УДК 539.3

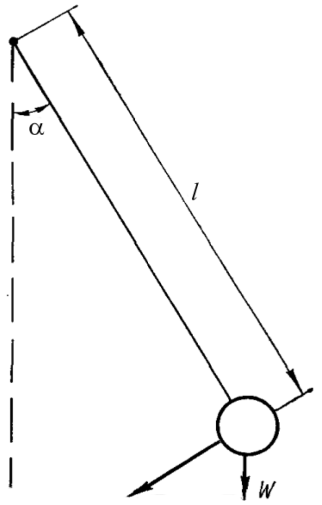
Сеник Л. – ст. гр. ЕС-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусєв Г. В.

Розглянемо маятник, що складається із невагомої нитки та вантажу вагою W, який прикріплено нижнього її кінця. Знайдемо рівняння коливань маятника припустивши, що його довжина міняється за законом $l = A + Bt$. Кутовий момент L дорівнює добутку моменту інерції I на кутову швидкість вантажу ω. Як відомо, $I = \frac{W}{g} r^2$, тому $L = \frac{W}{g} r^2 \frac{d\alpha}{dt}$. Момент сили є похідною від кутового моменту, отже:



$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{W}{g} r^2 \frac{d\alpha}{dt}\right). \qquad (1)$$

Нехтуючи опором повітря, будемо вважати, що маятник рухається лише під дією сили тяжіння. Отже сила, що намагається повернути маятник до положення рівноваги матиме вигляд: $W\sin\alpha$. При малих значеннях кута α можна записати, що $\alpha = \sin\alpha$. Тому її момент відносно опори

$$\tau = W\alpha l. \qquad (2)$$

Врахувавши вираз для l, із співвідношень (1) та (2) отримуємо:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{2B}{A+Bt}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{A+Bt}\cdot\alpha = 0. \qquad (3)$$

Зробимо заміну $u = \frac{A+Bt}{B}$, $du = dt$, $\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{dt}$. Тоді рівняння (3) набуде вигляду:

$$u^2 \frac{d^2\alpha}{du^2} + 2u\cdot\frac{d\alpha}{du} + m^2 u\cdot\alpha = 0, \qquad (4)$$

де $m^2 = \frac{g}{B}$. Співвідношення (4) є частковим випадком узагальненого рівняння Бесселя

$$\frac{d}{du}\left(u^p \frac{d\alpha}{du}\right) + \ au^j + bu^k\ \ \cdot\alpha = 0,$$

при наступних значеннях сталих: $p = 2$, $j = 1$, $a = m^2$, $b = 0$. Його загальний розв'язок $\alpha = u^{\frac{\gamma}{\varphi}}\left[C_1 J_n\left(\beta u^{\frac{1}{\varphi}}\right) + C_2 Y_n\left(\beta u^{\frac{1}{\varphi}}\right)\right]$, де $J_n\ u$ та $Y_n\ u$ – функції Бесселя першого роду,

$$\varphi = \frac{2}{2-p+j} = 2,\ \gamma = \frac{1-p}{2-p+j} = -1,\ \beta = \varphi\sqrt{a} = 2m,\ n = \frac{\sqrt{\ 1-p\ ^2 - 4b}}{2-p+j} = 1.$$

Отже розв'язок диференціального рівняння руху маятника (3) буде мати вигляд:

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A+Bt}}\left[C_1 J_1\left(2m\sqrt{\frac{A}{B}+t}\right) + C_2 Y_2\left(2m\sqrt{\frac{A}{B}+t}\right)\right].$$