УДК 519.21
Вітрук Р. – ст. гр. СП-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ У ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

Науковий керівник: к.т.н., доцент Федак С. І.

Для знаходження імовірності появи події А в m випробуваннях з n, за умови постійної характеристики p імовірності події А в одній спробі, використовують формулу Бернуллі

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

Однак при великих значеннях n ця залежність приводить до громіздких обчислень. Необхідність спрощення розрахунків спонукали до виведення асимпототичних формул Муавра-Лапласа та Пуассона. Ці залежності виводяться на основі формули Бернуллі.

Якщо в серії незалежних спроб $n \to \infty$, $p \to 0$, але так, що добуток $np = \lambda$ залишається сталим, то ймовірність $P_n(m)$ обчислюється за формулою *Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Дійсно, згідно формули Бернуллі з використанням λ:

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

Перейшовши до границі, коли $n \to \infty$, отримаємо:

$$\frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}\right] = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

В виведенні залежності локальної теореми Муавра-Лапласа використовується відома формула Стірлінга $n! = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n+\gamma}$, де γ - гамма-функція, та асимптотична формула $\ln(1+\alpha) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{\alpha^i}{i} + O(\alpha)^{n+1}$.

Користуючись відомими правилами дій над символами *O* та *o* і потенціювання, при переході n → ∞, отримуємо $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}$. З урахуванням функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, де $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, отримаємо $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$

За умови $\sqrt{npq} \ge 10$, користуючись потрійною нерівністю $\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ отримуємо формулу інтегральної теореми Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

-

УДК 519. 217
Грушицький О. – ст. гр. МІ-13