Секція: **Математика**

УДК 536.2

Бабій Н.– ст. гр. КТ-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАДАЧА ПРО КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ МЕМБРАНИ

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Самборська О. М.

Однорідна прямокутна мембрана $(0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q)$, яка закріплена вздовж контура і має в початковий момент часу $t=0$ форму $f(x,y)=xy(p-x)(q-y)$, почала коливатися без початкової швидкості. Визначити закон вільних коливань мембрани.

Позначимо через $U(x, y.t)$ відхилення від положення рівноваги точки мембрани $M(x,y)$ в момент часу t. Функція $U(x,y,t)$ задовольняє рівняння в частинних похідних другого порядку: $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$. (1)

Запропонована задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння (1), який задовольняє крайові умови $U(0,y,t)=0,\ U(p,y,t)=0,\ U(x,0,t)=0,\ U(x,q,t)=0$, (2)

та початкові умови $U(x,y,0)=xy(p-x)(q-y),\ \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=0$. (3)

Задачу (1), (2), (3) будемо розв'язувати методом Фур'є:

$U(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$ (4)

Для функції $X(x)$ отримано рівняння $X''+\lambda^2 X=0$ (5)

та крайові умови $X(0)=0,\quad X(p)=0;$ (6)

для функції $Y(y)$ - рівняння $Y''+\mu^2 Y=0$ (7)

і крайові умови $Y(0)=0,\ Y(q)=0;$ (8)

для функції $T(t)$ одержимо рівняння $T''+a^2(\lambda^2+\mu^2)T=0.$ (9)

Розв'яжемо задачі (5), (6) та (7), (8), знайдемо розв'язок рівняння (9) і підставимо отримані результати у формулу (4):

$$U_{n,m}(x,y,t)=\left(A_{n,m}\cos w_{n,m}t+B_{n,m}\sin w_{n,m}t\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q} \quad (10)$$

Розв'язок задачі (1), (2), (3) шукаємо у вигляді подвійного ряду:

$$U(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}U_{n,m}(x,y,t). \quad (11)$$

З початкових умов (3) знайдемо невідомі коефіцієнти $A_{n,m}$ та $B_{n,m}$ і отримаємо розв'язок поставленої задачі:

$$U(x,y,t)=\frac{64p^2q^2}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{p}\sin\frac{(2m-1)\pi y}{q}}{(2n-1)^3(2m-1)^3}\cos w_{n,m}t,$$

де $w_{n,m}=\pi a\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{p^2}+\frac{(2m-1)^2}{q^2}}$.