УДК 577.944

Кравчинюк М.О. - ст. гр. ХС-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА ПРИКЛАДІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ПО ЧАСУ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Фурсевич Л.В.

Перетворення Лапласа по часу визначається формулою $\overline{u}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt$, (1)

а обернене перетворення $$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}\overline{u}(s)\,ds. \qquad (2)$$

Розглядається задача для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (0<x<+\infty,\ t>0), \qquad (3)$$

з граничними умовами $u(0,t)=\text{A}$ (4); $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0$, (5)

та початковою умовою $u(x,0)=0$. (6)

Застосовується перетворення (1) до рівняння (3) з урахуванням того, що

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\, e^{-st}dt = s\int\limits_0^\infty u(x,t)\, e^{-st}dt - u(x,0) = s\overline{u}-u(x,0), \qquad (7)$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, e^{-st}dt = \frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^\infty u(x,t)\, e^{-st}dt = \frac{d^2\overline{u}}{dx^2}. \qquad (8)$$

Використовуючи початкову умову (6), замість (3) одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}-s\overline{u}=0 \qquad (0<x<\infty), \qquad (9)$$

з граничними умовами $$\overline{u}(o,s)=\frac{\text{A}}{s}; \qquad (10)$$

$$\lim_{x\to\infty}\overline{u}(x,s)=0. \qquad (11)$$

Рівняння (9) має загальний розв'язок $\overline{u}=C_1e^{x\sqrt{s}}+C_2e^{-x\sqrt{s}}$, де C_1 *і* $C_2-const$, які визначаються з граничних умов. Із (11) знаходимо, що $C_1=0$, а з (10) – $C_2=\frac{\text{A}}{s}$, отже

$$\overline{u}(x,s)=\frac{\text{A}\ e^{-x\sqrt{s}}}{s}. \qquad (12)$$

Підставимо (12) у формулу обернення (2), приведемо інтеграл до дійсного вигляду і остаточно одержимо розв'язок задачі (3)-(6):

$$u(x,t)=\frac{2\text{A}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\beta^2}d\beta = \text{A}\,erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \qquad (13)$$

$erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ – спеціальна функція (функція Гаусса), яка є табульованою.