УДК 621.88

Ів. Гевко
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ШНЕКА

Математичною моделлю крутильних коливань шнека (спіралі закріпленої на валу) є диференціальне рівняння з частинними похідними:

$$I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=Q\left(\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right). \qquad (1)$$

Крайові умови рівняння (1): $\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0$.

Після проведення перетворень, враховуючи, що закон зміни моменту сил інерції відносно осі обертання приймає значення: $M^{\Phi}=2b^2m(x)\Omega\omega\sin^2\frac{vx}{l}\sin 2\omega t dx$, для випадку повільно змінних законів зміни вздовж довжини шнека коефіцієнтів $I=I_0+\mu I_1(x)$, $J=J_0+\mu J_1(x)$, одержано диференціальне рівняння крутильних коливань:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\frac{GJ_0}{I_0}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\mu\overline{Q}\left(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\frac{2b^2m(x)}{I}\Omega\omega\sin^2\frac{vx}{l}\sin 2\omega t. \qquad (2)$$

У праві частині диференціального рівнянні (3) функція приймає значення:

$$\overline{Q}\left(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right)=\frac{1}{I}\left(Q\left(\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right)-I_1(x)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ_1\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right). \qquad (3)$$

Розв’язок рівняння за допомогою використання методу Бубнова-Гальоркіна:

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{GJ_0}{I_0}T(t)=\mu\left(F\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right)\right),\quad \phi=2\omega t. \qquad (4)$$

де $F\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right)=\frac{1}{p}\int_0^l\left[\mu\overline{Q}\left(\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right)-\frac{2b^2m(x)}{I}\Omega\sin^2\frac{k\pi}{l}x\sin 2\omega t\right]X_k(x)dx,\quad p=\int_0^l X_k^2(x)dx,$

а $X_k(x)$ - повна система функцій, що задовольняє крайовим умовам.

Диференціальне рівняння крутильних коливань для резонансного випадку можна представити у вигляді:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\left(2\frac{q}{p}\omega\right)^2T=\varepsilon\left(\overline{F}\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right)-\Delta T\right),\qquad \omega_\theta^2\approx\left(\frac{2q}{p}\omega\right)^2+\mu\Delta. \qquad (5)$$

У резонансному випадку на коливний процес суттєво впливає різниця фаз власних та вимушених коливань, тому резонансна амплітуда залежить від параметру $\gamma=\psi-\phi \;\rightarrow\; \psi=\gamma+\phi$. Ввівши цей параметр у диф. рівняння після усереднення по швидкозмінній фазі ϕ, отримуємо для випадку головного резонансу залежності:

$$\frac{da}{dt}=\mu\left(F_0^s(a)+h\cos\gamma\right);\qquad \frac{d\gamma}{dt}=2\omega-\omega_\theta+\mu\left(F_0^c(a)-(a)+\Delta\sin\gamma\right). \qquad (6)$$

Отримані залежності: визначають стаціонарне значення резонансної амплітуди як функцію параметрів системи; показують, що резонансні крутильні коливання можуть бути зумовлені як зовнішніми періодичним силами, так і згинальними коливаннями; показують, що величина резонансної амплітуди визначається не лише амплітудою періодичного збурення, розбалансуванням частот власних та вимушених коливань, але й характером нелінійних сил.