УДК 517. 944.
Л.Фурсевич
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

СПЕЦІАЛЬНІ ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНІ ЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглядається спеціальна початково-гранична лінійна задача для інтегро-диференціального рівняння теплопровідності, яке має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla^2 u+\dot{\varepsilon}*\frac{\partial u}{\partial t}-\dot{\lambda}*\nabla^2 u=f_0\ t,x \qquad x\in\Omega;\ t>0\ ; \tag{1}$$

$$u\ 0,x\ =u_0\ x\ ; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\ \vec{v}\cdot\nabla u\ +\dot{\varepsilon}*\frac{\partial u}{\partial t}+\dot{\lambda}*\ \vec{v}\cdot\nabla u\ =f_1\ t,s \qquad s\in\Gamma_1\ , \qquad (3_1)$$

$$\vec{v}\cdot\nabla u\ =0 \qquad s\in\Gamma_2\ , \qquad 3_2$$

де $\dot{\varepsilon}=\dfrac{d\varepsilon}{d\tau},\ \ \dot{\lambda}=\dfrac{d\lambda}{d\tau},\ \ \vec{v}$ - зовнішня нормаль до границі $\Gamma=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$ області Ω.

Формулюється задача в операторному вигляді у просторі $L^2\ \bar{\Omega}\ =L_2\ \Omega\ \oplus L_2\ \Gamma_1$ для одержання аналітичних розв'язків, збіжних як в області, так і на її границі:

$$\frac{d\bar{u}}{dt}+\mathrm{A}_1\bar{u}+\dot{\varepsilon}*\frac{d\bar{u}}{dt}+\dot{\lambda}*\mathrm{A}_1\bar{u}=\bar{f}, \qquad \bar{u}\ 0\ =\bar{u}_0. \tag{4}$$

Для її розв’язання використовується метод розкладу за власними функціями оператора A_1, який є симетричним, додатньо визначеним, його розширенням у просторі L^2 є самоспряжений додатньо визначений оператор, а область щільна у просторі L^2.
Враховуючи властивості оператора A_1, задача на його власні функції набуває вигляду:

$$\mathrm{A}_1\bar{\varphi}=\beta\bar{\varphi}, \tag{5}$$

його спектр $\beta_n\ {}_{n=1}^{\infty}$ дійсний і дискретний, а система власних елементів $\bar{\varphi}_n\ {}_{n=1}^{\infty}$ повна у гільбертовому просторі $L^2\ \bar{\Omega}$.Остання властивість дозволяє представити довільну функцію з $L^2\ \bar{\Omega}$ у вигляді узагальненого ряду Фур’є за ортонормованими власними функціями $\bar{e}\ x\ =\bar{\varphi}_n\ x\ /\|\bar{\varphi}_n\|$ задачі (5), яка може бути записана в еквівалентній диференціальній формі

$$-\nabla^2\varphi=\beta\varphi \qquad x\in\Omega\ \ ; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\beta\varphi \qquad (s\in\Gamma_1), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0 \qquad (s\in\Gamma_2)\,.$$

Задача (6) для канонічних областей Ω в ортогональних криволінійних системах координат розв’язується в аналітичному вигляді тому вважаємо, що власні значення і власні функції оператора A_1 відомі. Необхідно відмітити, що на відміну від класичного випадку в спектральній задачі (5) параметр входить як у рівняння, так і у граничну умову. Таким чином, операторна задача (4), а з нею і початково–гранична задача (1) – (3) теплопровідності середовищ з пам’яттю розв’язується поєднанням методу перетворення Лапласа і методу розкладу за власними функціями спектральних задач.