УДК 519. 217

Вербовський С. – ст.гр. МІ-13

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

СПЕКТРИ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Знайдемо регулярний періодичний дріб, який відповідає, наприклад, числу $\sqrt{14}$. Позначимо його через $\varphi_0 = \sqrt{14}$. Дріб зобразиться у вигляді: $\varphi_0 = \sqrt{14} = 3 + (\sqrt{14} - 3)$.
Нехай

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)} = \frac{5+\sqrt{14}-2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-2}{5} = 1 + \frac{1}{\varphi_2},$$

$$\varphi_2 = \frac{5}{\sqrt{14}-2} = \frac{5(\sqrt{14}+2)}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)} = \frac{4+\sqrt{14}-2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14}-2}{2} = 2 + \frac{1}{\varphi_3},$$

$$\varphi_3 = \frac{2}{\sqrt{14}-2} = \frac{2(\sqrt{14}+2)}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)} = \frac{5+\sqrt{14}-3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-3}{5} = 1 + \frac{1}{\varphi_4},$$

$$\varphi_4 = \frac{5}{\sqrt{14}-3} = \frac{5(\sqrt{14}+3)}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)} = 6 + (\sqrt{14}-3) = 6 + \frac{1}{\varphi_5}, \quad \varphi_5 = \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{14}-3}.$$

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{\varphi_1} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi_2}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\varphi_3}}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi_4}}}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\varphi_1}}}}}.$$

Таким чином, отримуємо регулярний періодичний дріб, який має довжину неперіодичної частини 1 і період 4: $\sqrt{14} = [3,1,2,1,6,1,2,1,6,...] = [3,(1,2,1,6)]$.
Проводячи аналогічні дослідження із іншими ірраціональними числами, можемо записати для $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + \frac{1}{\varphi_1}$, $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{\varphi_1}$. Таким чином, $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\varphi_1} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\varphi_1}}$, тобто $\sqrt{2} = [1,2,2,2,...] = [1,(2)]$. Узагальнюючи цей метод, можна, слідуючи Томасу Данцігу, записати спектр ірраціональних квадратних коренів: $\sqrt{N}$ = [α (неперіодична частина), (період)].

N	α	Період
2	1	2
3	1	1 2
5	2	4
6	2	2 4
7	2	1 1 1 4
8	2	1 4

N	α	Період
10	3	6
11	3	3 6
12	3	2 6
13	3	1 1 1 1 6
14	3	1 2 1 6
15	3	1 6

N	α	Період
17	4	8
18	4	4 8
19	4	2 1 3 1 2 8
20	4	2 8
21	4	1 1 2 1 1 8
22	4	1 2 4 2 1 8
23	4	1 3 1 8
24	4	1 8