УДК 536.2

Панчишин В. Б.– ст. гр. КА-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК КРАЄВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ПРЯМОКУТНИКУ

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Шелестовський Б. Г.

Побудуємо розв'язок рівняння

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \{0 \le x \le l;\ 0 \le y \le b\}, \tag{1}$$

з краєвими умовами

$$u(0, y) = u(l, y) = 0; \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,b) = f_2(x). \tag{3}$$

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $u(x, y) = \phi(x)\psi(x)$ (4)

$$\frac{\phi''}{\phi} + \frac{\psi''}{\psi} = 0; \quad \frac{\phi''}{\phi} = -\lambda; \quad \frac{\psi''}{\psi} = \lambda.$$

$$\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad \psi'' - \lambda\psi = 0. \tag{5}$$

З умов (2) маємо

$$\phi(0) = \phi(l) = 0 \tag{6}$$

Розв'язавши перше рівняння (5) та задовольнивши умови (6), одержимо $\phi_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$

Друге рівняння (5) при $\lambda = \lambda_n$ має загальний розв'язок

$$\psi_n(y) = C_n ch\sqrt{\lambda_n}\, y + D_n sh\sqrt{\lambda_n}\, y. \tag{7}$$

Розв'язок задачі (1)-(3) подамо у вигляді ряду

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n ch\sqrt{\lambda_n}\, y + D_n sh\sqrt{\lambda_n}\, y\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{8}$$

Розкладемо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ у ряд Фур'є

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n ch\frac{\pi n}{l}b + D_n sh\frac{\pi n}{l}b\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{9}$$

Коефіцієнти якого визначаємо із умов (3):

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx \tag{10}$$

$$C_n ch\frac{\pi n}{l}b + D_n sh\frac{\pi n}{l}b = \frac{2}{l}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx.$$