УДК 539.3
Павлюк М. – ст. гр. КТ-22
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДО ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Самборська О.М.

Розглянемо нескінченний циліндр радіуса R, на поверхні якого підтримується стала температура U_0, а початкова температура всередині циліндра дорівнює нулю. Потрібно знайти розподіл температури всередині циліндра в момент часу t. Задачу розв'яжемо в циліндричній системі координат. Нехай $U(r,\varphi,z,t)$ - температура в точці $U(r,\varphi,z)$ в момент часу t. Процес розповсюдження тепла в однорідному ізотропному середовищі визначається рівнянням теплопровідності:

$$U'_t = a^2\left(U''_{rr} + (1/r)U'_r + \left(1/r^2\right)U''_{\varphi\varphi} + U''_{zz}\right), \qquad (1)$$

де a – деяка стала величина.

Оскільки температура всередині циліндра буде залежати тільки від r та t, то рівняння (1) приймає вигляд: $U'_t = a^2\left(U''_{rr} + (1/r)U'_r\right)$. (2)

Початкова та гранична умови даної задачі мають відповідно вигляд:

$$U(r,0) = 0; \quad (3) \qquad U(R,t) = U_0. \quad (4)$$

Для того, щоб звести дану задачу до задачі з однорідною граничною умовою, введемо функцію $V(r,t)$: $U(r,t) = V(r,t) + U_0$ (5)

Функція $V(r,t)$ повинна бути розв'язком рівняння (2) і задовольняти початкову умову

$V(r,0) = f(r) = -U_0$; (6) та граничну умову $V(R,t) = 0$. (7)

Застосовуючи метод Фур'є відокремлення змінних, візьмемо $V(r,t) = F(r)\cdot T(t)$. (8)

Для шуканих функцій $F(r)$ та $T(t)$ отримаємо рівняння:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad (9) \qquad F''(r) + 1/r\, F'(r) + \lambda^2 F(r) = 0. \quad (10)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд: $T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}$ (11)

Рівняння (10) заміною $\lambda r = x$ зводиться до рівняння Бесселя, для якого $n = 0$.

Розв'язок рівняння (10) $F(r)$ повинен бути скінченним при $r = 0$ і задовольняти умову $F(R) = 0$, Тому розв'язки рівняння (2), які задовольняють граничну умову (7) одержимо у вигляд: $V_n(r,t) = A_n e^{-\left(\mu_n^{(0)}\right)^2 a^2 R^{-2} t} J_0\left(\mu_n^{(0)} r R^{-1}\right)$, (12)

де $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку, $\mu_n^{(0)} (n = 1,2,3,...)$ - додатні корені цієї функції.

Щоб задовольнити початкову умову (6), складемо ряд: $V(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r,t)$. (13)

Використовуючи розклад функції $f(r) = -U_0$ в ряд за функціями $J_0\left(\mu_n^{(0)} r R^{-1}\right)(i = 1,2,3,...)$, знаходимо невідомі коефіцієнти A_n.