{0{,}5t}+2000\cdot e^{0{,}45t}=0.$$

Тоді $e^{0{,}05t}=2$ і $t=13{,}86\approx 14$. Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним, тобто $Y'(t)=0$.

Тоді

$$Y'(t) = -1000 \cdot 0{,}5 \cdot e^{0{,}5t} + 2000 \cdot 0{,}45 \cdot e^{0{,}45t} = 0, \text{ або}$$

$$-500 \cdot e^{0{,}5t} + 900 \cdot e^{0{,}45t} = 0.$$

В цьому випадку $e^{0{,}05t} = 1{,}8$ або $t = 11{,}75 \approx 12$. Траєкторії основних показників приведені на рис.2. Як видно з малюнка і результатів розрахунку, період «існування» даної економічної системи за нових умов збільшився, проте темп приросту споживання все ще високий в порівнянні з оптимальним.

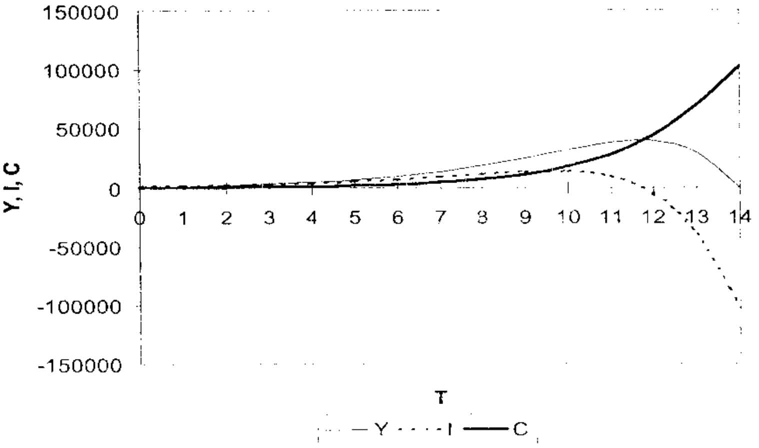


Рис. 2. Траєкторії функцій випуску продукції при r = 0,45

Варіант в) - темп приросту споживання $r = 0{,}4$.

Таким чином, темп приросту споживання співпадає з оптимальним, тобто $r = \frac{\alpha_0}{B} = 0{,}4 (\alpha_0 = 0{,}8; B = 2)$. Траєкторія випуску продукції буде відображена моделлю $Y'(t) = 100 \cdot e^{0{,}4t}$. Динаміка інвестицій - відповідно $I(t) = B \cdot Y'(t) = 2 \cdot 1000 \cdot 0{,}4 \cdot e^{0{,}4t}$, а рівняння споживання виглядатиме як $C(t) = C(0) \cdot e^{rt} = 200 e^{0{,}4t}$. Траєкторії основних показників приведені на рис. 3.

Оскільки функції випуску, інвестицій і споживання безперервні в часі, то представляє інтерес порівняння накопичених (сумарних) за певний період часу показників Y^H, I^H і C^H (значення певних інтегралів для представлених варіантів моделі а — в).

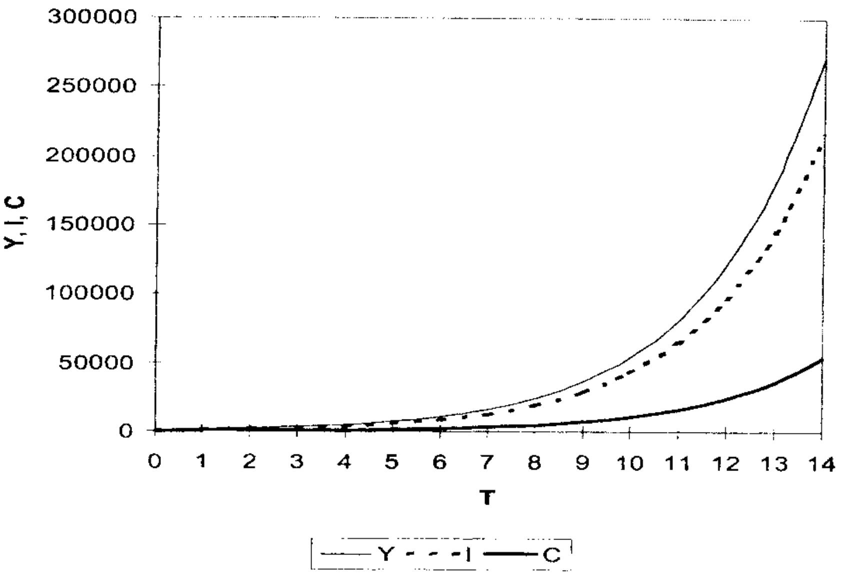


Рис.3. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання r = 0,4

Лекція 15. Динамічна модель Леонтьева

Динамічна модель Леонтьева є деталізованою моделлю зростання валового суспільного продукту і національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьева служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому виразі, яка відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використовування матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу (НД). Кожна галузь в балансі розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це і визначає матричну структуру балансу. У балансі розглядаються як галузі, так і підгалузі. В окремих випадках баланс може включати до декількох сотень позицій.

У основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом валового продукту.

При побудові динамічної моделі В. Леонтьева, як і для моделі міжгалузевого балансу, робляться наступні припущення:

1) у кожній галузі (або підгалузі) є єдина технологія виробництва;

2) норми виробничих витрат не залежать від об'єму продукції, що випускається;

3) не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку доводиться пов'язаній з валовою продукцією галузі таким чином

$$x_{ij} = a_{ij} X_j;$$
$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \tag{1}$$

де a_{ij} - коефіцієнт прямих матеріальних витрат, за допомогою якого вимірюються технологічні зв'язки між галузями. Коефіцієнт a_{ij} показує, скільки одиниць продукції i-той галузі безпосередньо витрачається на випуск одиниці валової продукції j-той галузі. Так, при $i = j$ маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску.

Всі коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворюють квадратну матрицю A_{nxn}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] \tag{2}$$

Статична модель міжгалузевого балансу в матричній формі має вигляд:

$$X = AX + Y, \tag{3}$$

де A — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

X- вектор-стовпець валових об'ємів випуску (ВОП);

Y- вектор-стовпець кінцевого продукту (НД).

У основі динамічної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом валової продукції Цей взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталоємкості приростів виробництва. Крім того, вважається миттєвість перетворення капіталовкладень в приріст основних фондів і миттєвість віддачі цих фондів в об'єми виробництва (що, взагалі кажучи, невірно). Час вважається безперервним, що і визначає застосування диференціальних рівнянь.

Основне співвідношення моделі має вигляд

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX}{dt} + C(t) \tag{4}$$

де $X(t)$ - вектор об'ємів валового випуску продукції по галузях у момент часу t;

$\frac{dX}{dt}$ - вектор абсолютних приростів за малу одиницю часу;

А - матриця коефіцієнтів прямих витрат, включаючи витрати на відшкодування вибуття основних фондів;

$AX(t)$ - виробниче споживання, що забезпечує просте відтворення;

У - матриця коефіцієнтів капіталоємкості приростів виробництва ((b_{ij} - витрати виробничого накопичення і-го виду продукції на одиницю приросту j-го виду продукції);

$C(t)$ - вектор-стовпець, що характеризує споживання по галузях.

Рівняння моделі (4) записане у векторно-матричній формі щодо ВОП.

Щодо величин, що беруть участь в рівнянні (4), передбачається виконання наступних умов.

1. Матриця *А* продуктивна і нерозкладна.

Означення. Нехай $N = \{1,..n\}$ — множина всіх галузей. Підмножина галузей $S \in N$ *ізольована,* якщо $a_{ij} = 0$, при всіх $i \notin N$ і $j \in N$. Це означає, що галузі з множини S не потребують продукції, вироблюваної іншими галузями, навіть побічно.

Якщо в множині галузей існує ізольована підмножина, то за допомогою перестановок рядків і стовпців матрицю А *можна* привести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Означення. Матриця А називається *нерозкладною,* якщо її не можна привести до вигляду (5) тільки перестановкою рядків і стовпців.

Одна з основних властивостей нерозкладних матриць описується теоремою Фробеніуса — Перону:

1) Нерозкладна матриця А має позитивне власне число $\lambda_A > 0$, яке перевершує по модулю всі інші її власні числа.

2) Власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до ненульового множника) цілком позитивний власний вектор x_A.

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат строго позитивна: $(E - A)^{-1} > 0$, $\det(B) \neq 0$.

2. Матриці А і В постійні в часі.

3. Капіталовкладення (інвестиції) виступають єдиним джерелом зростання виробництва. Тобто, ні в одній галузі немає резервних виробничих потужностей.

При таких припущеннях тими, що змістовно інтерпретуються в рамках даної моделі можуть бути тільки стани, для яких $\frac{dX}{dt} \geq 0$. Такі стани системи називатимемо *допустимими.*

Траєкторії, що не виводять систему з області допустимих станів також називатимемо *допустимими.*

Використовуючи взаємозв'язок між ВОП і НД в статичній моделі

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t),$$

де вектор У (t) характеризує галузеву структуру НД, одержимо рівняння моделі Леонтьева щодо НД:

$$Y(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY}{dt} + C(t) \quad (6)$$

Позначимо $B(E-A)^{-1} = \overline{B}$. Коефіцієнт цієї матриці - $\tilde{b}_{ij}$ характеризує величину виробничого накопичення продукції *і-го* вигляду на одиницю приросту j-го елементу НД, а сама вона називається матрицею коефіцієнтів повної прірістної капіталоємкості.

Для з'ясування можливостей системи проаналізуємо модель (6) при різних траєкторіях споживання.

Визначимо технологічні можливості системи, які визначаються параметрами А і В. Для цього покладемо $C(t) = 0$. В цьому випадку (6) прийме вигляд

$$Y(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY}{dt} \ . \quad (7)$$

Вираз (7) - це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтам першого ряду. Загальне рішення цієї системи згідно теорії диференціальних рівнянь має вигляд

$$Y(t) = \sum_{l} d_l K_l e^{\frac{1}{s_l}t} \quad (8)$$

де s_l — власні числа матриці повної прірістної капіталоємкості;

K_l - відповідні їм власні вектори;

d_l - коефіцієнти, які визначаються з початкової умови (($Y(0) = \sum d_l K_l$).

Траєкторія, що виходить з $Y(0)$, є комбінацією експонент з різними темпами приросту (($1/s_l$). Отже, в загальному випадку розвиток по траєкторії $Y(t) = Y_0 e^{kt}$, тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможливо, і воно відбувається постійними структурними змінами. Проте існує певна схожість між рішенням макроекономічної моделі і рішенням структурної моделі. Ця схожість обумовлена наявністю у матриці коефіцієнтів повної прірістної капіталоємкості власного числа Фробеніуса - Перону.

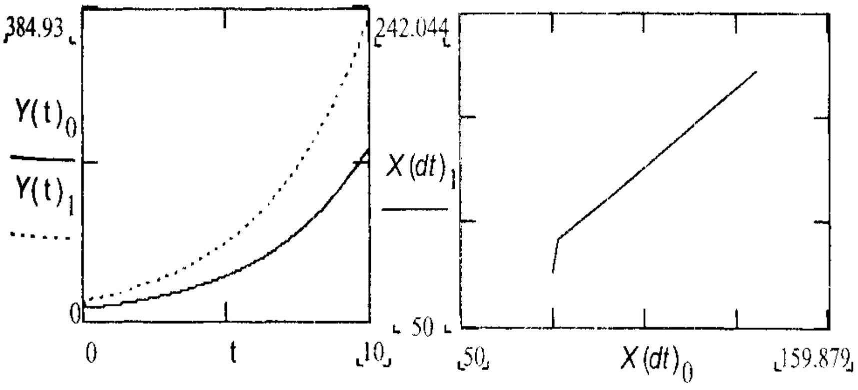
Унаслідок допущень моделі матриця $\tilde{B} = B(E-A)^{-1} > 0$, отже, у неї існує коріння Фробеніуса - Перону, s. Величина цього коріння знаходиться в межах:

$$\min_j \sum_i \tilde{b}_{ij} \le s \le \max_j \sum_i \tilde{b}_{ij} \ .$$

Величина $\tilde{b}_{ij} = \sum_i \tilde{b}_{ij}$ називається *повною* прірістною капіталоємкістю j-той *галузі.*

Можливі два випадки поведінки траєкторії (8).

У першому випадку в траєкторії (8) домінує (переважає) експонента з показником ступеня, який пов'язаний з корінням Фробеніуса — Перону. В цьому випадку з часом темп приросту кожного елементу НД починає наближатися до темпу, визначуваного даною експонентою, тобто 1/s. Таким чином, на нескінченному періоді часу кожний з елементів НД починає розвиватися з темпом 1/s. Таким чином, технологічний *темп приросту має* вигляд: $\rho = \frac{1}{s}$. Структура НД прагне в тому разі до власного вектора, відповідного K_S (мал. 4)



Мал. 4. Допустимі траєкторії розвитку

У другому випадку в (8) домінує експонента з показником ступеня, відмінним від 1/s. Це відбувається, коли існує позитивне власне число, відмінне від s. Позначимо домінуючий показник $1/s_0$. В цьому випадку власний вектор, відповідний s_0, обов'язково має негативні компоненти і, оскільки $s_0 K_{S_0} = \widetilde{B} K_{S_0} = B(E-A)^{-1} K_{S_0}$, стовпець $(E-A)^{-1} K_{S_0}$ також містить негативні компоненти. Враховуючи (8), запишемо X(1) таким чином:

$$X(t) = \sum_l d_l (E-A)^{-1} K_l e^{\frac{1}{s_l}t}.$$

У останній рівності в правій частині присутні негативні компоненти, причому із збільшенням t вони збільшуються по абсолютній величині. Отже, з часом вони з'являться і в лівій частині рівності. Таким чином, траєкторія виходить в неприпустиму зону (рис. 5).

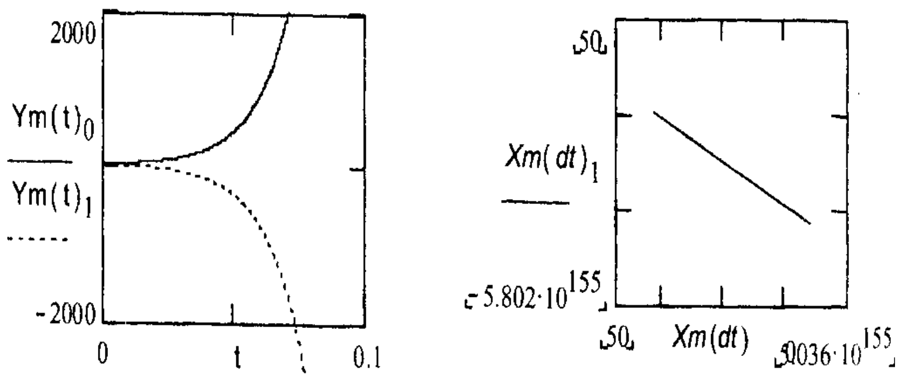


Рис.5. Неприпустимі траєкторії розвитку

Зауваження. Траєкторія системи в першому випадку є допустимою, хоча початковий стан системи може бути і неприпустимим. І, навпаки, в другому випадку, хоча початковий стан системи є допустимим, траєкторія розвитку може виходити за межі допустимої області.

Приклад. Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі В. Леонтьєва. Нехай економіка агрегована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, прірістної капіталоємкості і початковий стан системи:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}9\\ 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix},\ X(0)=\begin{pmatrix}50\\ 50\end{pmatrix}, Y(0)=\begin{pmatrix}25\\ 15\end{pmatrix}$$

Визначимо траєкторію розвитку системи. Для цього обчислимо матрицю повної пріростной капіталоємності:

$$E-A=\begin{pmatrix}0{,}9 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}$$

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}19 & 0{,}34\\ 0{,}34 & 1{,}53\end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}=B(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}25 & 1{,}64\\ 0{,}73 & 0{,}78\end{pmatrix}$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння

$$\left|E-\lambda\tilde{B}\right|=\lambda^2-2{,}03\lambda-0{,}22=0$$

$$\lambda_1=2{,}14; \lambda_2=-0{,}10$$

Отже, показники експонент в рішенні рівні

$$\rho=\frac{1}{\lambda_1}=0{,}47, \frac{1}{\lambda_2}=-9{,}69\,.$$

Відповідні власні вектори з точністю до множника рівні

$$K_{S_1}=\begin{pmatrix}1\\ 0{,}54\end{pmatrix}, K_{S_2}=\begin{pmatrix}1\\ -0{,}83\end{pmatrix}$$

Очевидно, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний доданок з позитивним показником ступеня складається з позитивних компонент.

Визначимо, виходячи з початкових умов, коефіцієнти d_1:

$$d_1K_1+d_2K_2=Y(0)\Leftrightarrow\begin{cases}d_1+d_2=25\\ 0{,}54d_1-0{,}83d_2=15\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}d_1=26{,}09\\ d_2=1{,}09\end{cases}$$

Остаточно траєкторія розвитку системи має вигляд

$$Y(t) = 26{,}09 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}54 \end{pmatrix} e^{0{,}475t} - 1{,}09 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}83 \end{pmatrix} e^{-9{,}69t}$$

Графічно зміну структури ВОП можна представити так, як зображено на рис. 4. Похила виділена лінія відповідає структурі ВОП при нескінченному $t : (E - A)^{-1} K_{\lambda_1}$.

Зауваження. Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншого розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтьева дозволяє зробити наступний висновок: *на відміну від макроекономічної моделі, яка при нульовому споживанні завжди має допустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути неприпустимою унаслідок певних структурних параметрів.*

Нехай тепер екзогенний задана траєкторія споживання $C(t) = C_0 e^{rt}$. В цьому випадку рішення системи (4) є сумою загального рішення однорідної системи (8) і часткового рішення неоднорідної і має вигляд:

$$Y(0) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{s_t} t} + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt} \tag{9}$$

де коефіцієнти d_l визначаються виходячи з початкової умови:

$$Y(0) = \sum_l d_l K_l + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0$$

Матриця $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$ є структурним аналогом коефіцієнта скалярної моделі

$$\frac{1}{1 - Br} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{br}{1 - a}\right)}.$$

З'ясуємо, чи можливе в моделі при заданій траєкторії споживання зростання без обмеження, іншими словами, чи існують обмеження на темп r. (У макроекономічній моделі обмеження було пов'язане з технологічним темпом і початковою нормою накопичення.).

Нехай в першому доданку домінує темп, відповідний корінню Фробеніуса — Перону: $\rho = \frac{1}{s}$. Нехай r > 1/s. Тоді з часом другий доданок в (5) починає домінувати, оскільки перше тяжіє до темпу 1/s. Отже, $Y(t)$ все більшою мірою починає визначатися вектором $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$. Позначимо $B^* = rB(E - A)^{-1}$. Узагальнюючи умову продуктивності, забезпечувану теоремою Фробеніуса - Перону, для матриці B^* одержуємо

$$r < \frac{1}{s} \tag{10}$$

У даному випадку B^* непродуктивна. Оскільки $C_0 > 0$, то одержуємо, що вектор $(E - B^*)^{-1} C_0$ містить негативні компоненти. Це значить, що рано чи пізно в $Y(t)$ з'являться негативні компоненти і траєкторія вийде в неприпустиму із змістовної точки зору область.

Таким чином, за наявності екзогенний заданій траєкторії споживання вигляду $C_0 e^{rt}$ у структурній моделі існування допустимої траєкторії визначається співвідношенням (10).

Якщо домінує експонента з темпом, не відповідним темпу Фробеніуса — Перону, то за наслідками аналізу при $C(t)=0$ траєкторія все одно вийде в неприпустиму із змістовної точки зору область.

З'ясуємо, чи можливе в структурній моделі таке зростання, при якому всі становлячи елементи НД ростуть з однаковим темпом аналогічно тому, як це відбувається в макромоделі Харрода - Домара (тобто в моделі розвитку з постійною нормою накопичення і постійним темпом приросту).

Нехай споживання задане у вигляді $C(t)=C_0e^{rt}$. У моделі (6) перший доданок є сумою експонент, що ростуть з різними темпами, тому єдиний темп зростання можливий тільки у випадку, якщо перший доданок тотожно рівний нулю. Це можливо тільки, якщо все $d_l=0$. Запишемо (6) у такому вигляді:

$$\sum_l d_l K_l = Y(0)-(E-r\tilde{B})^{-1}C_0=0 .$$

Звідси одержуємо систему рівнянь щодо r:

$$(E-r\tilde{B})Y(0)=C_0 \tag{11}$$

У загальному випадку ця система перевизначена. Таким чином, якщо відомий початковий заданий стан економіки Y_0, C_0 і задані технологічні параметри, то не завжди можливе зростання з постійним темпом всіх галузей. Проте можна задати r_0 і з системи (11) визначити C_0 так, щоб розвиток йшов із заданим темпом.

Лекція 16. Лінійні моделі попиту і пропозиції

Розглянемо спочатку дискретну модель на прикладі павутиноподібної. Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується функціями попиту і пропозиції: $D=D(P), S=S(P)$.

Для існування рівноваги ціна повинна бути такою, щоб товар на ринку був розпроданий, або $D(P)=S(P)$.

Ціна рівноваги $\overline{P}$ задається цим рівнянням (яке може мати безліч рішень), а відповідний об'єм купівель-продажів, що позначається через $\overline{X}$, - наступним рівнянням:

$$\overline{X}=D(\overline{P})=S(\overline{P}) .$$

Динамічна модель виходить за наявності запізнювання попиту або пропозиції. Проста модель в дискретному аналізі включає незмінне запізнювання або *відставання* пропозиції на один інтервал: $D_t=D(P_t)$ і $S_t=S(P_{t-1})$.

Це може трапитися, якщо для виробництва даного товару потрібен певний період часу, вибраний за інтервал. Дія моделі така: при заданому P_{t-1} попереднього періоду обсяг пропозиції на ринку в поточному періоді буде $S(P_{t-1})$ і величина P_t повинна встановитися так, щоб був куплений весь обсяг запропонованого товару. Іншими словами, P_t і обсяг купівель-продажів X_t характеризуються рівнянням:

$$X_t = D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Отже, знаючи початкову ціну Р0, за допомогою цих рівнянь ми можемо набути значення P_1 і X_1. Потім, використовуючи наявну ціну P_1 з відповідних рівнянь набудемо значення P_2 і X_2 і т.д. Загалом, зміна P_t характеризується різницевим рівнянням першого порядку (одноінтервальне відставання):

$$D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Рішення можна проілюструвати діаграмою, представленою на мал. 6, де D і S — відповідно криві попиту і пропозиції, а положення рівноваги (із значеннями $\overline{P}$ і $\overline{X}$) відповідає точці їх перетину Q. У динамічній моделі D має той же сенс, що і в статичній, але ордината кривої S показує обсяг пропозицій в даний період часу залежно від цін, що управляють ринком в попередній момент часу. Ціна в початковий момент часу рівна P_0.

Відповідна точка Q_0 на кривій S дає обсяг пропозиції в період 1. Весь цей запропонований обсяг товару розкуповується при ціні P_1, заданою точкою Q_1 на кривій D з тією ж ординатою (X_1), що і Q_0. У другий період часу рух відбувається спочатку по вертикалі від крапки Q_1 до точки на кривій S, що дає X_2, а потім по горизонталі - до точки Q_2 на кривій D. Остання точка характеризує P_2. Продовження цього процесу і дає графік павутини, показаний на рис.6.

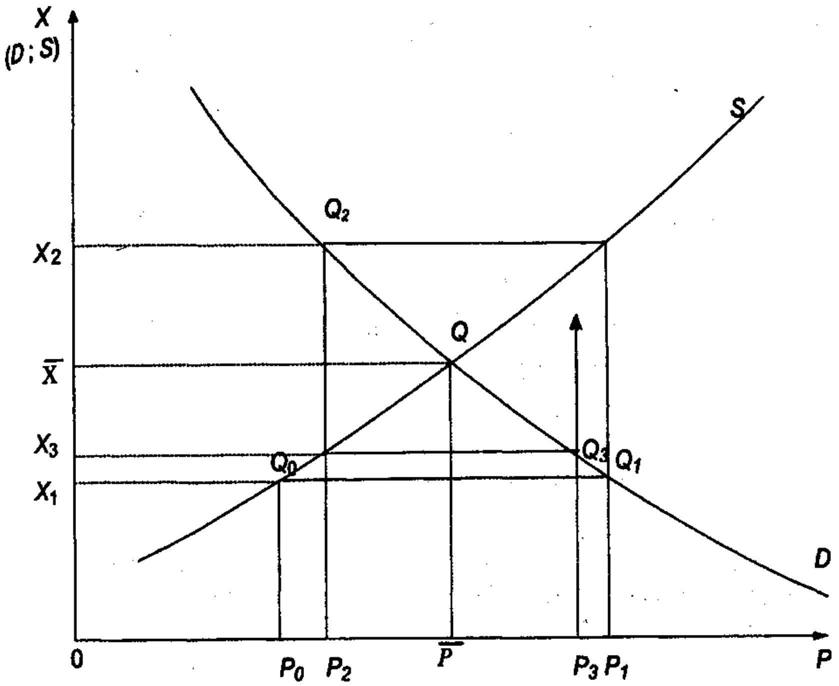


Рис. 6. Графічне рішення павутиноподібної моделі попиту і пропозиції

Ціни і обсяги (купівель — продажів) в послідовні періоду часу є відповідно координатами точок $Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n$ на кривій попиту D. У даному випадку послідовність крапок прагне до Q. При цьому крапки по черзі розташовуються на лівій і правій стороні від Q. Отже, і значення ціни P_1 прагнуть до $\overline{P}$, розташовуючись по черзі по обидві сторони від $\overline{P}$. Так само йде справа і з об'ємами покупок-продажів (X_t). Припустимо, що D йде вниз, а S - вгору. Тоді інтуїтивно ясно, що рух із затухаючими коливаннями виникне, якщо крива D в точці рівноваги Q опускається до осі абсцис OP крутіше (під великим кутом), ніж крива S. Вибуховий коливальний рух виникаємо у разі, коли крива D менш крута по відношенню до осі OP, ніж S (кут нахилу кривої D до осі OP менше кута нахилу S). При рівних кутах нахилу D і S виникають регулярні коливання, тобто, незгасаючі і невибухові.

Рішення можна одержати алгебраїчно для випадку лінійних функцій попиту і пропозиції: $D = \alpha + aP, S = \beta + bP$. Значення рівноваги $\overline{P}$ і $\overline{X}$ будуть задані рівняннями: $\overline{X} = \alpha + a\overline{P} = \beta + b\overline{P}$, тобто

$$\overline{P} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}, \overline{X} = \frac{b\alpha - a\beta}{b - a} \tag{12}$$

Дискретна динамічна модель задається рівнянням:

$$X_t = \alpha + aP_t = \beta + b\overline{P}_{t-1.} \tag{13}$$

Шукаємо спочатку рішення, що дає рівновагу. Для цього покладемо $P_t = \overline{P}$ і $X_t = \overline{X}$ Для всіх значень t

.

$$\overline{X} = \alpha + a\overline{P} = \beta + b\overline{P}, \tag{14}$$

Набуваємо ті ж значення $\overline{P}$ і $\overline{X}$, що і в (12). Отже, якщо в якому-небудь періоді існували ціни і об'єми, що забезпечують рівновагу, то в динамічній моделі (13) вони зберігаються і в подальших періодах. Статична рівновага узгоджується з цією моделлю. Віднімемо рівняння (14) з (13) і покладемо

$$p_t = P_t - \overline{P}, x_t = X_t - \overline{X}.$$

Тоді

$$x_t = ap_t = bp_{t-1}. \tag{15}$$

Рівняння (15) аналогічні (13), за винятком того, що вони описують відхилення від рівнів рівноваги (тепер уже відомо, що такі існують). Обидва ці рівняння є різницевими рівняннями першого порядку. Покладемо $c = b/a$ і підставимо його в рівняння (15), так що різницеве рівняння відносне p_t буде: $p_t = cp_{t-1}$. При даному значенні p_0 у момент t = 0 рішення легко знаходиться шляхом ітерації:

$$p_t = p_0 c^t, P = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})c^t .$$

Об'єми купівель-продажів в кожен період визначаються з рівняння (15). Звичайно крива попиту йде внизз $(a < 0)$, а крива пропозиції - вгору $(\beta > 0)$, тобто $c = b/a < 0$. В цьому випадку покладемо $r = |c| = b/(-a)$, так що r буде позитивне. Тоді $p_t = p_0(k)r^t$ і послідовні значення p_t, при $t = 0,1,2,...$ будуть відповідно p_0, $-p_0 r, -p_0 r^2, -p_0 r^3, ...,...,$ отже p_t приймає по черзі позитивні і негативні значення. Отже, чергуються і знаки P_t, які по черзі розташовуватимуться вище і нижче $\overline{P}$. Існує наступні три можливості:

1) $b > (-a)$ - кут нахилу S(к OP) більше, ніж кут нахилу D. В цьому випадку $r > 1$, і ряд послідовних значень p_t є нескінченно зростаючим по абсолютній величині. Отже, $P \to \infty$, і має місце вибухове коливання (при чергуванні знаків);

2) $b = (-a)$ - кути нахилу D і S рівні. В цьому випадку $r = 1$, і ряд значень p_t просто складатиметься з чергування p_0 і $(-p_0)$. Тому P_t буде послідовне більше і менше P на одну і ту ж величину, рівну первинній розбіжності $(P_0 - \overline{P})$, тобто матиме місце регулярне коливання (з чергуванням знаків).

3) $b < (-a)$ - кут нахилу D (до OP) більше, ніж S. В цьому випадку $r < 1$, і послідовність p_t, зменшується по абсолютній величині. Значить, $P_t \to \overline{P}$ послідовно зліва і справа, тобто прагне із затухаючими коливаннями до рівня рівноваги.

У випадку (3), чим більше буде a по відношенню до b, тобто чим крутіше D порівняно з S, тим швидше затухатимуть коливання і тим швидше P_t прагнутиме до $\overline{P}$. Початкові збурення також роблять вплив на амплітуду коливання. Чим далі P_0 від $\overline{P}$, тим більше буде розмах коливань і тим більший проміжок часу, необхідний для їх припинення.

Слід зазначити, що випадок (2) з коливаннями, що продовжуються, настільки рідкісний, що його можна вважати майже тривіальним - на базі його не можна побудувати ніякій теорії циклу.

Проведемо аналіз випадку (3). Не дивлячись на можливе заперечення, що полягає у тому, що затухаючі коливання «нереальність», можна запропонувати дуже простий розвиток моделі (3) із затухаючими коливаннями, яке дозволяє представити рух P_t з коливаннями, що продовжуються, в часі. Для цього замість кривих попиту і пропозиції, незмінних в часі, візьмемо криві, які під впливом зовнішніх сил змінюються в часі або регулярно, або циклічно, або випадково, або абияк інакше. Тоді ще до припинення коливань, показаних на рис 6.6, яке-небудь зрушення в кривій D або S приведе до збурення і коливання з'являться знову. Наприклад, Q_0 могла знаходитися в точці рівноваги або поблизу неї до зрушення вгору кривою D до положення, показаного на мал. 4. Тоді коливання відбуватимуться вище - описаним чином, продовжуючись, скажімо, до точки Q_3, де коливальний рух буде порушений зрушенням вгору кривій S. Виникне, отже, коливальний рух з ще більшою амплітудою, яке поступово припиниться до появи якогось нового збурення. Для лінійної моделі можливе тлумачення алгебри у разі паралельного переміщення кривих попиту і пропозиції. Рівняння (13) тоді матиме вигляд:

$$X_t = \alpha_t + aP_t = \beta_t + bP_{t-1},$$

де α_t, β_t, характеризують зрушення в момент $t = 0,1,2,3,...$. Різницевим рівнянням щодо ціни буде:

$$P_t = \frac{b}{a} P_{t-1} + \frac{\beta_t - \alpha_t}{a} \tag{16}$$

Для вирішення рівняння (16) необхідно лише визначити різницю зміщень в часі попиту і пропозиції.

У безперервній моделі ціна є функція часу $P(t)$. Попит і пропозиція (потоки в одиницю часу) суть також функції часу. Попередня павутиноподібна модель враховувала запізнювання пропозиції. Цьому грубо відповідатиме передумова про зміну ціни на стороні попиту, а не пропозиції. Тоді одержимо модель, рівносильну моделі з безперервним запізнюванням пропозиції. Це запізнювання має просту показову форму. $D(t)$ залежить від P і dP/dt, а $S(t)$ - тільки від P. Модель діє, як і у попередньому випадку, а саме: у кожен момент ціна P встановлюється так, щоб попит повністю поглинаючи пропозиція, тобто $X(t)$ і $P(t)$ задовольняли рівнянню:

$$X = D\left(P, \frac{dP}{dt}\right) = S(p)$$

Якщо функції лінійні, то

$$X = \alpha + aP + a_1 \frac{dP}{dt} = \beta + bP. \qquad (17)$$

Покладемо $P(t) = \overline{P}$ і $X(t) = \overline{X}$ для всіх t, тобто для сумісного положення рівноваги обох змінних:

$$\overline{X} = \alpha + a\overline{P} = \beta + b\overline{P}. \qquad (18)$$

Віднімемо (18) з (17) і покладемо $p = P - \overline{P}$ і $x = X - \overline{X}$. Оскільки $dp/dt = dP/dt$, то

$$x = ap + a_1 \frac{dp}{dt} bp. \qquad (19)$$

Рівняння (17) і (18) є диференціальними рівняннями першого порядку. Покладемо $c = \dfrac{b-a}{a_1}$

Тоді диференціальне рівняння відносно $P(t)$ матиме вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = cp\,.$$

Для вирішення помітимо, що $\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d}{dt}\ln p$. Тоді $\dfrac{d}{dt}\ln p = c$, тобто, $\ln p = const + ct$, тобто $p = p_0 e^{ct}$, або $P = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})e^{ct}$.

У звичайному випадку, якщо $a < 0$, $a_1 < 0, b > 0$, то $a < 0$, де $c = \dfrac{b-a}{a_1}$. Отже, ціна $P(t)$ рухається в часі монотонно до $\overline{P}$ - ціні рівноваги, оскільки різниця $p \to 0$ подібно показовій функції e^{-t}. Менш звичний випадок, коли також $b < 0$. Але якщо тільки $-b < -a$, тобто кут нахилу D до осі OP в площині OPX більше, ніж кут нахилу S, то приходимо до того ж результату, що і в першому випадку. Диференціальне рівняння цієї моделі має менше рішень, ніж відповідне звичайно-різницеве рівняння, приведене вище.

Розглянуті павутиноподібна і безперервна моделі дуже прості і добре відомі. Вони є частково динамічними, оскільки встановлюють співвідношення на ринку тільки одного товару і враховують ціну лише його одного, а не ціни інших товарів і доходи. Проте, вони містять основні формулювання динаміки і дозволяють розкрити деякі найважливіші властивості, загальні для всіх динамічних моделей попиту і пропозиції. Перерахуємо ці особливості.

1. Модель припускає деякі функціональні співвідношенні.

В даному випадку це — ринковий попит покупців і пропозиція продавців. Кожне з них представляє функцію ціни. Ці функції є по суті побудовами на основі минулого або очікуваного. Ціна або дана покупцям і продавцям ззовні, або передбачається ними. Попит представляється як планована або передбачувана величина покупок, пропозиція — як планована або передбачувана величина продажів, причому всі ці пропозиції приурочуються до початку проміжку часу t. Продавці чекають, що ціна буде такою ж, як і в попередній період

P_{t-1} і відповідно припускають продати $S = S(P_{t-1})$. Покупці зважають лише на фактичну ціну і відповідно до цього планують свої покупки в розмірі $D_t = D(P_t)$.

2. Форма функції також задана. Задачу можемо спростити, розглядаючи окремий випадок при певній формі функції (наприклад, лінійної $D = \alpha + aP$), або ж узявши наближення до даної форми функції (наприклад, лінійну апроксимацію в обмеженій області біля точки рівноваги). Це можна здійснити за допомогою розкладання в ряд Тейлора функції попиту з малою різницею $P - \overline{P}$:

$$D(P) = D(\overline{P}) + D(\overline{P})(P - \overline{P}) = \alpha + aP.$$

Прийнята в задачі лінійна (або будь-яка інша) форма повинна бути відповідною і бути або хорошою апроксимацією, або зручним спрощенням. Так, коефіцієнт а, позначений вище, може бути або коефіцієнтом при Р в лінійній функції попиту, або нахилом прямої попиту в точці рівноваги. У останньому випадку він може приблизно відображати малі варіації Р навколо $\overline{P}$.

3. Необхідно точно визначити умови, при яких діє модель. Це припускає перехід від очікуваних і планованих величин на основі минулого до реалізованих фактично. Необхідно точно визначити специфічну природу зв'язків між фактичними значеннями змінних і механізм переходу передбачуваних величин у фактичні. У даній моделі з рухом даного товару на одному ринку відносини, що фактично склалися, характеризуються рівністю покупок і продажів ((X_t, за визначенням). Далі, в даному випадку перехід від очікуваних величин до фактичних здійснюється «методом рівноваги», де ціна і є «врівноважуючою» змінною. На початку періоду продавці чекають, що ціна буде P_{t-1} і пропонують для продажу продукцію S_t Зміна запасів не передбачається (хоча можливо, що товар є швидкопсувним), так що пропозиція повинна бути рівне X_t (продажі = купівлям). В процесі встановлення ринкової рівноваги попит, отже, стає рівним пропозиції (= продажам = купівлям), оскільки ціна досягає такого рівня, при якому пропозиція повністю поглинається. Всі економічні очікування реалізуються. Виняток становить лише ціна P_{t-1}, яку чекали продавці. Вона не співпадає з реалізованою ціною P_t, управляючої ринком в даному періоді.

За допомогою дуже невеликої модифікації цієї дискретної моделі можна абсолютно змінити умови її дії, ввівши ступінчасту функцію (метод послідовного порушення рівноваги). У момент $t-1$ виробники випускають кількість товарів, відповідну домінуючій у цей момент ціні P_{t-1}. В кінці періоду цю масу товарів придбавають торговці, так що її можна продати протягом наступного періоду t (як S_t). На початку періоду t на основі всіх відомих на той момент даних торговці встановлюють ціни продажів P_{t-1}. Покупці тоді вирішують, скільки вони куплять за цими цінами (D_t). У моделі передбачається, що торговці вгадують завжди правильно і встановлюють ціни на такому рівні, при якому вони можуть збути весь запас товарів: $S_t = D_t$ = об'єм купівель-продажів.

У моделі необхідно передбачити і варіювання — як запобіжний засіб проти неправильних предугадаваній цін торговцями. Нехай встановлена ними ціна P_t така, що D_t перевершує кількість товарів, що продаються S_t. За наявності торгових запасів попит (рівний купівлям-продажам) можна покрити за рахунок їх зменшення. Пропозиція, що тоді очікувалася S_t буде менше фактичних продажів і різниця доведеться покрити за рахунок запасів. В результаті покупці реалізують свої плани (попит, що припустить = фактичним покупкам), але продавцям доведеться виробити несподівані вилучення запасів. З другого боку, якщо відсутні або малі запаси (наприклад, швидкопсувних товарів), то попит не вдасться задовольнити, і його вимушене скорочення зажадає обмеження споживання або інших подібних заходів. Тоді передбачуваний попит буде урізаний до величини фактичних покупок, і у покупців виникнуть незаплановані заощадження, продавці ж реалізують свої плани. У більшості моделей звичайно приймається, що плани покупок реалізуються (очікуваний попит рівний фактичним закупівлям), а можливий «розрив» компенсується вкладеннями. Таке припущення може бути розумним або зручним, але, як показує приведений приклад, воно, звичайно, є необхідним.

4. Умова дії моделі, що задовольняється у фактичних ринкових відносинах, записується у вигляді рівняння з відповідною змінною. В даному випадку ціна є такою врівноважуючою змінною. Задача полягає в тому, щоб позбавитися інших змінних ((D_t , S_t і звично фактичного значення X_t) і зосередити найбільшу увагу на одній ((P_t). Решта змінних (наприклад, X_t) можна знайти, коли скоро визначена найважливіша змінна (P_t). Рівняння павутиноподібної моделі є простою формою різницевого рівняння з одноінтервальним запізнюванням ((P_t і P_{t-1} явно входять в рівняння). Шукається рішення цього рівняння. У разі рівноваги без запізнювання питання зводиться до знаходження одного або декількох значень Р, сумісних з умовами рівноваги. За наявності запізнювання в звичайно-різницевому рівнянні рішення припускає, що задані і визначені якісь початкові значення або умови, в даному випадку початкова ціна P_0. Рівняння характеризує дію моделі в кожен проміжок часу, але результат впродовж часу, узятого в цілому, залежить від існуючої початкової конфігурації, подібно тому, як опущена в автомат монета приводить його в дію. Модель може «стартувати» лише з когось початкового положення. Економічно це означає, що зміну ціни в часі можна визначити, лише знаючи початкове порушення рівноваги або відхилення її від положення рівноваги. Той факт, що в даному прикладі вимагається знати лише одне початкове значення, є випадковим. Він є результатом існування тільки одноінтервального запізнювання, того, що відповідне звичайно-різницеве рівняння буде першого порядку. При багатократному або розподіленому запізнюванні звичайно-різницеве рівняння матиме вищий порядок і потрібно буде знати не одне, а декілька початкових значень.

5. Рішення різницевих рівнянь у ряді випадків може бути зведене до методики рішення і аналізу диференціальних рівнянь. Рішення істотно спрощується рекурсивній моделі. Це значить, що якщо дані всі змінні до (($t-1$), то модель забезпечує і отримання одного за іншим значень змінних для інтервалу t. У даному випадку при заданих P_{t-1}, виходить спочатку $X_t = S_t$, а потім P_t .

При дослідженні рішень моделей попиту і пропозиції виникають питання, пов'язані з економічною інтерпретацією. Першим завжди виникає наступне питання: чи існує положення рівноваги, сумісне з рівнянням? Відповідь дається підстановкою в рівняння $P_t = \overline{P}$ для всіх t. В даному випадку таке $\overline{P}$ існує, і це є статичний рівень. У інших випадках такого $\overline{P}$ може не існувати. Застосовується і інший штучний прийом: визначаючи $\overline{P}$ прослідити не зміну первинної величини P_t, а її відхилення від положення рівноваги, $p_t == P_t -- \overline{P}$. Це має економічний сенс, оскільки інтерес представляє саме відхилення від положення рівноваги. Математично якнайкращий спосіб такого перемикання зводиться до віднімання рівняння, що характеризує точку $\overline{P}$, з рівняння, що виражає P_t .

Модель зі всією очевидністю показує, що статика і динаміка тісно взаємозв'язані. Динамічна модель типу павутинової розглядає рухи навколо положення рівноваги або відхилення від нього. Проте стійке існування положення рівноваги (тобто одного разу досягнуте, воно зберігається постійно), сумісної з моделлю, зовсім не припускає, що за всяким відхиленням слідуватиме повернення в початкове статичне положення. Рух може віддалятися від початкового статичного положення або бути направленим до якогось іншому, відмінному від початкового. І, навпаки, питання про «стійкість» положення рівноваги в статичному випадку повинне і може розглядатися лише з погляду динамічної моделі. Положення рівноваги стійке, якщо початкове обурення породжує поворотний динамічний рух до положення рівноваги, а не убік від нього і не до якого-небудь іншого положення.

Безперервна модель має, загалом, ті ж властивості, відрізняючись головним чином в акцентуванні або в деталях. Функції моделі представляють попит і пропозицію залежно від ціни і швидкості зміни останньої. Припущення і плани покупців і продавців представляються тими, що безперервно пристосовуються в часі до руху цін. Ці очікування, щоб бути сумісними, Повинні бути ланками одного ланцюга. Виражаючи співвідношення очікуваних величин попиту і пропозиції модель діє знову-таки по методу наближення до положення рівноваги. Ринкові сили безперервно змінюють ціни так, щоб пропозиція була повністю реалізована. Ціна є змінною, що забезпечує рівновагу, змінюється від одного моменту до іншого для підтримки рівності попиту і пропозиції, будучи загальною для покупок і продажів (потоків у відповідний момент часу). Основна відмінність полягає в інтерпретації моделі з погляду рішень покупців і продавців. У дискретному аналізі одиницею часу був вибраний інтервал ухвалення рішень або перегляду планів, характерною межею була відмінність між очікуваннями (намірами) і їх здійсненням (реалізаціями). Все це загалом зникає в безперервній моделі, оскільки передбачається, що ухвалення рішень, перегляд їх і пристосування до обстановки, що змінилася, відбувається безперервно. Проте багато властивостей дискретної моделі можна ввести і в безперервну, наприклад запізнювання або зміни запасів.

З математичної точки зору безперервна модель веде до диференціального рівняння щодо якої-небудь змінної (в даному випадку $P(t)$) а не до звичайно-різницевого.

Рекомендована література

1. Агапова Т.М., Бехренс Д., Курран Д. Динамические системы в экономике.- Донецк. ДонГУ, 2000.- 140с.
2. Арнольд В. И. Теория катастроф.- М.: Наука, 1990.- 128 с.
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследовfния динамических систем на плоскости. М. Наука, 1976.- 496 с.
4. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.— М.: Мир, 1984.— 350 с.
6. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства.— М.: Экономика, 1985.- 240 с.
7. Данич В. Н. Идентификация быстрых процессов. Методы и модели.— М.: Арт-Бизнес-Центр, 1999.— 230 с.
8. Занг В.-Б. Синергетическая экономика.- М.: Мир, 1999.-336 с.
9. Капица СП. Общая теория роста человечества (неограниченные возможности и возможные ограничения).— М.: Наука, 1999.
10. Капица СП., Курдюмов СП., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М: Эдиориал УРСС, 2003.- 288с.
11. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов.- М.: ЮНИТИ, 1998.- 240 с.
12. Красе И.А. Математические модели экономической динамики.- М.: Сов. радио, 1985.- 280 с.
13. Курдюмов СП, Ахромеев Т.С, Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур.- М.: Знание, 1985.- 48 с.
14. Курдюмов СП., Галактионов В.А., Самарский А.А. Процессы в открытых диссипативных системах.— М.: Знание, 1987.
15. Курдюмов СП., Малинецкий Г.Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы.— М.: Знание, 1983.— 64 с.
16. Курдюмов СП., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Синергетика — новые направления.— М.: Знание, 1989.— 48 с.
17. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление.— М.: Мир, 1969.- 200 с.
18. Лысенко Ю. Г., Петренко В. Л., Забродский В. А., Овечко В. С, Христиановский В. В., Бир Ст., Москардини А. Экономическая кибернетика. Уч пос. Дон.ун-т.— Донецк, ДонГу, 1999.- 397с.
19. Лысенко Ю. Г., Петренко В.Л., Тимохин В.Н., Филиппов А.В. Экономическая динамика: Уч. пособие.- Донецк: Изд-во ДонГУ, 2000.- 176 с.
20. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Современные проблемы нелинейной динамики. — М: Эдиориал УРСС, 2002.— 360 с.
21. Милованов В.П. Неравновесные социально — экономические системы: синергетика и самоорганизация,— М: Эдиориал УРСС. 2001.- 264 с.
22. Милованов В.П., Пупков К.А. Качественные методы анализа соц-экон. явлений.: Отчет МИЭМ / гос.регистр № 01814003622, инв.№0281.8005273. М., 1981.- 320 с.
23. Моисеев Н.Н. Алгоритмы развития. М. Наука, 1987, — 304с.
24. Никайдо Х Выпуклые структуры и математическая экономика.- М.: Мир, 1972.- 520 с.
25. Николис Г., Пригожий И. Самоорганизация в неравновес-н эгх системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.— М.: Мир, 1979.
26. Перегудов Ф.И., Тарасенко В.А. Введение в системный анализ.— М.: Высшая школа, 1989.— 320 с.
27. Петере Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ.- М. Мир, 2000, - 333с.
28. Постон Т., Стюарт Й. Теория катастроф и ее приложения.-М.: Мир, 1980.- 576 с.
29. Пригожий И., Стенгерс И. Время, хаос, квант: к решению парадокса времени.— М.: Прогресс, 1994.— 266 с.
30. Пригожий И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. — М: Эдиориал УРСС, 2001.— 312 с.
31. Пригожий И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой.- М.:

Прогресс, 1986.
32. Рейссич Р., Сенсоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных диф. ур-ний. М. Наука, 1974, - 318 с.
33. Сидоренко В.Н. Системная динамика.- М.: Экономический ф-тет МГУ; ТЕИС, 1998.- 208 с.
34. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- 5-е изд.- М.: Наука, 1979.
35. Хакен Г. Синергетика.- М.: Мир, 1980.
36. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.— М.: Мир, 1985.
37. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.- М.: Мир, 1985.
38. Цисарь И.Ф., Нейман В.Г. Компьютерное моделирование экономики.- М.: Диалог-МИФИ, 2002.- 304 с.
39. Шустер Х. Детерминированный хаос. Введение.- М.: Мир 1988.