УДК 517.9
Василик І.– ст. гр. МБ-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯДРА ЯКИХ МІСТЯТЬ ФУНКЦІЇ БЕССЕЛЯ

Науковий керівник: Габрусєва І. Ю.

Часто при розв'язанні осесиметричних задач теорії пружності та термопружності, виникає необхідність в побудові розв'язків потрійних інтегральних рівнянь виду:

$$\int_0^\infty \eta F_i(\eta)\phi(\eta)J_0(\rho\eta)d\eta = f_i(\rho), \qquad \alpha_i \le \rho < \beta_i; \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \eta F_3(\eta)\phi(\eta)J_0(\rho\eta)d\eta = 0, \qquad a \le \rho < b,\ \ \rho > c; \tag{2}$$

тут $i = 1, 2$, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = b$, $\beta_1 = a, \beta_2 = c$, $\mathrm{F_i}(\eta)$ та $f_1(\rho)$ – відомі функції, $\phi(\eta)$ – шукана функція, $J_0(x)$ та $N_0(x)$ – циліндричні функції. Ввівши дві невідомі функції $x(\rho)$ та $y(\rho)$, визначені на відрізках $[0;a]$ та $[b;c]$ відповідно продовжимо рівняння (2) на всю додатну піввісь

$$\int_0^\infty \eta F_3(\eta)\phi(\eta)J_0(\rho\eta)d\eta = x(\rho)u(a-\rho) + y(\rho)[u(\rho-b)-u(\rho-c)], \qquad 0 \le \rho \le \infty,$$

тут $u(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Застосовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до останньої рівності, приходимо до виразу шуканої функції $\phi(\eta)$ через $x(\rho)$ та $y(\rho)$:

$$\phi(\eta) = \frac{1}{F_3(\eta)}\left[\int_0^a \rho x(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho + \int_b^c \rho y(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho\right]. \tag{3}$$

Невідомі функції $x(\rho)$ та $y(\rho)$ зручно шукати у вигляді:

$$x(\rho) = \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{\rho}{a}\lambda_n\right), \quad y(\rho) = \sum_{n=1}^N b_n\left[J_0\left(\frac{\rho}{b}\gamma_n\right)N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{\rho}{b}\gamma_n\right)\right],$$

де λ_n та γ_n – додатні корені рівнянь $J_0(x) = 0$ та $J_0\left(\frac{c}{b}x\right)N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{c}{b}x\right) = 0$ відповідно, a_n та b_n – невідомі коефіцієнти. Для відшукання цих коефіцієнтів, тобто для одержання виразу для функції $\phi(\eta)$ у формі (3), будемо вимагати виконання двох співвідношень (1). У результаті одержуємо рівності на основі яких можна побудувати систему відносно невідомих a_n та b_n:

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \eta \frac{F_i(\eta)}{F_3(\eta)} I_n^{(1)}(\eta)J_0(\rho\eta)d\eta + \sum_{n=1}^N b_n \int_0^\infty \eta \frac{F_i(\eta)}{F_3(\eta)} I_n^{(2)}(\eta)J_0(\rho\eta)d\eta = f_i(\rho), \quad \alpha_i \le \rho < \beta_i;$$

$$I_n^{(1)}(\eta) = \int_0^a \rho J_0\left(\frac{\rho\lambda_n}{a}\right)J_0(\rho\eta)d\rho;$$

$$I_n^{(2)}(\eta) = \int_b^c \rho\left[J_0\left(\frac{\rho\gamma_n}{b}\right)N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{\rho\gamma_n}{b}\right)\right]J_0(\rho\eta)d\rho.$$