

519.816  
Б 90

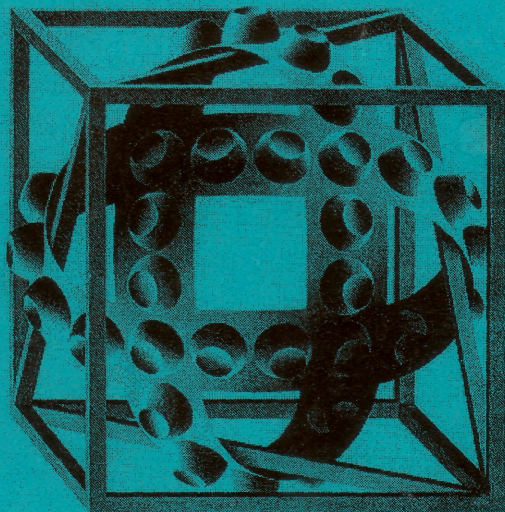
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Тернопільський державний технічний університет  
імені Івана Пулюя

---

**А.В.БУКЕТОВ**

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ**

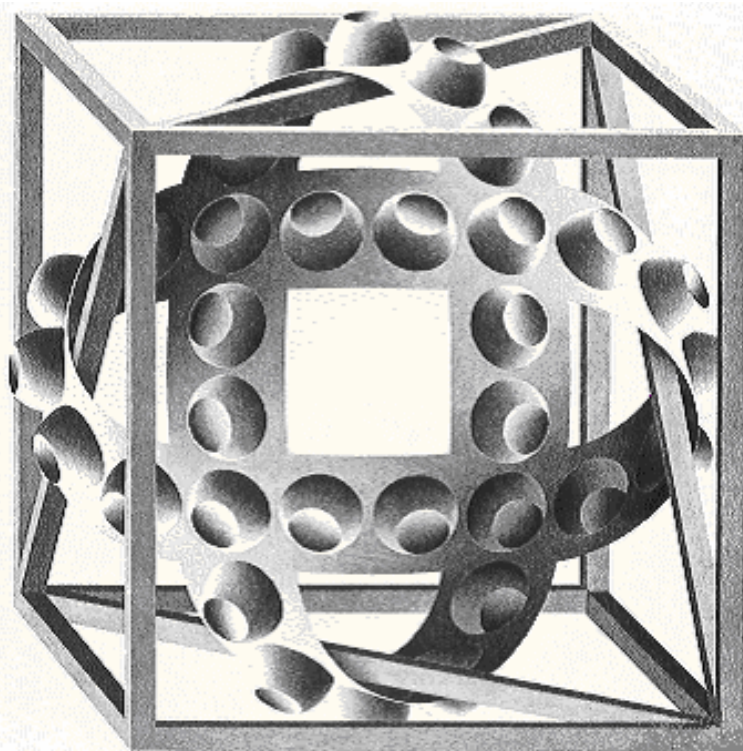


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Тернопільський державний технічний університет**  
**імені Івана Пулюя**

---

**А.В.БУКЕТОВ**

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ**  
**ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Тернопільський державний технічний університет  
імені Івана Пулюя

А.В.Букетов

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ**

Рекомендовано до друку на засіданні Вченої ради  
Тернопільського державного технічного університету  
імені Івана Пулюя  
(протокол №7 від 27 жовтня 2008р.)

**ТЕРНОПІЛЬ - 2009**

УДК 667.64

Букетов А.В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем. – Тернопіль: СМП «Тайп».- 2009.- 260с.

“Рекомендовано Міністерством освіти та науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних закладів” з напрямку 6.0925 “Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології” (Лист МОНУ від 17.12.2008р. № 1.4/18 – Г – 2751)

У посібнику викладено основи теорії ідентифікації і основні принципи аналізу та проектування інформаційних систем. Наведено теоретичні аспекти розроблення нових методів ідентифікації, які допомагають прискорити процес моделювання шляхом автоматизації процесів.

Показано, що у основу імітаційного моделювання покладена методологія системного аналізу. Вона дозволяє досліджувати проєктовану або аналізовану систему методами операційного аналізу, що включає такі взаємопов'язані етапи, як змістовна постановка задачі, розроблення концептуальної моделі, розроблення та програмна реалізація імітаційної моделі, перевірка її адекватності та оцінка точності результатів моделювання. Систематизовано підходи до оптимізації апріорної інформації після спостереження над об'єктом, розглянуто критерії вибору математичної моделі і прогнозування її поведінки в умовах виробництва.

Одним з головних аспектів, розкритих у посібнику, є те, що автором систематизовано основні положення теорії масового обслуговування. Це дає змогу аналізувати ефективність функціонування систем, визначати залежність між характеристиками потоку вимог, кількістю каналів, їх продуктивністю, правилами функціонування систем та їх ефективністю.

Посібник призначено для студентів, які навчаються за напрямом “Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології” і вивчають сучасні інформаційні технології у рамках дисципліни “Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів”. Може бути корисним для аспірантів та студентів відповідної спеціальності.

### **Рецензенти:**

Доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою  
ЕОМ Дніпропетровського національного університету  
залізничного транспорту імені ак. В.Лазаряна

І.В.Жуковіцький

Доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою  
“Автоматизації технологічних процесів та  
виробництв” Севастопольського національного  
університету ядерної енергії та промисловості

І.О.Попов

Доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою  
“Комп'ютерної інженерії” Тернопільського  
національного економічного університету

А.В.Карпінський

ISBN 966-451-000-9

## ПЕРЕДМОВА

З давніх часів людство витрачає великі зусилля на встановлення закономірностей явищ, що відбуваються у природі. Первинними у процесі пізнання завжди є результати спостереження. Вони є основою для створення моделі, а уже від моделі здійснюють перехід до практичної діяльності. Цю схему пізнання застосовують для природних явищ і для штучних об'єктів.

Побудова моделі за результатами спостереження є наслідком формалізації, яка необхідна для визначення основних ознак, зв'язків, закономірностей, що властиві об'єкта – оригіналу. При цьому формалізація об'єкта є основою відсіювання його несуттєвих ознак. Для одного і того ж об'єкта, залежно від конкретних вимог практики і типу поставленої задачі, може бути побудовано кілька моделей, здійснено формалізацію різних функцій цього об'єкта або зовнішніх впливів на нього. Для реалізації технологічних процесів також будують моделі функціонування, які відображають технічні, економічні, психологічні, соціальні та інші аспекти процесу, що забезпечує отримання необхідного продукту. Розроблення нових технологічних процесів було б неможливим без наявності відповідних моделей, які будують на основі спостереження і узагальненого досвіду.

У другій половині ХХ ст. значно зросла роль науки, яка узагальнює установлені процеси управління і експлуатації машин та механізмів цілеспрямованою діяльністю людського суспільства. Появі цих ідей і методів керування передували, з одного боку, узагальнення високоефективних принципів теорії автоматичного керування, а з другого боку, підвищені технічні можливості, у зв'язку з широким розвитком обчислювальної техніки. У області керування виникла необхідність використання нових принципів побудови моделей, формалізації результатів спостереження. У теорії автоматичного керування принципи побудови системи керування розробляли на основі заданої моделі. У подальшому виявили, що, у багатьох випадках, модель, прийнята при проектуванні, суттєво відрізнялась від реального об'єкта. Це значно

зменшувало або зводило нанівець ефективність розробленої системи керування. У зв'язку з цим виник один із важливих напрямків теорії керування, пов'язаний з побудовою моделі на основі спостереження. При цьому результати спостереження було отримано в умовах функціонування об'єкта під впливом зовнішніх критеріїв за його вхідними і вихідними змінними. Цей напрямок відомий на сьогодні як *ідентифікація систем* (виник біля 50-ти років тому).

Задача ідентифікації формулюється таким чином: за результатами спостереження над вхідними і вихідними змінними системи повинна бути побудована оптимальна у деякому розумінні модель, тобто формалізоване представлення цієї системи. Звідси стає очевидним зв'язок між задачею ідентифікації і вказаною загальною схемою встановлення закономірностей за результатами спостереження. Задача ідентифікації ґрунтується на сучасній теорії керування. Для її вирішення використовують сучасні обчислювальні машини. Останні, маючи велику швидкодію і практично необмежений об'єм пам'яті, створюють передумови для отримання, передачі і оброблення великих масивів спостереження, які необхідні для побудови адекватних моделей реальних об'єктів.

Ідентифікація складних виробничих об'єктів останнім часом стала одним із центральних питань, які виникають при побудові систем керування цими об'єктами. Без вирішення задачі ідентифікації неможливо ні здійснити цілеспрямоване проектування системи керування, ні побудувати адаптивну систему, яка працює в умовах неповної апріорної інформації і нестационарності об'єктів.

При вирішенні різноманітних задач аналізу і синтезу систем управління виникає необхідність опису (моделювання) властивостей об'єкта. Більшість сучасних технологічних, екологічних, біологічних та інших об'єктів, для яких необхідно проектувати системи керування, є складними багато-елементними системами. Спроби їх опису, які ґрунтуються на властивостях складових елементів, часто приводять до розроблення складних моделей. Великих успіхів можна досягнути не вникаючи у внутрішню структуру керованого об'єкта. У цьому випадку об'єкт характеризують як єдине ціле і

моделюють зв'язок між його вхідними і вихідними процесами. Звичайно, така модель не показує особливостей фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів, які відбуваються у об'єкті при його функціонуванні. Але отримані за допомогою такої моделі результати спостереження дозволяють проаналізувати зв'язки між входом і виходом об'єкта, що, у свою чергу, утворює сукупність тих відомостей, які достатні для проектування системи керування.

Модель об'єкта, яка описує цей зв'язок, характеризує властивості об'єкта при деяких припущеннях або при певних діапазонах зміни вхідного і вихідного процесів об'єкта.

Для ціленаправленого керування поведінкою об'єкта необхідно знати його характеристики, щоб правильно побудований сигнал керування міг перевести об'єкт з деякого початкового стану у необхідний. Визначенням характеристик об'єкта за результатами вимірювань вхідних і вихідних сигналів займається один із найважливіших напрямків теорії автоматичного керування, який називають *ідентифікацією*.

Ідентифікація (від лат. – *identifico* – ототожнення) – це процес побудови математичної моделі об'єкта, адекватній (від лат. *adaequatus* – зрівняний) об'єкту з точністю до заданого критерію. Розрізняють ідентифікацію у вузькому і широкому змісті.

Під ідентифікацією у вузькому змісті розуміють оцінювання параметрів математичної моделі при заданій її структурі за результатами вимірювань вхідних і вихідних сигналів.

Під ідентифікацією у широкому змісті розуміють як побудову самої моделі об'єкта, так і визначення її параметрів. Ідентифікація у широкому змісті є, як правило, довготривалим процесом.

Суттєве значення при розв'язку задач ідентифікації має апріорна інформація. Апріорна (від лат. *apriori* – із попереднього) інформація буває трьох видів:

- про фізико-механічні властивості об'єкта;
- про зовнішнє середовище;
- про виміряні змінні.

Зазвичай при ідентифікації опираються на накопичений

досвід, знання, інтуїцію дослідників.

Ідентифікацію поділяють на ідентифікацію у реальному часі і післяекспериментальну. У першому випадку при ідентифікації накладають жорсткі обмеження, у другому таких обмежень немає, але для створення адекватної моделі необхідно мати значну кількість апріорних даних. Крім того, обмеження накладають на час експлуатації і можливості ЕОМ.

Післяекспериментальна ідентифікація поділяється на два види:

- ідентифікація в режимі нормальної експлуатації;
- ідентифікація з подачею на об'єкт пробних вхідних впливів.

При цьому незалежно від виду ідентифікації на вхідні сигнали накладають обмеження за інформативністю. Зокрема, часові характеристики сигналів є інформативними, якщо сигнал разом зі своїми похідними складає незалежну лінійну функцію, а кількість частот на вхідному сигналі є більшою від половини оцінюваних параметрів.



## Розділ 1. Ідентифікація технологічних процесів

Розроблення систем автоматизації будь-яких технологічних процесів і об'єктів передбачає реалізацію таких взаємозв'язаних етапів:

- загальне вивчення керованого технологічного процесу і автоматизованого технологічного устаткування, за допомогою якого цей процес реалізується;
- ідентифікацію технологічного процесу як об'єкта автоматизації – розроблення нової або обґрунтування однієї з відомих його математичних моделей; крім того, ідентифікація технологічного процесу передбачає вибір його параметрів відповідно до вибраних критеріїв і обмежень, що накладаються;
- інженерний синтез системи автоматизованого керування технологічним процесом, що реалізує прийнятий алгоритм управління з бажаним ступенем точності його відтворення;
- розроблення і конструювання усього комплексу автоматизованої технологічної системи з урахуванням додаткових вимог енергетичного, експлуатаційного, найдійнісного, екологічного і техніко-економічного характеру.

Ідентифікація об'єкта автоматизації є одним з необхідних і первинних етапів роботи.

Задача ідентифікації, як задача визначення (або, точніше, оцінювання) параметрів і структури об'єкта виникає у двох випадках:

- по-перше, у процесах пізнання, коли будують пізнавальні моделі об'єктів і явищ, з якими стикається людина;
- по-друге, у процесах керування, пов'язаних з ціленаправленою зміною об'єкта, тобто з досягненням мети, поставленої людиною.

## 1.1. Ідентифікація у процесах пізнання

У процесах пізнання об'єкт ідентифікують, внаслідок чого створюють пізнавальну модель, яка відображає у необхідній мірі механізм функціонування об'єкта. Прикладом такого виду ідентифікації може бути вивчення оточуючої нас природи. Пояснення явищ природи, їх взаємний зв'язок і обумовленість, аналіз механізмів і т.д. – це основні задачі ідентифікації, які відображають важливу для людини специфіку об'єктів у оточуючому нас світі. Ця специфіка відображається у своєрідності причинно-наслідкових зв'язків кожного об'єкта або явища, які зручно представити у вигляді деякого “перетворювача” причини у наслідок (рис. 1.1). Опис “експлуатації” такого перетворювача будемо називати *моделлю*. Отже, під моделлю будемо розуміти судження (на будь-якій мові – математичній, графічній, алгоритмічній, розмовній і т.д.), які дозволяють імітувати явище, що спостерігається. Тобто, наприклад, ефективно передбачати наслідки за причинами. Проблема створення моделей характерна для процесу пізнання. Крім того, метою такого процесу є синтез моделей, що відображають специфічні особливості явища чи об'єкта, що вивчається.



Рис. 1.1. Об'єкт пізнання.

Очевидно, що конкретні цілі аналізу поведінки об'єкта конкретизують і мову, на якій описується модель. Зокрема, мовою значної кількості фізичних і технічних моделей є математика, а більшість біологічних моделей описано на звичайній природній людській мові. Прикладами пізнавальних моделей, сформульованих на математичній мові, є закон

Ньютона, Ома, Фарадея, Ленца і т.д. Такі моделі відображають специфічні взаємозв'язки причин і наслідків об'єктів при визначених припущеннях.

Надалі введемо термінологію, прийняту у теорії і практиці ідентифікації об'єктів. Формалізуємо сказане про причинно-наслідкові зв'язки. Позначимо причину буквою  $X$ , а наслідок –  $Y$ . Зв'язок між ними запишемо умовно у вигляді формули:

$$Y = F_m(X),$$

де:

$F_m$  – правило перетворення причини  $X$  у наслідок  $Y$ .

Це і є модель. Назвемо  $F_m$  оператором моделі.

Модельним оператором  $F_m$  описуються причинно-наслідкові зв'язки, що існують у об'єкті згідно наших уявлень про його властивості. При цьому зв'язки  $X$  і  $Y$  у реальному об'єкті аналогічно можна представити, використовуючи оператор об'єкта  $F_0$ .

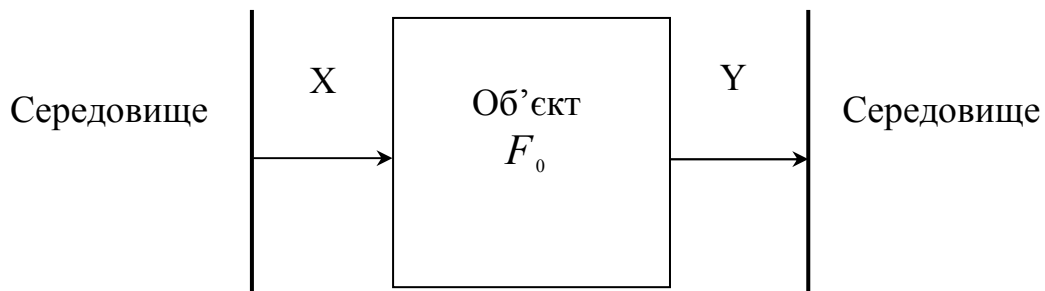


Рис. 1.2. Взаємодія об'єкта з середовищем.

На рис. 1.2 показано взаємодію об'єкта, що ідентифікується, з середовищем. Ця взаємодія відбувається по каналах  $X$  і  $Y$ . По каналу  $X$  середовище діє на об'єкт, а по каналу  $Y$  об'єкт діє на середовище. Задача ідентифікації зводиться до визначення оператора  $F_0$ , який зв'язує вхід і вихід об'єкта [1].

Нехай  $(X_1, \dots, X_N)$  – спостереження входу об'єкта, а  $(Y_1, \dots, Y_N)$  – відповідні їм спостереження його виходу у дискретні моменти часу  $(1, \dots, N)$ . Ці спостереження пов'язані невідомим оператором об'єкта  $F_0$ , тобто:

$$Y_i = F_0(X_i), (i = 1, \dots, N).$$

Задача ідентифікації полягає у побудові (синтезі) модельного оператора  $F_m$ , достатньо близького за деяким попередньо вибраним критерієм до оператора об'єкта  $F_0$ . Тобто, у результаті ідентифікації повинна існувати можливість на основі оператора  $F_m$  достатньо точно передбачити зміну  $Y$  у реальному об'єкті. Отже, процесом ідентифікації у широкому змісті є розроблення моделі і, як наслідок, процес синтезу модельного оператора  $F_m$ , який має бути максимально близьким до оператора об'єкта  $F_0$ , тобто:

$$F_m \approx F_0.$$

Для пізнавальних моделей, що є найширшим класом моделей, характерне використання значного спектру мов опису (форм і способів представлення оператора  $F_m$ ) – від словесних до спеціальних мов (схем, графіків і математичних формул). Друга (основна) особливість пізнавальних моделей полягає у тому, що у таких моделях прагнуть вказати всі причинно-наслідкові зв'язки, які є у об'єкті або виявлені в процесі його вивчення. Іншими словами, у таких моделях в структурі оператора  $F_m$  відображають механізм об'єкта або явища. При цьому намагаються визначити не тільки взаємозв'язок між  $X$  і  $Y$ , але й вирішити проблему формування причинно-наслідкових зв'язків у об'єкті, що вивчається [2].

Інший тип моделей – це кібернетичні та інформаційні, які синтезують для цілей управління. Такі моделі можуть і не відображати внутрішніх механізмів явищ та об'єктів, що абсолютно є необхідним для пізнавальних моделей. Інформаційні моделі повинні лише встановлювати певний формальний зв'язок між входом і виходом об'єкта, а не

копіювати його фізичну суть. Тому інформаційні моделі об'єкта різної фізичної природи можуть бути однакові. Так, наприклад, у теорії автоматизованого управління широко використовують поняття типових динамічних ланок. При цьому елементи, які є різними за структурою і фізичною природою, об'єднують у одну групу типових ланок за рахунок того, що їх динамічні властивості описуються однаковими диференціальними рівняннями, тобто мають аналогічні моделі.

## 1.2. Ідентифікація об'єктів

Проблема ідентифікації складається з багатьох аспектів і для її реалізації необхідно вирішити широкий спектр теоретичних та практичних завдань. На початковому етапі слід чітко усвідомити зміст поняття – “об'єкт ідентифікації”, тобто дати відповідь на питання: “Які загальні характеристики моделі об'єкта?” Друге питання пов'язано з постановкою задачі ідентифікації, її аналізом і особливостями. Третє питання – як встановити зв'язок проблеми ідентифікації з проблемою керування? І останнє питання полягає у тому, як визначити ефективність процедури ідентифікації [3, 4].

### 1.2.1. Об'єкт ідентифікації

Об'єкт ідентифікації зручно представляти у вигляді багатополіусника, показано на рис. 1.3,а, де:

$x_1, \dots, x_n$  – входи об'єкта, за якими спостерігають;

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  – входи, за якими не спостерігають;

$y_1, \dots, y_m$  – виходи об'єкта, за якими спостерігають.

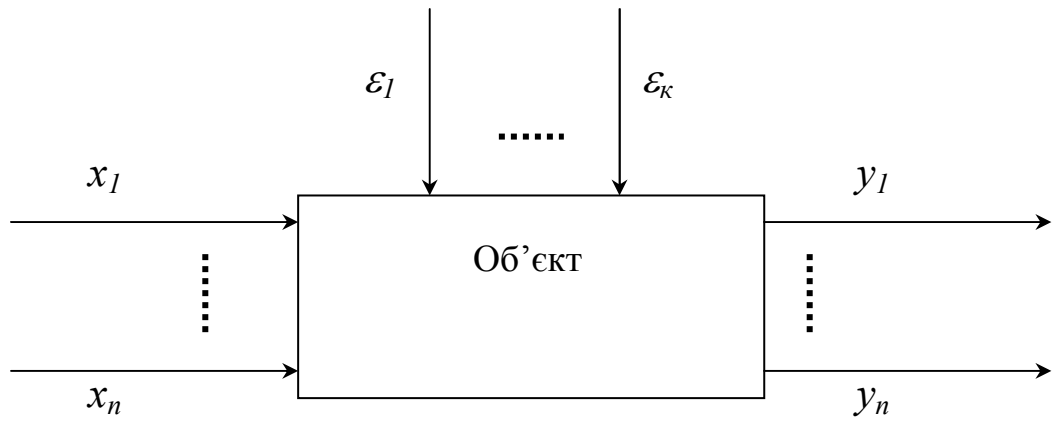
Багатовимірний об'єкт зручно описувати у векторній формі (рис. 1.3,б).

У цьому випадку:

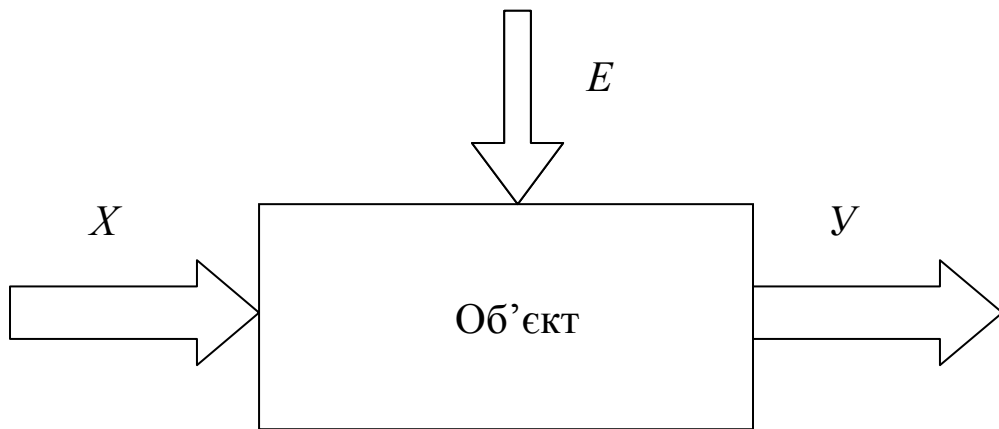
$X = (x_1, \dots, x_n)$  – входи об'єкта, за якими спостерігають;

$E = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  – входи, за якими не спостерігають;

$Y = (y_1, \dots, y_m)$  – виходи об'єкта, за якими спостерігають.



a)



б)

Рис. 1.3. Зображення об'єкта ідентифікації.

Всі входи об'єкта є видами впливу зовнішнього середовища на об'єкт. Водночас входи об'єкта є визначеними функціями стану середовища й часу. Оскільки відсутня модель ідентифікації, тоді входи об'єкта можна розглядати як випадкові функції часу, статичні властивості яких в загальному випадку невідомі. Тобто:

$$X = X(t), \quad E = E(t),$$

При цьому є відомими результати спостереження входу і виходу об'єкта, тобто є можливість реалізації функцій  $X(t)$  і  $Y(t)$  у неперервній або дискретній формі. Відносно входу  $E(t)$ , за яким не спостерігають, можна вважати, що є відомою його структура, тобто характер цієї випадкової функції. Обмежимося випадком, коли  $E(t)$  є нормальним випадковим процесом, безпосереднє спостереження якого неможливе.

Об'єкт пов'язує входи  $X$  і  $E$  з виходом  $Y$  з допомогою деякого апріорно невідомого оператора  $F_0$ :

$$Y = F_0(X, E).$$

При цьому ідентифікується не він, а оператор моделі  $F_m$ , який зв'язує входи і виходи, за якими спостерігають:

$$Y = F_m(X).$$

Фактор  $E(t)$ , який не спостерігається, розглядається як випадкова завада, яка утруднює визначення оператора  $F_m$ .

Отже, можна вважати, що об'єкт ідентифікації у загальному випадку можна представити у вигляді багатополюсника, частина входів якого не спостерігається.

### 1.2.2. Відомості про об'єкт ідентифікації

Всі відомості про об'єкт ідентифікації, які необхідно мати для того, щоб почати процес ідентифікації, поділяються на два види: апріорні  $A$  і апостеріорні  $B$ . Отже, у комплексі набір

факторів та критеріїв  $\langle A, B \rangle$  характеризує всю інформацію про поведінку об'єкта.

### 1.2.2.1. Априорна інформація

Априорну інформацію необхідно мати ще до спостереження за входами і виходами об'єкта. Вона повинна містити інформацію про те, що представляє собою структура ідентифікованого об'єкта. Структуру будемо характеризувати значеннями чотирьох ознак:

$$A = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle.$$

Ці ознаки кодують об'єкт за чотирма характеристиками. Водночас необхідно зазначити, що структура об'єкта повністю не вичерпується цими чотирма ознаками [5].

Розглянемо вказані ознаки типу об'єкта детальніше і уточнимо їх зміст.

#### *1. Ознака динамічності $\alpha$ .*

Будемо об'єкт називати динамічним ( $\alpha=1$ ), якщо поведінка його виходу залежить не тільки від значень входу у даний момент часу, але й від попередніх значень входу. Це означає, що об'єкт має пам'ять (або інерційність), яка і визначає залежність виходу від попередніх значень входу.

У протилежному випадку об'єкт будемо називати статичним ( $\alpha=0$ ).

#### *2. Ознака стохастичності $\beta$ .*

Будемо об'єкт називати стохастичним ( $\beta=1$ ), якщо поведінка його виходу залежить від входів об'єкта, що не контролюються або (що те саме) сам об'єкт має неконтрольоване джерело випадкових факторів збурень. У іншому випадку будемо об'єкт називати детермінованим ( $\beta=0$ ).

Зазначимо, що детермінованих об'єктів не існує у



природі, позаяк будь-яке вимірювання вносить свою похибку у результат спостереження. Тому правильніше стверджувати про “малу” і “велику” стохастичність об’єкта, розуміючи, що “малу” стохастичність можна не враховувати і називати такий об’єкт детермінованим.

### *3. Ознака нелінійності $\gamma$ .*

Об’єкт будемо називати нелінійним ( $\gamma = 1$ ), якщо його реакція на два різних збурення входу не є еквівалентною сумі реакцій на кожне з цих збурень незалежно. Для випадку системи без завад нелінійність визначається умовою:

$$F_0(X_1+X_2) \neq F_0(X_1)+F_0(X_2).$$

При невиконанні цієї умови, тобто при рівності у цьому випадку, об’єкт будемо називати лінійним ( $\gamma = 0$ ).

### *4. Ознака дискретності $\delta$ .*

Будемо об’єкт називати дискретним ( $\delta = 1$ ), якщо стан його входів і виходів змінюється чи вимірюється лише у дискретні моменти часу  $t = (1, 2, \dots, n)$ . Якщо ж значення входу і виходу змінюються чи вимірюються неперервно, тоді об’єкт називатимемо неперервним ( $\delta = 0$ ). Отже, спосіб вимірювання може змінити цю ознаку об’єкта.

Як видно, апріорна інформація ( $A$ ) у деякій мірі може спрогнозувати вид моделі, а для її повного проектування і кінцевої реалізації необхідно мати відомості про характер динамічності об’єкта (при  $\alpha = 1$ ), вид його нелінійності (при  $\beta = 1$ ) і ймовірні властивості стохастичності (при  $\gamma = 1$ ).

Вид моделі, який визначається апріорною інформацією, може змінитися після аналізу апостеріорної інформації, тобто після спостереження за поведінкою входу і виходу об’єкта при різному наборі керованих факторів або при різних діапазонах їх зміни.

### 1.2.2.2. Апостеріорна інформація

Якщо апріорна інформація ( $A$ ) має якісний характер, то апостеріорна – кількісний, що є результатом (протоколом) спостереження входу і виходу об'єкта. Цей протокол має вигляд:

$$B = \langle X, Y \rangle,$$

де:

$X$  – результати усіх вимірів входів об'єкта;

$Y$  – результати вимірів його виходів за той же період спостереження.

Для неперервних об'єктів ( $A = \alpha\beta\gamma\delta$ ) маємо значення неперервних даних:

$$X = X(t), Y = Y(t) \text{ у інтервалі часу } 0 \leq t \leq T.$$

Таким чином, отримуємо:

$$B_0 = (\langle X(t), Y(t) \rangle (0 \leq t \leq T)).$$

Це означає, що поведінку об'єкта зареєстровано у вигляді  $(n+m)$  різних кривих:  $(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, y_m(t))$  у цьому інтервалі.

Зазначимо, що величини  $X$  і  $X(t)$  у даному випадку не є тотожними, позаяк  $X$  охоплює всю залежність  $X(t)$  у заданому інтервалі, а  $X(t)$  може мати тільки конкретне значення цієї залежності у момент часу  $t$ . Аналогічною є тотожність  $Y$  і  $Y(t)$ .

У дискретному випадку ( $A = \alpha\beta\gamma 1$ ) маємо:

$$X = (X_1, \dots, X_N), Y = (Y_1, \dots, Y_N).$$

Тоді протокол записують у вигляді:

$$B_1 = (\langle X_i, Y_i \rangle (i=1, \dots, N)).$$

Протокол можна представити у вигляді таблиці чисел з  $(n+m)$  стовпчиків і  $N$  рядків:

$$B_l = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & y_{11} & y_{21} & \dots & y_{m1} \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & y_{12} & y_{22} & \dots & y_{m2} \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} & y_{1N} & y_{2N} & \dots & y_{mN} \end{vmatrix}$$

де:

$$X_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni});$$

$$Y_i = (y_{1i}, \dots, y_{mi}).$$

Очевидною є відповідність цих двох форм запису. Зокрема, протокол  $B_l$  може бути отримано з протоколу  $B_0$  шляхом отримання інформації у дискретні моменти часу:

$$t=0, \delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta,$$

де:

$\delta$  - інтервал дискретності ( $\delta = N/T$ ).

Необхідно зазначити, що зворотній перехід можливий не завжди.

Отже, параметри  $X, Y$  достатньо повно у комплексі характеризують апостеріорну інформацію ( $B$ ), що, у свою чергу, дозволяє на наступному етапі дослідження детальніше оцінити об'єкт для встановлення мети його ідентифікації.

### 1.3. Постановка задачі ідентифікації

**Задачею ідентифікації** є визначення оператора  $F_0$  об'єкта, тобто побудова такого оператора моделі  $F_m$ , який був би у деякому змісті близький до оператора об'єкта  $F_0$ , тобто:

$$F_M \approx F_0.$$

Зауважимо, що вказане “наближення” зовсім відносно, позаяк оператори  $F_0$  і  $F_M$  можуть мати різну структуру, можуть бути сформульовані на різних мовах і мати різну кількість входів. Близькість операторів безпосередньо оцінити дуже важко або просто неможливо ще й тому, що про оператор об’єкта  $F_0$  недостатньо апріорних даних. У зв’язку з цим, близькість операторів переважно оцінюють за їх реакціями на одну і ту ж дію вхідних факторів  $X$ . Тобто – на виходах об’єкта:

$$Y(t) = F_0[X, E(t)] ,$$

і згідно моделі:

$$Y^M(t) = F(X) .$$

Ступінь близькості цих реакцій у кожний момент часу можна оцінити, наприклад, значенням квадрата модуля різниці векторів виходу:

$$q(t) = |Y(t) - Y^M(t)|^2 = \sum_{i=1}^m [y_i(t) - y_j^M(t)]^2, \quad (1.1)$$

де:

$Y^M = (y^M_1, \dots, y^M_m)$  – вектор виходу моделі.

В загальному випадку близькість об’єкта і моделі оцінюють так званою **функцією нев’язки**  $\rho$  [6]. Це скалярна функція двох векторних аргументів-виходів об’єкта і моделі:

$$q(t) = \rho(Y(t), Y^M(t)). \quad (1.2)$$

Функція нев’язки має такі властивості:

1. Невід’ємна для будь-яких значень  $Y(t)$  і  $Y^M(t)$ , тобто:

$$\rho(Y(t), Y^M(t)) \geq 0;$$

2. Дорівнює нулю при  $Y(t) = Y^M(t)$ , тобто:

$$\rho(Y(t), Y^M(t))=0;$$

3. Неперервна і випукла вниз за обома аргументами, тобто:

$$\left. \begin{aligned} \rho((1-\lambda)Y_1 + \lambda Y_2, Y^M) &\leq (1-\lambda)\rho(Y_1, Y^M) + \lambda\rho(Y_2, Y^M), \\ \rho(Y, (1-\lambda)Y_1^M + \lambda Y_2^M) &\leq (1-\lambda)\rho(Y, Y_1^M) + \lambda\rho(Y, Y_2^M) \end{aligned} \right\} (1.3)$$

де:  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Ця функція завжди лежить нижче (точніше, не вище) відрізка прямої, яка з'єднує дві будь-які точки  $(Y_1, Y_1^M)$  і  $(Y_2, Y_2^M)$ ,

де:

$Y_1$  і  $Y_1^M$  – довільні вектори.

Задовольнити ці вимоги неважко. Зокрема, рівняння (1.1) відповідає їм. Саме воно і буде найчастіше застосовуватись нами надалі.

Тепер детальніше сформулюємо задачу ідентифікації. Вона полягає у побудові оператор моделі  $F$ , який би реагував на збудження входу  $X$  аналогічно до реакції об'єкта. Реакція оператора моделі на вхід  $X$  має вигляд:

$$Y^M = F(X).$$

Оператором перетворення (об'єкта або моделі) прийнято називати алгоритм трансформації функції у функцію. Найпростішими прикладами операторів є оператори диференціювання:

$$F(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$$

і інтегрування:

$$F(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$$

У найпростішому випадку оператор перетворюється у звичайну функцію. З точки зору об'єктів ідентифікації оператор, як правило, характеризує динамічну систему, а функція – статичну. Отже, модельний оператор  $F$  повинен бути таким, щоб виконувалась умова:

$$Y^M \sim Y,$$

де:

$\sim$  знак еквівалентності, тобто виходи моделі і об'єкта при однакових вхідних діях  $X$  повинні бути еквівалентними.

Цього можна досягнути, якщо ввести єдину міру близькості на усьому інтервалі спостереження, а не тільки у кожній точці, як це було показано у рівнянні (1.2).

Такою мірою у неперервному випадку (коли об'єкт характеризується апіорною інформацією:  $A = \alpha\beta\gamma \neq 0$ ) може бути інтеграл:

$$Q = \int_0^T \rho(Y(t), Y^M(t)) dt,$$

Дійсно, відповідно до визначення функції  $\rho(\cdot, \cdot)$  величина  $Q$  відображає ступінь близькості функцій  $Y(t)$  і  $Y^M(t)$  у інтервалі  $0 \leq t \leq T$ . Значення  $Q$  суттєво залежить від  $F$ :

$$Q(F) = \int_0^T \rho\{Y(t), F(X)\} dt.$$

Тоді, задача ідентифікації полягає у її мінімізації шляхом відповідного вибору оператора моделі  $F$ . Якщо за фізичним змістом задачі важливість апостеріорної інформації  $B$  у різні моменти часу не є однаковою, тоді варто ввести величину змінної маси  $h(t) > 0$ :

$$Q(F) = \int_0^T \rho\{Y(t), F(X)\}h(t)dt. \quad (1.4)$$

Після звичайного нормування:

$$\int_0^T h(t)dt = const. \quad (1.5)$$

Вибір функції  $h(t)$  визначається цінністю інформації. Наприклад, для стохастичного неперервного об'єкта ( $A = \alpha 1 \gamma 0$ ) при недостатньо точних спостереженнях, тобто коли дисперсія помилки ( $\sigma^2$ ) спостереження виходу залежить певним чином від часу:

$$\sigma^2 = f(t) \neq 0,$$

де:

$f(t)$  – задана функція.

Вага (або маса)  $h(t)$  повинна змінюватись таким чином:

$$h(t) = k/f(t),$$

де:

$k$  – нормуючий член, який забезпечує виконання умови звичайного нормування (1.5).

Це означає, що цінність інформації обернено пропорційна мірі дисперсії випадкових завод.

Величину  $Q(F)$  часто називають нев'язкою виходів об'єкта і моделі. Ця нев'язка є функціоналом, який залежить від оператора моделі  $F$  [7].

Зазначимо, що функціоналом навивається перетворення функції у число (яке називають значенням функціоналу). Типовим прикладом функціоналу є визначений інтеграл:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dt.$$

Вираз (1.4) є також функціоналом.

За своїм фізичним змістом нев'язка виходів невід'ємна і дорівнює нулю при:

$$Y(t) = F(X), (0 \leq t \leq T),$$

тобто при співпаданні виходів об'єкта і моделі у досліджуваному інтервалі часу.

Якщо об'єкт є статичним і неперервним ( $A=0\beta\gamma0$ ), тобто  $F(.)$  є функцією, тоді нев'язка виходів об'єкта і моделі (1.4) приймає вигляд:

$$Q(F) = \int_0^T \rho\{Y(t), F(X)\}h(t)dt.$$

Для дискретного об'єкта ( $A=\alpha\beta\gamma1$ ) функціонал нев'язки виходів об'єкта і моделі записується у такій формі:

$$Q(F) = \sum_{i=1}^N \rho\{Y_i, F(X)\}h_i. \quad (1.6)$$

Статичний дискретний об'єкт ( $A=\alpha\beta\gamma1$ ) має функціонал нев'язки виходів об'єкта і моделі, що записується у вигляді:

$$Q(F) = \sum_{i=1}^N \rho\{Y_i, F(X_i)\}h_i,$$

де:

$h_i > 0$  ( $i=1, \dots, N$ ;  $\sum_{i=1}^N h_i = N$ ) – вага інформації у  $i$ -й момент часу.



Якщо об'єкт стохастичний і дискретний ( $A = \alpha 1 \gamma 1$ ) і вимірювання, наприклад, містить випадкові завади з дисперсією помилки ( $\sigma_i^2$ ), яка змінюється у межах ( $i = 1, \dots, N$ ), тоді вагу потрібно визначати таким чином:

$$h_i = k / \sigma_i^2,$$

де:

$k$  – нормуючий член.

Отже, ступінь невідповідності (ступінь нев'язки) операторів моделі та об'єкта можна виразити у вигляді функціоналів типу (1.4) і (1.6), які суттєво залежать від оператора моделі  $F$ .

Процес ідентифікації, тобто процес визначення оператора моделі, потрібно проектувати так, щоб мінімізувати вказану нев'язку. Для цього необхідно розв'язати задачу мінімізації функціоналу  $Q(F)$  стосовно оператора  $F$ :

$$Q(F) \rightarrow \min_{F \in \Omega} \Rightarrow F^*. \quad (1.7)$$

Цей символічний запис має такий фізичний зміст: необхідно мінімізувати функціонал  $Q(F)$ , змінюючи оператор (або у найпростішому випадку функцію)  $F$  не довільно, а у деякому визначеному класі операторів (або функцій)  $\Omega$ . У співвідношенні (1.7) це позначено залежністю:

$$F \in \Omega.$$

Тобто  $F$  належить класу  $\Omega$ , де:

$\Omega$  – заданий клас операторів або функцій.

Результатом процесу мінімізації є деякий оператор (або функція)  $F^*$  (не обов'язково єдиний), який має властивість:

$$Q^* = Q(F^*) = \min_{F \in \Omega} Q(F), \quad (1.8)$$

Тобто нев'язка виходів оператора і об'єкта ( $Q^*$ ) на цьому операторі мінімальна (точніше, не перевищує усіх можливих нев'язок, які можна одержати у класі операторів  $\Omega$ ).

Крім того, зауважимо, що подвійну стрілку ( $\Rightarrow$ ) у формулі (1.7) слід читати як “є розв'язком”.

Отже, для ідентифікації у заданому класі операторів  $\Omega$  необхідно знайти оператор (функцію)  $F$ , який мінімізує функціонал нев'язки виходів об'єкта і моделі  $Q(F)$  у цьому класі операторів.

Твердження про те, що ідентифікація завжди зводиться до операції знаходження мінімуму, звичайно, перебільшене. Дійсно, легко уявити собі статичний об'єкт, який ідентифікується шляхом розв'язку системи лінійних або, у загальному випадку, нелінійних рівнянь. Однак, твердження про зведення задачі ідентифікації до задачі мінімізації має загальний характер для усіх випадків ідентифікації з будь-якими класами допустимих операторів і функцій. У деяких найпростіших випадках задача розв'язується без залучення операції мінімізації, що еквівалентно зведенню задачі мінімізації до задачі визначення кореня рівняння шляхом прирівнювання до нуля похідних функції, яка мінімізується.

Отже, використання процесу мінімізації для розв'язування задачі ідентифікації об'єктів є принциповим і важливим етапом, який необхідний, як правило, при розв'язуванні складних задач ідентифікації.

#### **1.4. Ідентифікація структури і параметрів об'єкта**

*Структурна ідентифікація* – це процес визначення структури оператора моделі  $F$ . Якщо ж структура цього оператора  $F$  визначена або апіорно відома, то процес ідентифікації зводиться до визначення параметрів цієї структури, тобто – до простішої задачі, ніж попередня. Таку ідентифікацію назовемо параметричною ідентифікацією (іноді перший процес називають ідентифікацією у широкому змісті, а другий – у вузькому) [8-11].

Отже, ідентифікація структури пов'язана, перш за все, з

попереднім вибором структури моделі, а ідентифікація параметрів – тільки з визначенням параметрів цієї моделі при заданій структурі. Перший етап структурної ідентифікації передує другому і часто містить у собі другий, як складову частину.

На жаль поняття “структура” немає чіткого визначення. Під структурою моделі будемо розуміти вид оператора з точністю до його коефіцієнтів. Зазначимо, що структура об’єкта, яка кодується як  $(A)$ , в загальному, може не співпадати зі структурою моделі. Зокрема, стохастичні властивості об’єкта, звичайно, не відображаються у моделі (модель вибирається попередньо і є детермінованою). При цьому стохастичні властивості об’єкта лише визначають вибір методу ідентифікації параметрів моделі. Крім того, модель може попередньо мати менше входів і виходів, ніж об’єкт. Такий підхід часто використовують при незначному об’ємі спостереження, оскільки у цьому випадку параметри моделі визначити неможливо. Наведемо приклади.

**Приклад 1.** Будь-який статичний неперервний об’єкт  $(A = 0010)$  визначається функцією  $y = F_0(x)$ . Модель такого об’єкта можна зобразити у вигляді:

$$F(x) = \sum_{i=1}^k C_i \varphi_i(x).$$

В умовах визначеної системи функцій:

$$\Phi(x) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)].$$

Тут структура моделі задається системою функцій  $\Phi(x)$  і числом  $k$ , а її параметрами є коефіцієнти:  $C_1, \dots, C_k$ . Ідентифікація структури такого об’єкта полягає у пошуку системи функцій  $\Phi(x)$ , яка описує цей об’єкт, а параметрична ідентифікація зводиться до визначення параметрів коефіцієнтів при вибраній системі функцій.

**Приклад 2.** У загальній формі модель динамічного детермінованого нелінійного неперервного об'єкта ( $A=1010$ ) може бути представлена у вигляді розподілу за системою операторів:

$$F(x) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(x)$$

де:

$F_i(x)$  ( $i=1, \dots, k$ ) – система нелінійних операторів, визначення якої є основною метою структурної ідентифікації. Пошук чисел  $c_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) складає задачу параметричної ідентифікації.

Тепер уточнимо задачу ідентифікації. Попередньо було доведено, що задача ідентифікації зводиться до розв'язування задачі мінімізації функціоналу  $Q(F)$  стосовно оператора  $F$ :

$$Q(F) \rightarrow \min_{F \in \Omega} \Rightarrow F^*.$$

У цьому випадку проблема ідентифікації сформульована у загальному вигляді, коли ідентифікуються і структура, і параметри моделі. Нехай структура моделі відома, тобто задача структурної ідентифікації вирішена. Тоді оператор  $F(x)$  може бути представлений у вигляді:

$$F(x) = f(x, C),$$

де:

$f(x_1, \dots, x_n)$  – заданий оператор;

$C = (c_1, \dots, c_k)$  – вектор невідомих параметрів моделі.

Задача ідентифікації параметрів моделі може бути записана у вигляді задачі мінімізації функції (а не функціоналу) нев'язки виходів об'єкта і моделі:

$$Q(C) \rightarrow \min_{c \in R^k} \Rightarrow C. \quad (1.9)$$

Розв'язком такої функції є вектор  $C^*=(c_1^*, c_2^*, \dots, c_k^*)$ .  
У цьому випадку функція:

$$Q(C) = \int_0^T \rho\{Y(t), f[X(t), C]\}h(t)dt$$

є функцією нев'язки виходів об'єкта і моделі, а  $R^k$  –  $k$ -вимірний евклідовий простір векторів  $C$ .

Труднощі розв'язку задачі полягають у організації ефективного процесу мінімізації заданої функції багатьох значень ( $k$ ) змінних. Зазначимо, що коли структура моделі відома, то число змінних  $k$  визначено наперед.

Часто структуру можна зашифрувати, ввівши структурні параметри. У загальному випадку позначимо ці параметри вектором:

$$D=(d_1, \dots, d_q).$$

Це означає, що структура шифрується  $q$  величинами  $(d_1, \dots, d_q)$ . Тоді оператор моделі буде мати такий вигляд:

$$F(X)=f(X, C, D),$$

де:

$f$  – заданий оператор.

Отже, оператор моделі визначається двома видами параметрів:

- структурними ( $D$ );
- параметрами об'єкта ( $C$ ).

Функція нев'язки виходів об'єкта і моделі у такому випадку прийматиме вигляд:

$$Q(C, D) = \int_0^T \rho\{Y(t), f(X, C, D)\}h(t)dt.$$

Тоді, задача ідентифікації у широкому змісті зводиться до розв'язку наступної задачі мінімізації функції  $(k+q)$  змінних:

$$Q(C, D) \rightarrow \min_{\substack{C \in R \\ D \in S^k}} \Rightarrow C^*, D^*, \quad (1.10)$$

де:

$S$  – область визначення структурних параметрів.

Зазначимо, що зведення задачі загальної ідентифікації (1.7) до параметричної ідентифікації (1.9) і (1.10) має умовний характер. Метою такого перетворення є спрощення задачі і зведення теперішньої задачі до раніше відомої з добре розробленими методами розв'язку. Такою задачею є задача математичного програмування: мінімізація функції багатьох змінних, що належать заданій множині [12]. Саме так можна сформулювати задачу параметричної ідентифікації.

Однак, не слід вважати, що таке зведення задачі ідентифікації до задачі математичного програмування вирішує усі проблеми ідентифікації. У цьому випадку виникає спектр нових питань. Наприклад, яким чином таке зведення зробити для конкретного випадку постановки задачі або як розв'язати отриману задачу мінімізації? Наведені питання на кожному етапі конкретизації моделі є причиною виникнення нових питань і т.д. Водночас, зв'язок ідентифікації з математичним програмуванням, який наведено вище, слід завжди мати на увазі, позаяк це може бути одним із векторів знаходження оптимальної кількості вхідних факторів при моделюванні поведінки об'єктів.

## 1.5. Класифікація методів ідентифікації

Будемо розрізняти методи ідентифікації за трьома класифікаційними ознаками і характеризувати будь-який вибраний метод значеннями цих ознак:

$$C = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle,$$

де:

$\xi, \eta, \zeta$  – структурні ознаки, які можуть приймати два значення.

Зазначимо, що структура методу повністю не характеризується цими трьома ознаками. Вказані ознаки призначені, швидше, для визначення методу, а ніж для його опису. Розглянемо і охарактеризуємо ці ознаки.

1. **Ознака активності  $\xi$ .** Метод ідентифікації будемо називати *активним* ( $\xi=1$ ), якщо при його реалізації можливо задавати і змінювати, певним чином, стан входів об'єкта, тобто опосередковано змінювати стан середовища. У цьому випадку відбувається так зване керування об'єктом для досягнення мети ідентифікації. Якщо умови середовища, в якому міститься об'єкт, не дозволяють керувати станом його входу, тоді метод його ідентифікації будемо називати *пасивним* ( $\xi=0$ ). Тоді, стан входів об'єкта можна охарактеризувати апостеріорною інформацією ( $B$ ), що ґрунтується на результатах дослідження, отриманих у процесі нормальної експлуатації об'єкта. Блок-схема реалізації активного методу показана на рис. 1.4. У даному випадку вхід об'єкта керується у процесі ідентифікації таким чином, щоб підвищити її ефективність.

2. **Ознака адаптивності  $\eta$ .** Якщо апріорна інформація  $\beta$  про поведінку об'єкта використовується у процесі ідентифікації не зразу ж, а у процесі її поступлення чи циклічно і при цьому значення параметрів, що ідентифікуються, коректуються на кожному етапі (дискретно) чи неперервно,

тоді такий метод будемо називати *адаптивним* (модель при цьому ніби адаптується до об'єкта таким чином, щоб її реакція (на виходах) на вплив факторів зовнішнього середовища мінімально відрізнялась від реакції самого об'єкта). У протилежному випадку метод називається неадаптивним ( $\eta = 0$ ).

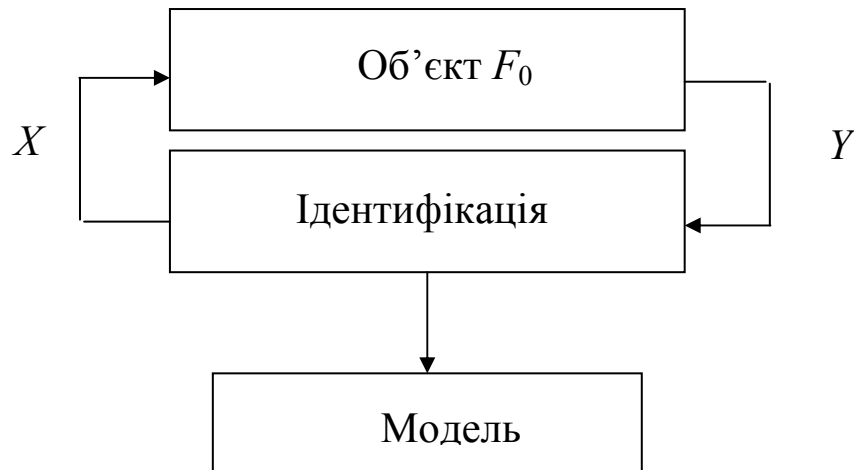


Рис. 1.4. Блок-схема активного методу ідентифікації.

Якщо адаптивний метод параметричної ідентифікації застосовувати у реальному масштабі часу, використовуючи безпосередньо вимірювання входу і виходу об'єкта, тоді його називають методом самонастроюваної моделі. Суть цього методу полягає у наступному (рис. 1.5).

У кожен момент часу зіставляють виходи об'єкта і моделі, при цьому квадрат різниці виходів мінімізується шляхом відповідного вибору параметрів ( $C$ ) оператора моделі. Для підвищення ефективності процесу мінімізації використовують інформацію про стан середовища ( $X$ ). Як видно з рис. 1.2, модель таким чином постійно підлаштовується до об'єкта, щоб їх реакції на один і той же вхід у кожен момент часу відрізнялись мінімально.

Адаптивний метод для дискретних об'єктів ( $A = \alpha\beta\gamma I$ ) завжди описується рекурентною формулою виду:

$$C_i = I(C_{i-1}, X_i, Y_i), \quad (1.11)$$



де:  
 $C_i$  – вектор ідентифікуючих параметрів на  $i$ -му кроці адаптації;  
 $I$  – алгоритм адаптації.

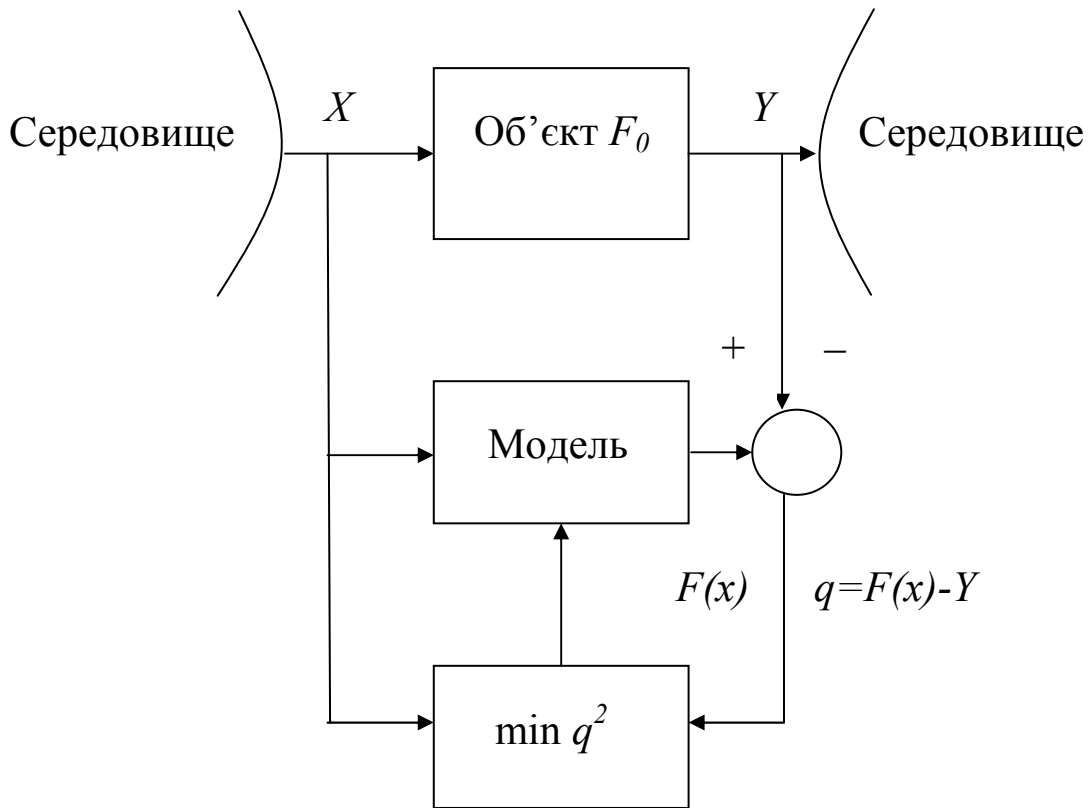


Рис. 1.5. Блок-схема реалізації методу самоналаштування моделі.

Наведений вираз зручно записати у вигляді:

$$C_i = C_{i-1} + \Delta C_i \quad (1.12)$$

де:  
 $\Delta C_i$  – приріст, що реалізується алгоритмом адаптації:

$$\Delta C_i = \varphi(C_{i-1}, X_i, Y_i).$$

У  $k$ -вимірному просторі ідентифікуючих параметрів  $C =$

$(c_1, \dots, c_k)$  процес адаптації ілюструється ламаною  $(C_0, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots)$ , яка прямує до певної точки  $C^* = (c_1, \dots, c_k)$  – точному значенню параметрів (рис. 1.6).

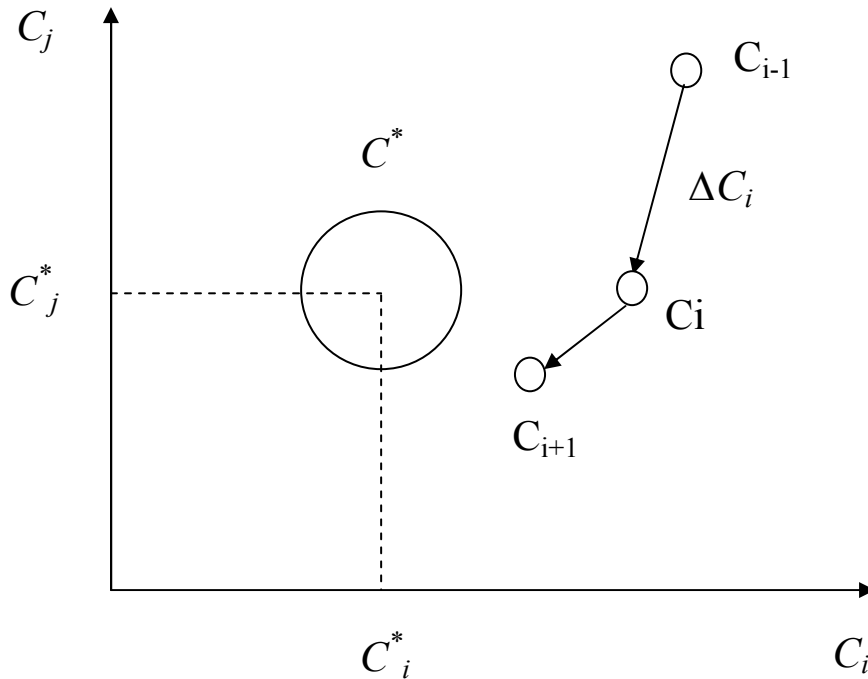


Рис. 1.6. Приклад функціонування адаптивного методу.

Для неперервного об'єкта ( $A = \alpha\beta\gamma\theta$ ) процес адаптивної ідентифікації реалізується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dC}{dt} = \varphi(C, X(t), Y(t)). \quad (1.13)$$

Водночас режим адаптивної ідентифікації може реалізовуватись не тільки за схемою моделі самоналаштування, тобто – у режимі реального масштабу часу.

Якщо об'єм спостереження є незначним, тобто величини  $N$  (у дискретному випадку) і  $T$  (у неперервному випадку) не є достатньо великими, тоді однократне використання інформації ( $\beta$ ) може не вирішити задачі ідентифікації. У цьому випадку

доцільно створити цикл значень  $\beta' = \beta\beta\beta\dots$ , використання якого забезпечить розв'язок поставленої задачі.

Зазначимо ще одну особливість адаптивного методу. Використання цього методу майже ніколи не забезпечить розв'язок задачі ідентифікації абсолютно точно, принаймі у пасивному варіанті ( $\xi=0$ ). Зате вказаний метод дозволяє постійно поліпшувати значення ідентифікуючих параметрів. Тому адаптивний метод доцільно застосовувати для ідентифікації “дрейфуючих” об'єктів, параметри яких повільно змінюються. У цьому випадку адаптивний метод дозволить простежити повільні зміни над виходами об'єктів.

3. **Ознака кроку  $\zeta$ .** Якщо ідентифікуючі параметри у процесі адаптивної ідентифікації ( $\eta=0$ ) змінюються дискретно, тоді такий метод будемо називати *кроковим* ( $\zeta=1$ ). У протилежному випадку метод є неперервним ( $\zeta=0$ ). Зокрема, адаптивний метод (1.11) має кроковий характер, а (1.13) – неперервний.

З наведеного вище можна зробити висновок, що за трьома ознаками метод ідентифікації описати просто неможливо, однак, описані ознаки характеризують структурні особливості методу, які визначаються специфікою поведінки об'єкта.

## 1.6. Ідентифікація у процесах керування

Цей вид ідентифікації пов'язаний безпосередньо з потребами керування об'єктом і має допоміжний характер. Щоб керувати об'єктом, потрібно знати, чим керувати, тобто мати модель об'єкта, на якій можна проаналізувати наслідки передбачуваного керування і вибрати найкращий. Тому у процесі ідентифікації такого виду необхідно створити модель, яка, перш за все, повинна задовольнити потреби керування.

Зазначимо, що така модель синтезована спеціально для потреб керування. Тому вона може і не відображати внутрішніх механізмів явища, які дуже необхідні для пізнавальної моделі. Такій моделі достатньо тільки констатувати наявність певного формального зв'язку між входом і виходом об'єкта. Характер і особливості цієї моделі складають основу моделі, яку

отримують у процесі ідентифікації об'єкта керування. При цьому необхідність ідентифікації і її специфіка визначаються метою керування [13, 14].

Під **керуванням** будемо розуміти процес такої ціленаправленої дії на об'єкт, в результаті якої об'єкт на кожному наступному етапі ідентифікації переходить у стан, який ближчий до мети, ніж попередній стан.

На рис. 1.7 показана загальна схема керування об'єктом.

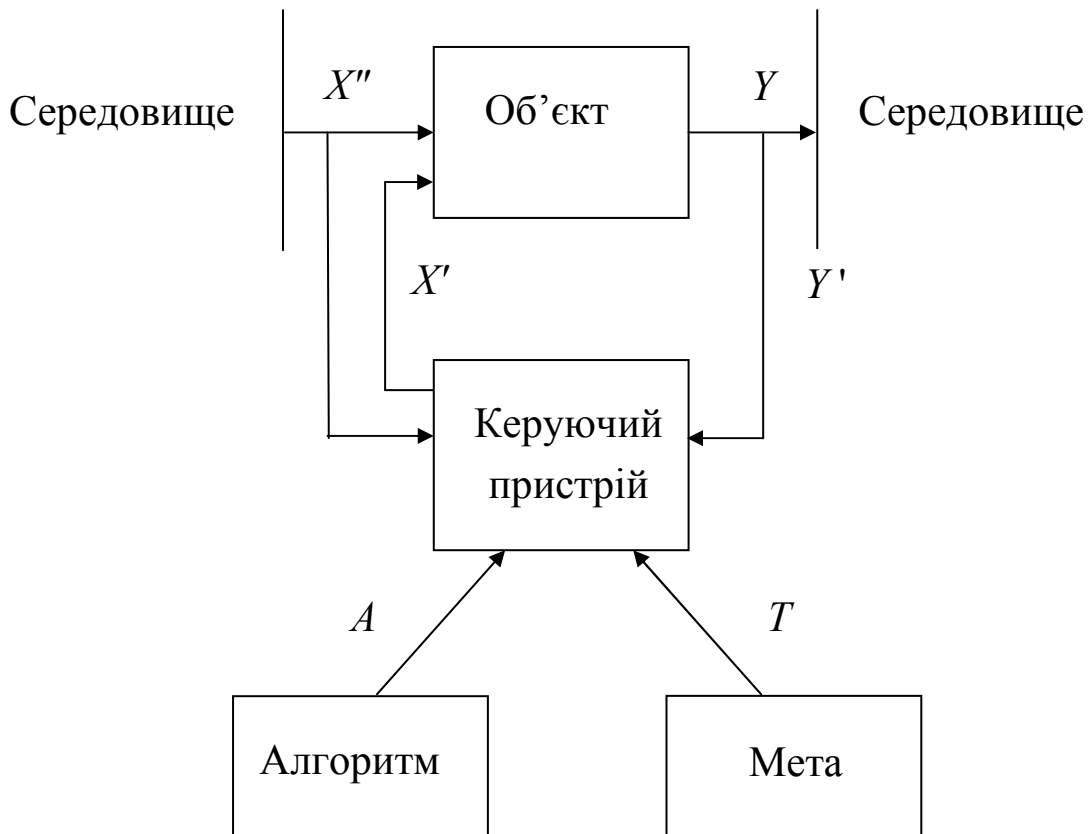


Рис. 1.7. Загальна схема керування.

На рис. 1.7 прийнято такі умовні позначення:

$X'$  – керована складова дії середовища (керування об'єктом сприймається так само, як і дія середовища);

$X''$  – некерована, але контрольована складова;

$Y'$  – інформація про стан об'єкта, яка є доступною керуючому пристрою. Ця інформація складає тільки частину інформації, яка є на виході об'єкта ( $Y$ ), тобто  $Y' \in Y$ .

Крім того, для синтезу процесу керування необхідно визначити мету ( $T$ ), тобто ціль, яку повинен “визначати” керуючий пристрій своїм впливом на об’єкт.

Водночас для досягнення мети необхідно мати алгоритм керування ( $A$ ), який показує, яким чином можна досягнути цієї мети.

Отже, процес керування реалізується такими параметрами:

$$\langle X', I = \langle X'', Y' \rangle, A, T \rangle,$$

де:

$X'$  – керуюча дія;

$I = \langle X'', Y' \rangle$  – інформація про стан середовища і об’єкта;

$A$  – алгоритм керування;

$T$  – мета керування.

Перші три елементи вказаних критеріїв залежать від об’єкта управління і тому можуть бути визначені повністю лише за наявності моделі об’єкта. Мета ( $T$ ) визначає вимоги, виконання яких забезпечується організацією керованого впливу  $X'$  з допомогою алгоритму ( $A$ ) і збором інформації у каналі  $Y'$ . Не знаючи, як  $X'$  і  $X''$  впливають на стан  $Y'$ , тобто не маючи моделі  $Y' = F(X', X'')$ , не можна визначити критерії процесу керування ( $X'$ ), з допомогою якого можна досягнути мети ( $T$ ),

Алгоритм ( $A$ ) функціонування керуючого пристрою залежить від об’єкта, а у складніших випадках він повинен ґрунтуватись на розробленій моделі. Організація каналів зв’язку керуючого пристрою з об’єктом також суттєво підпорядковується структурі об’єкта. Тому синтез системи керування неможливий без моделі об’єкта, без якої, у свою чергу, не може працювати алгоритм керування.

Дрейф характеристик об’єкта, який може бути у кожній реальній системі, деколи забезпечує зміну не лише параметрів, але й структури системи. Це зумовлює корекцію моделі на кожному наступному етапі ідентифікації. Тому, перш ніж синтезувати керування, необхідно “підкоректувати” модель, тобто знову ідентифікувати об’єкт. Це можна реалізувати

двоетапною схемою керування, що показана на рис. 1.8.

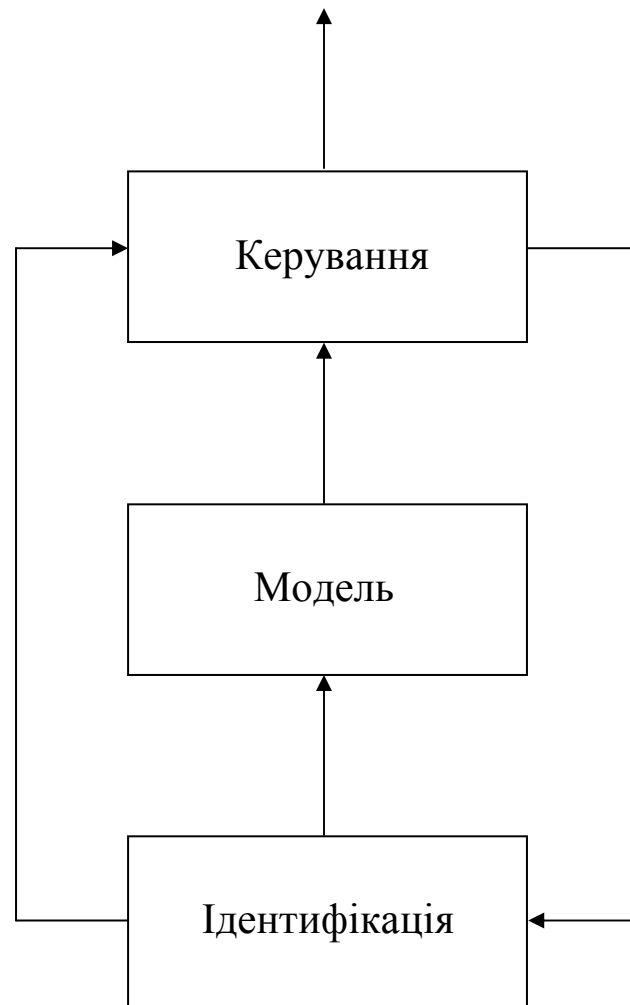


Рис. 1.8. Блок-схема алгоритму керування

У даному випадку на етапі ідентифікації синтезується (або коректується) модель об'єкта. Етап ідентифікації змінюється етапом керування, де для синтезу керування  $X'$  використовують модель, яку отримано на попередньому етапі. Отже, метою керування є приведення об'єкта у необхідний стан. Вказана мета розбивається на дві підмети, які відповідають двом етапам керування. На першому етапі метою є синтез адекватної моделі об'єкта, а на другому – синтез керування на основі цієї моделі.

Виходячи з цього можна стверджувати, що задача ідентифікації об'єкта керування, не є самостійною задачею. Вона завжди підпорядкована цілям керування і є складовою

частиною задачі керування. Однак, досить часто ідентифікація об'єкта представлена як самостійна мета. Цього досягають з чисто методологічних міркувань, позаяк методи синтезу моделей суттєво відрізняються від методів синтезу керування. Дана обставина дозволила виділити процес ідентифікації, як окремих розділ теорії керування. Такий підхід не приводить до протиріччя за умови, що будь-яка модель проектується не лише для цілей синтезу, але й для прийняття деякого керуючого рішення, тобто для реалізації безпосередньо процесу керування.

### **1.7. Методи теорії і практики ідентифікації**

Задача ідентифікації, як задача побудови оператора моделі, що відображає якісні і кількісні параметри об'єкта, може бути сформульована і, відповідно, розв'язана у межах трьох різних підходів. Історично ці підходи виникли незалежно один від одного для вирішення різних задач. Класифікацію задач, які вирішують ці методи, зручно привести, виходячи з понять *динамічного і стохастичного об'єктів*.

Першими і найпростішими об'єктами, до яких були застосовані процеси ідентифікації, були статичні нестохастичні об'єкти, тобто функції, що зв'язують вхід і вихід об'єкта. Ця обставина і забезпечила виникнення першого підходу у теорії ідентифікації, який з'явився в математичному аналізі у вигляді теорії наближення функцій багаточленами [15]. Цей напрям пов'язаний з представленням функції у вигляді розподілу за деякою системою функцій (найчастіше за системою поліномів). Теорія наближення має два розгалуження:

- теорію апроксимації;
- теорію інтерполяції.

Вказані теорії відрізняються тим, що в теорії інтерполяції інтерполююча функція співпадає з вихідною у заданому числі точок.

Для ідентифікації стохастичних об'єктів були застосовані методи математичної статистики, що започаткувало теорію оцінювання. Основною задачею цієї теорії є оцінювання параметрів статичного об'єкта за результатами спостереження

в умовах впливу випадкових завад. Іншим напрямком математичної статистики для реалізації мети ідентифікації статичних стохастичних об'єктів є теорія планування експерименту. Важливим етапом такої ідентифікації є аналіз “активних” експериментів з метою підвищення ефективності процесу керування.

Третім підходом до вирішення задач ідентифікації є методи теорії систем автоматичного керування. Ця теорія зумовила появу методів ідентифікації динамічних об'єктів керування у режимі нормальної експлуатації (тобто, за умови випадкових завад).

Наведені три методи спочатку були названі терміном “ідентифікація”. Сьогодні будемо називати ці методи ідентифікації *методами автоматичного керування* (МАК). Зв'язок між методами і об'єктами ідентифікації показано на рис. 1.9 і 1.10 відповідно.

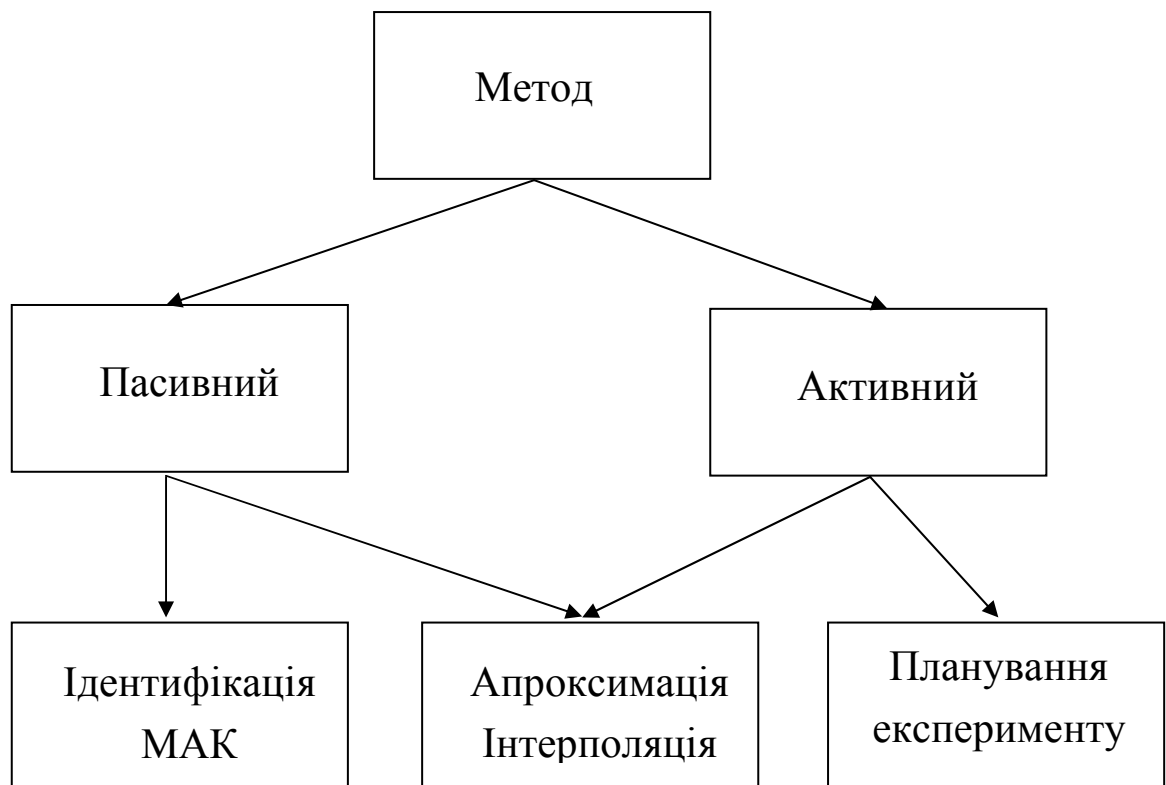


Рис. 1.9. Зв'язок між методами ідентифікації.



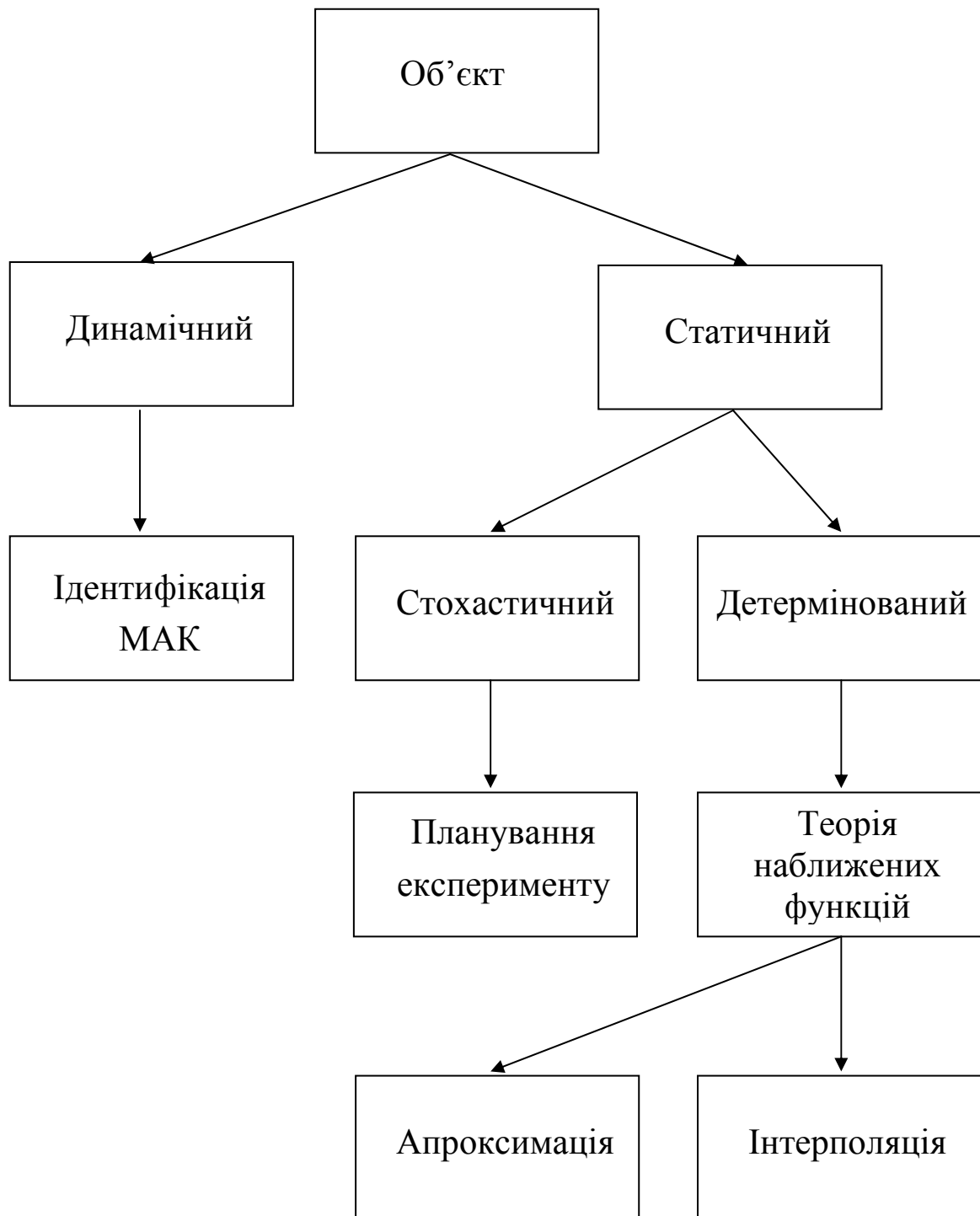


Рис. 1.10. Зв'язок між об'єктами ідентифікації.

## **1.8. Аналіз методів математичного опису технологічних об'єктів**

Існує спектр підходів до вирішення задачі ідентифікації промислових керованих об'єктів. При цьому методи і засоби розв'язування таких задач настільки є різними, що виникає необхідність співставлення і аналізу основних принципів і відомих методів побудови математичних моделей технологічних процесів. Такими принципами є:

- фізико-математичний аналіз явищ, які зумовлюють динаміку технологічного процесу;
- експериментальна ідентифікація, при якій основну інформацію про технологічний процес отримують шляхом безпосередніх вимірювань.

З погляду складності і різноманітності процесів у складних промислових комплексах, а також внаслідок існування значної кількості факторів та етапів технологічних процесів, методи побудови математичних моделей, що ґрунтуються на основі розгляду основних фізико-хімічних закономірностей досліджуваних технологічних процесів, часто виявляються малоефективними. Це можна пояснити складністю фізичних явищ, які спостерігаються у досліджуваних процесах, а також недостатньою кількістю апріорної інформації про них. Тому, важливими у промислових умовах є експериментальні методи ідентифікації. Будемо вважати, що ідентифікацією є визначення моделі на основі аналізу її входу і виходу. При цьому модель вибирають із відомого класу моделей, яким еквівалентний технологічний процес. Відповідно до цього, на початковому етапі необхідно вибрати клас моделей, визначити кількість вхідних впливів і встановити критерій "еквівалентності". Як правило, у вигляді критерію еквівалентності вибирають деякий функціонал, який залежить від виходів об'єкта і моделі. При цьому вибір класу моделей, класу вхідних впливів і функціонала втрат суттєво залежить від апріорних даних і мети ідентифікації. Найважливішим етапом експериментальної ідентифікації є вибір математичної моделі технологічного процесу, тобто вибір виду співвідношення між вхідними і

вихідними змінними. Таке співвідношення, у свою чергу, залежить від значної кількості факторів, зокрема таких як поставлена мета, фізична природа процесів, апріорні відомості про об'єкт тощо.

Застосування експериментальних методів ідентифікації зумовлює водночас і використання апріорної інформації про фізико-хімічні процеси і механічні властивості досліджуваних технологічних об'єктів. Залежно від наявної апріорної інформації про параметри керованого технологічного об'єкта методи визначення його експлуатаційних характеристик можна розділити на дві групи:

- методи визначення структури і параметрів об'єкта (у цьому випадку розглядають “чорний” непрозорий ящик);
- методи визначення параметрів об'єкта при заданій або прийнятій структурі (у цьому випадку розглядають “сірий” напівпрозорий ящик).

Наявність хоча б невеликих відомостей про можливу структуру об'єкта або вибір достатньо загальної структури, як допустимої, суттєво пришвидшує процес ідентифікації. Виходячи з цього, методи експериментальної ідентифікації можна згрупувати залежно від виду експерименту і методів оброблення інформації (табл. 1.1).

Різноманітність методів вирішення задач ідентифікації, наведених у табл. 1.1, зумовлено, з одного боку, особливостями постановки задачі, з другого – різноманітністю властивостей досліджуваних промислових об'єктів. З цієї точки зору придатність того чи іншого методу ідентифікації визначається такими особливостями, як лінійність або нелінійність характеристик, дискретність або неперервність технологічного процесу, міра динамічних властивостей, рівень випадкових завад, можливість введення штучних збурень.

За способом накопичення експериментальних даних методи поділяють на активні і пасивні. Активний експеримент ґрунтується на введенні у об'єкт штучних збурень різного виду – як детермінованих, так і випадкових.

Таблиця 1.1

Методи експериментальної ідентифікації технологічних процесів

Вид моделей об'єкта	Вид експерименту	Методи оброблення інформації
Статична	Активний	Факторний аналіз Ортогональний аналіз Дисперсійний аналіз Симплексне планування
	Пасивний	Кореляційний аналіз Регресійний аналіз Адаптивні методи Табличні методи
Динамічна	Активний	Графічний метод Аналіз частотних характеристик Кореляційний аналіз Моделювання
	Пасивний	Кореляційний аналіз Аналіз частотних характеристик Аналіз часових характеристик Чисельні методи

У багатьох випадках для активної ідентифікації об'єктів (на які не впливають завади) застосовують періодичні (синусоїдні зондувальні сигнали). За допомогою таких сигналів можна визначити частотні характеристики ідентифікованого об'єкта.

Існують різні типи випробувальних сигналів. Оптимальний вибір сигналів здійснюють, виходячи з характеру процесу ідентифікації і властивостей об'єкта (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Основні види випробувальних сигналів, їх властивості і методи оброблення отриманої інформації

Вид випробувального сигналу	Властивості випробувального сигналу	Методи оброблення інформації
Стрибокподібний	Легкий в застосуванні; дуже точний на низьких частотах; легкий для інтерпретації; має велику тривалість; чутливий до збурень	Графічний; диференціювання, перетворення і вирівнювання кривих; моделювання
Імпульсний	Дуже точний до високих частот; легкий для інтерпретації; має велику тривалість; дуже чутливий до збурень	Інтегрування; перетворення і вирівнювання кривих; моделювання
Згладжений імпульсний	Діапазон точності настраюється; невелика тривалість; оброблення даних складне	Перетворення, ділення і вирівнювання кривих; моделювання
Синусоїдний	Важкий у застосуванні; для його реалізації необхідно багато часу;	Графічний; поєднання кривих

Продовження таблиці 1.2

	нечутливий до збурень	
Завади (активні двійкові)	Дуже простий у застосуванні; не достатньо точний; нечутливий до збурень; оброблення даних складне	Визначення кореляційної функції; моделювання кореляційних функцій
Завади (пасивні)	Дуже простий у застосуванні; не достатньо точний; нечутливий до корельованих збурень; оброблення даних дуже складне	Визначення кореляційної функції; моделювання кореляційних функцій

Вибір оптимального критерію оцінювання є важливою частиною загальної задачі синтезу системи ідентифікації. При цьому під оптимальним випробувальним сигналом розуміють сигнал, який дозволяє у заданих умовах функціонування отримати характеристики технологічного процесу з необхідною точністю за мінімальний час.

Усі моделі умовно поділяють на два класи: фізичні і математичні [1, 16].

**Фізична модель процесу** – це модель, у якій фізичні процеси є ідентичними до процесів у об'єкті, тому опис їх математичних залежностей є аналогічним. Фізичні моделі, у свою чергу, можна розділити на дві категорії:

- моделі, які мають однакову з об'єктом фізичну природу;
- моделі, природа яких відрізняється від природи об'єкта.

У першому випадку модель відрізняється від об'єкта тільки кількісними показниками – геометричними розмірами і діапазоном зміни параметрів, які характеризують об'єкт. Це дає можливість вивчити фізичну сутність об'єкта, перехідні процеси, граничні умови, уточнити розрахункові формули і основні теоретичні положення. Побудова фізичних моделей на елементах, відмінних за своєю природою від елементів об'єкта, ґрунтується на подібності рівнянь, що описують фізичні процеси у об'єктах і моделях. Такі моделі можуть бути реалізовані в аналоговій техніці та цифрових обчислювальних машинах.

**Математична модель** технологічного процесу не вимагає її фізичної реалізації і зводиться, у кінцевому випадку, до чисто математичної задачі пошуку екстремуму функціонала заданого виду. Залежно від виду цього функціонала екстремум знаходиться або чисто математичним шляхом, або за допомогою відомих обчислювальних прийомів [17].

Математичні моделі можна об'єднати у три групи:

- детерміновані;
- статистичні (імовірнісні);
- адаптивні.

*Детермінована математична модель* – це модель, опис якої подають у вигляді функціональних залежностей між вхідними і вихідними параметрами об'єкта. Як правило, така

модель відповідає фізичному процесу, меті системи і поставленим обмеженням.

*Статистична модель* визначається набором статистичних параметрів і функцій розподілу ймовірностей. Така модель має більш формальний характер, ніж детермінована, позаяк відображає об'єкт, не обмежуючись лише врахуванням його конкретних фізичних властивостей.

*Адаптивна модель* застосовується тоді, коли немає достатньої апріорної інформації про об'єкт керування. Адаптивний підхід передбачає визначення характеристик технологічного процесу при його нормальному перебігу у даний конкретний момент часу, а отримані результати оцінювання поведінки об'єкта використовують для уточнення його моделі.

Математичний опис досліджуваного об'єкта можна отримати у різному вигляді. При цьому характеристики моделі повинні максимально відповідати аналогічним характеристикам об'єкта. Однак, використання у реальних системах надто складних математичних моделей позбавляє їх гнучкості і універсальності, утруднює їх застосування. У зв'язку з цим, вибір моделі того чи іншого класу зумовлений не лише апріорними відомостями про структуру досліджуваного об'єкта, режимами його функціонування, але й також необхідною мірою точності відповідності моделі реальному об'єкту і складністю реалізації отриманого рішення.

Сьогодні широко використовують та інтенсивно розробляють методи ідентифікації лінійних об'єктів. Як математичний опис використовують непараметричне (інтегральне рівняння з невідомою імпульсною перехідною функцією або його дискретний аналог) або параметричне (диференціальне рівняння) моделювання досліджуваного процесу.

Один і той же динамічний об'єкт може бути адекватно відображений математичними моделями різного виду:

- коефіцієнтами диференціального рівняння або його вагової функції;
- амплітудною або фазовою частотними характеристиками моделі;



- апроксимацією динамічних характеристик об'єкта деякою системою функцій;
- наближеною моделлю об'єкта з налаштуванням домінуючих параметрів (коефіцієнта підсилення, часу запізнювання, полюса і передавальної функції).

Одночасне налаштування усіх параметрів приводить до розв'язку системи стохастичних нелінійних диференціальних рівнянь. У цьому випадку критерій якості буде екстремальним, що утруднює використання розроблених методів оцінювання невідомих параметрів. Тому при ідентифікації об'єктів таким методом необхідно накладати певні обмеження на структуру моделі і клас вхідних впливів.

Внаслідок широкого спектру запропонованих алгоритмів, а також різноманітності досліджуваних технологічних процесів, кожен із розроблених методів можна застосовувати для визначеного доволі вузького класу об'єктів.

## 1.9. Математичні моделі об'єктів

Попередньо показано, що об'єктом ідентифікації є все те, що пізнається внаслідок аналізу інформації, яку отримують у процесі оброблення даних. Дані отримують у процесі вимірювання змінних на деякому кінцевому інтервалі спостереження, а також у процесі обчислення відомих функцій, які задають аналітично або алгоритмічно. При ідентифікації отримують інформацію у найбільш стислому вигляді. Цього досягають внаслідок побудови математичних моделей. При цьому будують моделі двох типів.

*Перший тип* – це математичні моделі, які детально описують внутрішні і зовнішні процеси у об'єкті. Такі моделі опосередковано імітують об'єкт, тому їх називають *імітаційними* [18-20].

*Другий тип* – це математичні моделі, які ґрунтуються на взаємозв'язку вимірних або обчислених змінних. Такі моделі дозволяють отримати передбачуване значення виходів об'єкта із заданою точністю. Математичні моделі відрізняються, як правило, простотою опису, порівняно з імітаційними моделями.

Надалі будемо розглядати тільки математичні моделі

другого типу. Цей тип математичних моделей будують виходячи з таких міркувань.

Вихідний сигнал досліджуваного лінійного об'єкта  $y_0(t)$  можна подати у вигляді суми двох складових – вільної і вимушеної:  $y_{віль}(t)$  і  $y_{виму}(t)$ , тобто:

$$y_0(t) = y_{віль}(t) + y_{виму}(t).$$

Вільна складова характеризує перехідний процес, а отже, і вагову функцію  $K(t)$ , яку можна записати як реакцію досліджуваного об'єкта на вхідний сигнал типу дельта-функції  $\sigma(\tau)$ , тобто:

$$K(t) = y_{віль}(\sigma(\tau), t),$$

де:

$\tau$  – час, який визначає момент прикладання вхідного сигналу дельта-функції  $\sigma(\tau)$  до входу досліджуваного об'єкта.

Вагова функція  $K(t)$  є розв'язком відповідного диференціального або інтегрального рівняння, яку можуть задавати у неперервній або дискретній формі. Тому математична модель вільної складової може мати різні форми запису, які відрізняються як структурою, так і параметрами. Вибір математичної моделі залежить від поставленої дослідником задачі і його індивідуальних особливостей.

Вимушена складова  $y_{виму}(t)$  є реакцією досліджуваного об'єкта у встановленому режимі, тобто у такому режимі, коли перехідний процес закінчено, а зміна вихідного сигналу відбувається лише під дією вхідного сигналу. При дослідженні процесу функціонування об'єкта вимушену складову записують як функцію часу:

$$y_{виму}(t) = P_M u_{вх}(t).$$

У цьому випадку функція часу характеризує процес відслідковування об'єктом вхідного сигналу  $u_{вх}(t)$  конкретної форми. Зокрема:

- якщо  $u_{ex}(t) = C = const$ , а досліджуваний об'єкт лінійний, тоді  $y_{вим}(t) = C_1$ .
- якщо  $u_{ex}(t) = asin\omega t$ , тоді  $y_{вим}(t) = Asin(\omega t + \varphi)$  і т.д.

Для нелінійних об'єктів вказаний процес є дещо складнішим. Розділити вихідний сигнал на вільну і вимушену складову не завжди можливо, тому розглядають ці системи разом. При цьому часто зустрічаються об'єкти, коли вільною складовою можна знехтувати. Тоді розглядають тільки вимушену складову.

Аналіз характеристик “вхід-вихід” у параметричному вигляді, тобто аналіз залежностей  $y_{вим}(t) = F(u_{ex})$ , також не потребує розділення вихідного сигналу на складові. У цьому випадку будують математичну модель не для вхідного сигналу конкретної форми, а залежно від амплітуди вихідного сигналу. Очевидно, що крім амплітуди велике значення мають швидкість, прискорення та інші характеристики вхідного сигналу. Наявність практичних вимог до опису структури і параметрів об'єктів зумовлює появу широкого спектру класів моделей. Розглянемо конкретніше математичні моделі, які застосовують на практиці.

**Лінійні динамічні моделі.** Ці моделі мають вигляд лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1(t) y(t) + b_0(t) y(t) =$$

$$a_n(t) \frac{d^m u(t-\tau)}{dt^n} + \dots + a_1(t) \frac{du}{dt}(t-\tau) + a_0(t-\tau) u(t-\tau), \quad (1.14)$$

- де:
- $\{b_{m-1}(t), b_{m-2}(t), \dots, b_0(t), a_n(t), \dots, a_0(t)\}$  – вектор невідомих параметрів моделі;
  - $\{m, n\}$  – вектор невідомих параметрів структури;
  - $\tau$  – запізнення.

На практиці часто справедливе припущення, що параметри  $a_i(t)$  і  $b_i(t)$  під час розв'язування задачі оцінювання приймають постійними. Тоді лінійні диференціальні рівняння (1.14) спрощуються і приймають вигляд:

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 y(t) = a \frac{d^m u(t-\tau)}{dt^m} + \dots + a_0 u(t-\tau). \quad (1.15)$$

Якщо у рівнянні (1.15) початкові умови нульові, тоді застосовуючи до нього перетворення Лапласа, визначаємо *передавальну функцію* системи:

$$W(s) = \frac{a_n s^n = a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (1.16)$$

Широке застосування на практиці має модель, яка задається у вигляді *інтеграла згортки* [21]:

$$y(t) = y(t_0) + \int_0^t K(\tau) u(t-\tau) dt, \quad (1.17)$$

де:

$K(\tau)$  – вагова функція;

$y(t_0)$  – початкова умова.

Особливість рівняння (1.17) полягає у тому, що його застосовують для лінійних систем як із змінними параметрами, так і з постійними. Крім того, це рівняння є справедливим і для лінійних систем з розподіленими і нерозподіленими параметрами.

Будь-яку систему з математичної точки зору можна представити у вигляді оператора, за допомогою якого вхідний сигнал  $u(t)$  перетворюється у вихідний сигнал  $y(t)$ . Цю залежність можна описати у вигляді:

$$y(\tau) = A\{u(t)\},$$



Перехід від моделі (1.20) і (1.21) до моделі (1.16) здійснюють таким чином.

Припустимо, що  $X(0) = 0$ . Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння (1.20) і враховуючи нульові початкові умови, отримаємо:

$$X(s) = AX(s) + Bu(s).$$

Групуючи подібні члени, знаходимо значення  $X(s)$  у вигляді:

$$X(s) = [sE - A]^{-1} Bu(s),$$

де:

$E$  – одинична матриця.

Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння (1.21) після підстановки у нього значення  $X(s)$ , отримаємо значення вимірюваного сигналу:

$$Y(s) = [C[sE - A]^{-1} B + D]u(s).$$

Отже, передавальну функцію  $W(s)$  можна записати у вигляді:

$$W(s) = C[sE - A]^{-1} B + D.$$

Характерним для лінійних рівнянь є справедливості принципу суперпозиції, який, у більшості випадків, використовують при дослідженні об'єкта. Принцип суперпозиції використовують, аналізуючи реакцію об'єкта на окремі вхідні сигнали, що особливо важливо при вивченні складних систем.

Виходячи з того, що змінні  $u(t)$  і  $y(t)$  є випадковими функціями у результаті накладення завад або похибок обчислень, і взаємозв'язок між змінними визначають за усередненими значеннями, тому такі рівняння будемо називати

рівняннями регресії. Розрізняють лінійні і нелінійні, динамічні і статичні рівняння регресії.

*Лінійна статична регресія* – це регресія, яка має вигляд:

$$y(n) = \sum_{m=0}^N a_m u_m(n) + \xi(n), \quad (1.22)$$

де:

$\xi(n)$  – завада, виміряна у  $n$ -й момент часу.

*Лінійна динамічна регресія* – це залежність, яка має вигляд:

$$y(n) = \sum_{m=0}^N a_m u_m(n-m) + \xi(n). \quad (1.23)$$

У регресивному аналізі розрізняють *авторегресивні моделі*, які мають вигляд:

$$y(n) + \sum_{m=0}^N b_m y(n-m) = \xi(n). \quad (1.24)$$

З рівняння (1.24) видно, що на вході авторегресивних моделей присутній тільки сигнал завади.

***Нелінійні моделі.*** Широке розповсюдження отримали математичні моделі у вигляді функціональних рядів. Це зумовлено тим, що для будь-якої неперервної на обмеженому інтервалі функції при заданій точності можна знайти алгебраїчний поліном, який буде апроксимувати цю функцію з заданою точністю [22].

***Статичні нелінійні моделі.*** Розрізняють функціональні ряди однієї і багатьох змінних. Поліном однієї змінної можна описати у вигляді:

$$y(x) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n, \quad (1.25)$$

а поліном багатьох змінних має вигляд:

$$y(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n a_i u_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} u_i u_j + \dots \quad (1.26)$$

Загальний вигляд моделі, заданої функціональним рядом, можна зобразити таким чином:

$$y(u) = \sum_{i=0}^n a_i f_i(u),$$

де:

$u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ;  $f_i(n)$  – функції багатьох аргументів.

Модель у вигляді тригонометричного полінома описується двома виразами:

- тригонометричним поліном з кратними частотами:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t) \quad (1.27)$$

- тригонометричним поліном з некрatними частотами:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \quad (1.28)$$

**Ряд Тейлора.** Якщо значення функції  $F(x)$  і ряд її похідних можуть бути обчислені у точці  $x=a$ , тоді функція  $F(x)$  є поліномом  $n$ -го степеня, який має вигляд:

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**Інтерполяційна формула Лагранжа.** Якщо можна



обчислити значення функції  $F(x)$  у  $(n+1)$ -ій точці, тоді для наближеного обчислення функції  $F(x)$  у проміжних точках будують поліном  $n$ -го порядку:

$$F(x) = A_0 + A_1(x) + \dots + A_n x^n = f(x). \quad (1.29)$$

Значення функції  $F(x)$  і полінома у точках  $a_1, \dots, a_{n+1}$  співпадають, тобто:

$$F(a_1) = f(a_1), F(a_2) = f(a_2), \dots, F(a_{n+1}) = f(a_{n+1}).$$

Поліном  $F(x)$  можна записати у дещо іншій формі:

$$F(x) = \frac{(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_{n+1})}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{n+1})} f(a_1) +$$

$$\frac{(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_{n+1})}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_{n+1})} f(a_2) +$$

$$\dots$$

$$\frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \dots (a_{n+1} - a_n)} f(a_{n+1}).$$

Такий поліном будемо називати *інтерполяційним багаточленом Лагранжа*.

**Приклад.**

За умови, коли:

$$f(-1)=2, f(0)=1, f(1)=4, f(2)=11,$$

отримаємо:

$$F(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} 2 + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} + \frac{(x+1)x(x+2)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} 4 +$$

$$\frac{(x+1)x(x-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 11 = 2x^2 + x + 1$$

З наведеного прикладу видно, що степінь інтерполяційного багаточлену може бути меншим від  $(n)$ , де

$(n+1)$  – кількість точок інтерполяції.

Найпростішою статичною моделлю є лінійна залежність вихідного сигналу від вхідного:

$$y(t) = k(t)u(t) \quad (1.30)$$

де:

$k(t)$  – коефіцієнт пропорційності.

Для моделей, що мають один вихід і декілька входів, ця залежність описується виразом, який має вигляд:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i(t)u_i(t). \quad (1.31)$$

Коефіцієнти  $k_i(t)$  можуть і не залежати від часу, тоді модель (1.31) суттєво спрощується. У цьому випадку рівняння моделі описується виразом, який має вигляд:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(t). \quad (1.32)$$

Нелінійна статична модель при  $n$  вхідних сигналах і одному вихідному описується у вигляді багатовимірного степеневого поліному:

$$y(t) = a_0 + \sum a_i u_i + \sum \sum b_{ij} u_i u_j + \dots \quad (1.33)$$

Або у вигляді ряду:

$$y(t) = a_0 + \sum b_i f_i(u), \quad (1.34)$$

де:

$$u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\}.$$

Модель, описана виразом (1.33), шляхом заміни змінної може бути зведена до моделей, описаних виразами (1.32) чи (1.34).

**Нелінійні динамічні моделі об'єктів.** Спектр нелінійних моделей значно ширший, ніж лінійних. Практично кожна “нелінійність” потребує своєї математичної моделі, отже, кожна нелінійна система має свій математичний опис. Наприклад, рівняння руху ракети, яка вертикально стартує, можна записати у вигляді:

$$m(t) \frac{d^2 h}{dt^2} + k \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + m(t)g = c \frac{dm(t)}{dt}, \quad (1.35)$$

де:

$h$  – висота ракети над точкою старту;

$m$  – миттєва маса ракети;

$k$  і  $c$  – позитивні коефіцієнти.

У наведеному рівнянні “нелінійність” визначається квадратичною залежністю швидкості зміни висоти.

Динамічні нелінійні системи з гладкими “нелінійностями” описуються за допомогою рядів Вольтера. Побудова рядів Вольтера відбувається таким чином.

Зобразимо нелінійну систему у вигляді двох послідовно з'єднаних блоків: лінійного ( $W_l$ ) і нелінійного ( $W_{нл}$ ) (рис. 1.11).

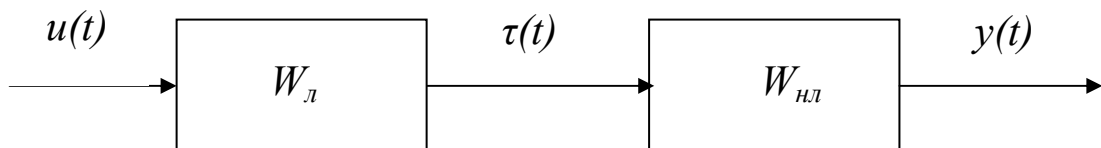


Рис. 1.11. Зображення нелінійної системи у вигляді послідовного з'єднання лінійної і нелінійної ланки.

Вихідний сигнал лінійної ланки  $W_l$  записують у вигляді

інтеграла згортки (1.17):

$$z(t) = \int_0^t K(\tau)u(t-\tau)d\tau. \quad (1.36)$$

Оскільки вихідний сигнал:  $y(t) = y(z(t))$ , тоді, розкладаючи (1.36) за степенями  $z(t)$ , отримаємо ряд:

$$y(t) = \sum_i z^i(t). \quad (1.37)$$

Підставляючи (1.36) у (1.37), отримаємо вираз:

$$y(t) = \int_0^t K_1(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^t K_2(\tau, \theta)u(t-\tau)u(t-\theta)d\tau d\theta, \quad (1.38)$$

який і визначає ряд Вольтера. У ньому:

$$K_1(\tau) = K(\tau); K_2(\tau, \theta) = K(\tau) K(\theta), \dots$$

Із розглянутих математичних моделей об'єктів важливим для ідентифікації є те, що моделі поділяють на параметричні (1.16), (1.31) і непараметричні (1.30). Параметричні моделі, у свою чергу, поділяють на лінійні за параметрами (1.26), (1.27) і нелінійні (1.16), (1.23), (1.38).

### 1.10. Методи синтезу математичних моделей

Методика синтезу математичних моделей суттєво залежить від об'єму апріорної інформації. У кожному конкретному випадку під апріорною інформацією розуміють інформацію про об'єкт спостереження, що є у наявності до початку проведення поточного етапу дослідження об'єкта.

Припустимо, що яка-небудь інформація про об'єкт спостереження відсутня. У цьому випадку об'єкт спостереження відносять до об'єктів типу “чорний ящик”. Тоді єдиною можливістю дослідження об'єкта є спостереження за його входами і виходами і побудова на цій основі математичної моделі.

Зазвичай розглянута ситуація зустрічається рідко. Як правило, на початковому етапі ідентифікації є відомими принципи функціонування об'єкта, принаймні ті, які закладалися у структуру об'єкта при його створенні (у цьому випадку об'єкт є “сірим ящиком”). Тоді задачу розроблення математичної моделі вирішують у два етапи.

На першому етапі на основі апріорних відомостей про фізико-хімічні процеси, що відбуваються у об'єкті ідентифікації, складають початкову структурну модель. Зазвичай ця модель містить невідомі параметри, знаходження яких за апріорними даними є дуже складним або неможливим процесом. Крім того, така модель часто містить деякі елементи структури, необхідність введення яких у модель не є обов'язковою.

Під час реалізації другого етапу на підставі експериментальних досліджень визначають невідомі параметри об'єкта ідентифікації і уточнюють його структуру.

Зазначимо, що процес синтезу математичної моделі на основі спостереження (експериментальних досліджень), тобто процес виявлення структури і параметрів оператора моделі  $F_m$ , називають ідентифікацією у широкому змісті.

Принципові труднощі виявлення оператора  $F_m$  пов'язані з тим, що у процесі експериментальних досліджень деякі змінні входів об'єкта (вектор  $E$ ) залишаються непередбачуваними, а, відповідно, і некерованими.

Водночас можливий випадок, коли є повна апріорна інформація про об'єкт (у цьому випадку об'єкт розглядають як “прозорий ящик”). При цьому можлива побудова математичної моделі аналогічним шляхом. За аналогією до попереднього методу такий спосіб знаходження  $F_m$  оператора називають *аналітичною ідентифікацією*. Аналітичний шлях отримання математичної моделі, в основному, застосовують лише для

добре вивчених простих об'єктів ідентифікації. Для складних об'єктів після аналітичного конструювання математичних моделей, як правило, необхідні додаткові експериментальні дослідження. Метою цих досліджень є:

- перевірка правильності основних теоретичних положень, прийнятих при розробленні математичної моделі;
- виявлення за необхідності деяких параметрів моделі.

Така “комбінована” схема дослідження об'єкта ідентифікації дуже близька до схеми ідентифікації об'єкта типу “сірий ящик”. Відмінність полягає лише у тому, що при “аналітичному” методі формування моделі основним об'ємом дослідження є глибокий теоретичний аналіз причинно-наслідкових зв'язків між змінними і виявлення закономірностей, що визначають перебіг процесів у об'єкті. Це дозволяє суттєво зменшити об'єм експериментальних досліджень.

У процесі розроблення математичних моделей, на початкових етапах ідентифікації виникає питання, як оцінити “близькість” оператора  $F_m$  операторові об'єкта  $F_0$ . Властивості об'єкта і моделі порівнюють за їхніми реакціями (відгуком) на одну і ту ж вхідну дію.

Припустимо, що реакція одновимірного об'єкта описується деякою функцією  $y_0(t)$ , а реакція моделі –  $y_m(t)$ . Тоді ступінь близькості цих реакцій у кожен момент часу можна оцінити їх різницею:

$$\Delta y(t) = y_0(t) - y_m(t), \quad (1.39)$$

або модулем цієї різниці.

Для оцінювання близькості  $y_0(t)$  і  $y_m(t)$  на усьому інтервалі спостереження  $(0, T_k)$  часто використовують інтегральний показник:

$$q = \int_0^{T_k} [\Delta y(t)]^2 dt \quad (1.40)$$

У цьому випадку  $\Delta y(t)$  беруть у квадраті для того, щоб відхилення різних знаків взаємно не компенсувалися.

Для багатовимірних об'єктів відхилення векторів  $Y_m(t)$  виходу моделі від вектора  $Y_0(t)$  виходу об'єкта у кожен момент часу можна оцінити, наприклад, значенням квадрату різниці цих векторів:

$$q(t) = [Y_0(t) - Y_m(t)]^2 = \sum_{i=1}^m [y_{0i}(t) - y_{mi}(t)]^2, \quad (1.41)$$

де:

$m$  – кількість вихідних змінних об'єкта.

Залежно від властивостей моделі і об'єкта використовують також інші форми оцінювання близькості їх реакцій. Очевидно, що у загальному випадку при розробленні математичної моделі необхідно мінімізувати вибране оцінювання близькості.

У разі, коли можна визначити структуру моделі об'єкта, невідомі коефіцієнти цієї моделі вибирають, використовуючи *метод найменших квадратів* [23]. Використання цього методу можна пояснити на прикладі.

**Приклад.** Нехай структура моделі об'єкта задана у такому вигляді:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (1.42)$$

де:

$y$  – вихідна величина;

$x_i (i = 1, \bar{n})$  – вхідні параметри;

$a_i (i = 1, \bar{n})$  – коефіцієнти моделі.

Зазначимо, що модель (1.42) є загальною, тобто її параметри можуть бути різними функціями (наприклад:  $x_i = x_i'^2$ ;  $x_k = x_i' x_k'$ ;  $x_p = s_{in} \omega_q$  і т.д.). Очевидно, що модель є лінійною стосовно невідомих коефіцієнтів  $a_i$ .

Виходячи з формули (1.42) для кожної точки експериментальних даних можна скласти умовне рівняння:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \dots + a_n x_{ni}$$

і визначити квадрат відхилення (помилки) за формулою:

$$\hat{\delta}_i = (y_i - \hat{y}_i) = (y_i - a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \dots + a_n x_{ni})^2, \quad (1.43)$$

де:

$y_i, \hat{y}_i$  – відповідно емпіричне і отримане згідно моделі значення вихідної величини у  $i$ -й точці;

$x_{ki} (k = 1, \bar{n})$  – значення вхідних параметрів у  $i$ -й точці. Фактично  $y_i$  і  $\hat{y}_i$  – значення вихідної змінної, отримані за допомогою оператора об'єкта  $F_0$  і оператора моделі  $F_m$ .

Рівняння (1.42) складається для усіх  $N$  точок таблиці експериментальних даних і утворюють систему головних рівнянь Гауса. При цьому після додавань рівнянь (1.43) для усіх  $N$  експериментальних точок, отримаємо:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \dots + a_n x_{ni})^2 \quad (1.44)$$

Метод найменших квадратів полягає саме у мінімізації виразу (1.44). Мінімальне значення  $\Delta^2$  називають *залишковою сумою квадратів*, або точністю за методом найменших квадратів. Інакше кажучи, метод найменших квадратів полягає у такому розрахунку оцінювання коефіцієнтів моделі  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , для яких вираз (1.44) є мінімальним.

Для обчислення мінімуму у виразі (1.44) знаходимо вирази для часткових похідних за усіма відомими коефіцієнтами  $a_i$  і прирівнюємо їх до нуля:



$$\frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_n} = 0.$$

Звідси отримаємо систему рівнянь Гауса для рівняння (1.42):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_n = \bar{y} \\ a_0 \bar{x}_1 + a_1 \bar{x}_1^2 + a_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_1 \bar{x}_n = \bar{x}_1 \bar{y} \\ a_0 \bar{x}_2 + a_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + a_2 \bar{x}_2^2 + \dots + a_n \bar{x}_2 \bar{x}_n = \bar{x}_2 \bar{y} \\ \dots\dots\dots \\ a_0 \bar{x}_n + a_1 \bar{x}_1 \bar{x}_n + a_2 \bar{x}_2 \bar{x}_n + \dots + a_n \bar{x}_n^2 = \bar{x}_n \bar{y} \end{array} \right. \quad (1.45)$$

де:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik}; \quad \bar{x}_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik}^2; \quad \bar{x}_i \bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik} x_{jk};$$

$$\bar{x}_i \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik} y_k.$$

Вирішуючи систему за методом Гауса, отримаємо оцінку коефіцієнтів моделі.

Систему умовних рівнянь Гауса для об'єкта ідентифікації можна представити у математичному вигляді:

$$X a = y \quad (1.46)$$

де:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} \end{vmatrix};$$

$$a = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}; \quad y = \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}, \quad (1.47)$$

де:

$X$  –  $N_{xn}$  – прямокутна матриця умовних рівнянь; зазвичай

$$N \gg n;$$

$N$  – кількість дослідів;

$n$  – кількість аргументів (вхідних змінних);

$a$  – стовпець коефіцієнтів;

$y$  – стовпець спостережень вихідної величини.

Для отримання системи нормальних рівнянь Гауса необхідно помножити матрицю  $X$  на транспоновану:

$$X^T X a = X^T y. \quad (1.48)$$

Результатом наведених дій над матрицями  $X^T$  та  $X$  є квадратна  $n \times n$  нормальна матриця. Помноживши обидві частини матричного рівняння на обернену матрицю отримаємо:

$$(X^T X)^{-1} X^T X a = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (1.49)$$

де:

$$(X^T X)^{-1} X^T X = E.$$

Тепер отримаємо вирішення системи нормальних рівнянь:

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y. \quad (1.50)$$

**Приклад.**

1) Для прямої:  $y = a_0 + a_1 x$

$$a_0 = \frac{\sum_{n=1}^N y_n}{N} - \frac{b \sum_{n=1}^N x_n}{N};$$

$$b = \frac{\sum_{n=1}^N x_n y_n - \frac{\sum_{n=1}^N x_n \sum_{n=1}^N y_n}{N}}{\sum_{n=1}^N x_n^2 - \frac{\sum_{n=1}^N x_n \sum_{n=1}^N x_n}{N}}.$$

У цілому пошук оптимальної моделі проводять у заданій множині структур  $S$  (клас опорних функцій). Вибір множини залежить від виду задачі, що вирішують. Розглянемо декілька класів функцій, придатних для складання математичної моделі об'єкта ідентифікації.

**Клас алгебраїчних функцій.** У цьому класі найбільш загальною формою моделі є поліном Колмогорова - Габора від  $k$  змінних:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i U_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} U_i U_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{e=1}^k a_{ije} U_i U_j U_e + \dots \quad (1.51)$$

Наведений поліном є сумою лінійних, квадратичних, кубічних та інших членів. Після перетворення усіх наявних у ньому доданків отримаємо лінійний поліном:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (1.52)$$

Члени цього полінома і складають початковий набір аргументів, а їх можлива лінійна комбінація – початковий базис моделей (множина структур  $S$ ). Для збільшення різноманітності моделей змінні  $U_i$  можна ввести у формулу (1.51) у прямому і зворотному ( $1/U_i$ ) вигляді.

У класі алгебраїчних функцій можна задати й іншу загальну модель (мультиплікативну) від  $k$  змінних:

$$u = q U_1^{a_1} U_2^{a_2} \cdot \dots \cdot U_n^{a_n} . \quad (1.53)$$

Така функція після логарифмування прийме вигляд:

$$\ln u = \ln q + a_1 \ln U_1 + a_2 \ln U_2 + \dots + a_n \ln U_n . \quad (1.54)$$

Вводячи у вираз (1.54) значення змінних ( $a_0 = \ln q$ ,  $x_i = \ln U_i$ ) отримаємо вираз (1.52).

**Клас гармонійних функцій.** Розглянемо клас функцій з дискретним набором гармонік. Інтервал головних значень частот початкових гармонік  $2\pi$  розбивається (взагалі кажучи довільно) на  $k$  проміжків. Для коливальних процесів з періодичними повтореннями оптимальним є метод розкладання у гармонійний ряд з кратними частотами (ряд Фур'є). Тоді загальна модель у цьому класі має такий вигляд:

$$y = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) , \quad (1.55)$$

де:

$$a'_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) dt ;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\omega_1 t dt ;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin k\omega_1 t dt ; \quad (1.56)$$

Параметр  $t$  може бути як тимчасовою, так і просторовою координатою. Верхню межу в сумі виразу (1.55) вибирають, виходячи з необхідної точності моделі.

Після перетворення змінних у перетвореному виразі (1.55):

$$y = \frac{a'_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega_1 t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i\omega_1 t ;$$

$$\frac{a'_0}{2} = a_0 ; x_i = \cos i\omega_1 t ;$$

$$x_j = \sin j\omega_1 t ; b_j = a_j ;$$

отримаємо:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} a_j x_j . \quad (1.57)$$

**Клас експоненціальних функцій.** У даному класі виділяють такі функції:

$$y = e^{A+Bx} ; y = A(1 - e^{-Bx}) + c ; y = Ae^{\frac{B}{x}} .$$

Розглянемо кожну з них.

1. Експоненціальна функція:

$$\hat{y} = e^{A+Bx} . \quad (1.58)$$

Якщо безпосередньо використати метод найменших квадратів, тоді  $\Delta^2$  має вигляд:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^N (e^{A+Bx_i} - y_i)^2 \rightarrow \min .$$

Перейдемо до системи нелінійних, відносно коефіцієнтів  $A$  і  $B$ , системі алгебраїчних рівнянь. Таку систему вирішити набагато важче, ніж лінійну.

Прологарифмуємо функцію (1.58), внаслідок чого отримаємо функцію  $y^*$ :

$$y^* = \ln y = A + Bx . \quad (1.59)$$

Відповідно прологарифмуємо і величини  $y_i$ , які визначено експериментально:

$$\hat{y}_i^* = \ln \hat{y}_i . \quad (1.60)$$

Після перетворення необхідно мінімізувати суму квадратів:

$$\Delta^{*2} = \sum_{i=1}^N (A + Bx_i - \ln \hat{y}_i) \rightarrow \min. \quad (1.61)$$

Для визначення коефіцієнтів  $A$  і  $B$  замість величин  $y_i$  необхідно підставити  $y_i^* = \ln y_i$ .

2. Експоненціальна функція:

$$y = A(1 - e^{-Bx}) + c \quad (1.62)$$

Ця формула відрізняється від попередньої незалежними від  $x$  членами  $A$  і  $C$ . Для їх визначення продиференціюємо функцію (1.62) згідно  $x$ . Отримаємо:

$$\hat{y}' = AB e^{-Bx}. \quad (1.63)$$

Також, експериментально отримаємо величини  $y_i (i = 1, \bar{N})$ . Для цього знайдемо відношення різниць:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.64)$$

З формули (1.64) видно, що з  $N$  величин можна обчислити лише  $(N-1)$  похідних. Після цього прологарифмуємо рівняння (1.63), (1.64), причому рівняння (1.63) знову перетвориться на рівняння прямої:

$$\hat{y}^* = \ln \hat{y}' = \ln(AB) - Bx, \quad (1.65)$$

$$\hat{y}_i^* = \ln \hat{y}'_i = \ln \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.66)$$

Співвідношення різниць  $\hat{y}'_i$  у загальному випадку не приводить до приросту абсцис  $x_i$  або  $x_{i+1}$ , хоча в деякій точці у

інтервалі між  $x_i$  і  $x_{i+1}$  такий приріст можливий. Для отримання точніших наближень вводили значення абсциси  $x_i^*$ .

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Невідомі коефіцієнти прямої у рівнянні (1.65) отримаємо за допомогою таких перетворень:

$$\ln(AB) = a_0; e^{a_0} = AB; A = \frac{e^{a_0}}{B} \quad (1.67)$$

$$B = -a_1 \quad (1.68)$$

Коефіцієнти  $a_0$  і  $a_1$  також обчислюють шляхом заміни:

$$x_n \text{ через } x_i^*; y_n \text{ через } y_i^*; N \text{ через } (N-1). \quad (1.69)$$

На останньому етапі визначаємо константу  $C$ , яка забезпечує переміщення у паралельно осі  $X$ . Вказану константу знайдемо з рівняння:

$$\sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \quad (1.70)$$

тоді:

$$\sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N [A(1 - e^{-Bx_i})] + NC, \quad (1.71)$$

і

$$C = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N \hat{y}_i - \sum_{i=1}^N [A(1 - e^{-Bx_i})] \right\}. \quad (1.72)$$



3. Експоненціальна функція:

$$\hat{y} = Ae^{\frac{B}{x}}. \quad (1.73)$$

Для лінеаризації виконують такі кроки:

- у експоненті  $\frac{1}{x}$  замінюють на  $z$  з обчисленням цього аргументу;

- нову функцію  $y = Ae^{Bz}$  логарифмують:

$$\ln \hat{y} = \ln A + Bz \quad (1.74)$$

(це рівняння прямої з нахилом  $a_1 = B$ , яка перетинає вісь ординат у точці  $a_0 = \ln A$ );

- експериментально отримані величини  $\hat{y}_i$  логарифмують:

$$y_i^* = \ln \hat{y}_i^* ;$$

- коефіцієнти обчислюють за формулами:

$$a_1 = \frac{\sum_1^N z_i \hat{y}_i^* - \frac{\sum_1^N z_i \sum_1^N \hat{y}_i^*}{N}}{\sum_1^N z_i^2 - \frac{\sum_1^N z_i \sum_1^N z_i}{N}}, \quad (1.75)$$

$$a_0 = \frac{\sum_1^N \hat{y}_i^*}{N} - \frac{a_1 \sum_1^N z_i}{N}. \quad (1.76)$$

- звідси отримують невідомі коефіцієнти:

$$A = e^{a_0}; B = a_1. \quad (1.77)$$

Зазначимо, що опис статичних стохастичних об'єктів з шифром  $0=(01\gamma\lambda)$  може бути виконано тільки ймовірнісним методом. Вихідна координата такого об'єкта може бути визначена тільки з певним ступенем ймовірності.

Крім того, динамічний детермінований об'єкт має шифр  $0=(10\gamma\lambda)$ . Вихідна змінна такого об'єкта залежить від стану його входу не тільки у миттєвий момент часу.

Водночас модель одновимірного лінійного безперервного об'єкта ( $\gamma=0, \lambda=0$ ) є звичайним диференціальним рівнянням, яке має вигляд:

$$A_m \frac{d^m y}{dt^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y =$$

$$B_l \frac{d^l x}{dt^l} + B_{l-1} \frac{d^{l-1} x}{dt^{l-1}} + \dots + B_1 \frac{dx}{dt} + B_0 x \quad (1.78)$$

Очевидно, що різницеvim аналогом даного диференціального рівняння є різницеве рівняння, що має вигляд:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_{m-1} y_{n-m+1} + a_m y_{n-m} =$$

$$b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_{l-1} x_{n-l+1} + b_l y_{n-l} \quad (1.79)$$

Переведення диференціального рівняння у його звичайно-різницевий аналог і навпаки можна здійснити, наприклад, за допомогою формул Ейлера. Тоді для перетворення маємо:

$$y = y_n; \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t}; \frac{d^2y}{dt^2} \approx \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta t^2}, \dots$$

Або у загальній формі:

$$\frac{d^m y}{dt^m} \approx (\Delta t)^{-m} \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v y_{n-v}, \quad (1.80)$$

де:

$\Delta t$  – крок дискретизації у часі.

Аналогічно:

$$\frac{d^l x}{dt^l} \approx (\Delta t)^{-l} \sum_{v=0}^l (-1)^v C_l^v y_{n-v}. \quad (1.81)$$

Для зворотного перетворення, тобто переходу від різницевого рівняння до початкового диференціального, на основі формул (1.80) і (1.81) можна записати такі формули:

$$y = y_n; y_{n-1} \approx -\Delta t \frac{dy}{dt} + y;$$

$$y_{n-2} \approx -\Delta t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2\Delta t \frac{dy}{dt} + y.$$

У загальній формі ці вирази можна записати таким чином:

$$\frac{d^l x}{dt^l} \approx (\Delta t)^{-l} \sum_{v=0}^l (-1)^v C_l^v y_{n-v}. \quad (1.82)$$

Аналогічно:

$$X_{n-l} = \sum_{v=0}^l (-\Delta t)^v C_l^v \left( \frac{d^v x}{dt} \right). \quad (1.83)$$

Коефіцієнти  $A_i$  і  $B_i$  з рівняння (1.78) і коефіцієнти  $a_i$ ,  $b_i$  рівняння (1.79) пов'язані таким чином:

$$A_i = (-\Delta t)^i \sum_{k=i}^m C_k^i a_k; \quad B_i = (-\Delta t)^i \sum_{k=i}^m C_k^i b_k. \quad (1.84)$$

На підставі формул (1.84) можна здійснити перехід від різницевого рівняння до (вихідного) диференціального.

Запишемо рівняння (1.79) у такому вигляді:

$$y_n = \frac{1}{a_0} [b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_{l-1} x_{n-l+1} + b_l x_{n-l} - a_1 y_{n-1} - \dots - a_{m-1} y_{n-m+1} - a_m y_{n-m}] \quad (1.85)$$

Перевівши змінні у формулі (1.85) отримаємо рівняння (1.52).

Для опису властивостей нелінійних об'єктів, поряд з диференціальними рівняннями, широко використовують *передавальні функції*. Під передавальними функціями розуміють відношення зображення (за Лапласом) вихідної величини до зображення (за Лапласом) вхідної величини за нульових початкових умов:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}, \quad (1.86)$$

де:

$p$  – комплексна змінна у перетворенні Лапласа.

Передавальні функції об'єкта, що описують звичайним диференціальним рівнянням (1.78), є раціональною функцією, яка має вигляд:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_1 p + A_0}{B_l p^l + B_{l-1} p^{l-1} + \dots + B_1 p + B_0}. \quad (1.87)$$

Диференціальне рівняння (1.79) і передавальну функцію (1.87) називають параметричною формою задання математичної моделі, оскільки при ідентифікації доводиться виявляти коефіцієнти (параметри)  $A_i$  і  $B_j$ .

Як непараметричну форму задання математичної моделі використовують такі характеристики, як реакція об'єкта ідентифікації на типові сигнали:

1. Реакція системи на *одиничне стрибкоподібне збудження*, яке називають перехідною характеристикою. Стрибкоподібне збудження (функція) має вигляд:

$$x(t) = A[1] = \begin{cases} A, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (1.88)$$

При  $A = 1$  функція називається одиничною:  $x(t) = 1(t)$ .

2. Реакцію системи на імпульсну або  $\delta$ -функцію називають імпульсною перехідною характеристикою або ваговою функцією. Імпульсну або  $\delta$ -функцію визначають виразом:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}; \quad \delta(t - \xi) = \begin{cases} \infty, & t = \xi \\ 0, & t \neq \xi \end{cases}. \quad (1.89)$$

Вона є похідною від одиничної функції  $1'(t)$

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (1.90)$$

і має властивість:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) dt = 1. \quad (1.91)$$

З формул (1.91) видно, що її площа дорівнює одиниці. Імпульсну функцію можна трактувати як межу прямокутного імпульсу, у якого висота направлена до нескінченності, а час його дії – до нуля.

Слід зауважити, що вагова і перехідна функції дозволяють оцінити тимчасові характеристики системи.

3. Важливими і поширеними критеріями для створення непараметричної математичної моделі лінійного (лінеаризованого) динамічного об'єкта ідентифікації є його амплітудна і фазова частотні характеристики:  $A(\omega)$  і  $\varphi(\omega)$ .

Під *амплітудною частотною характеристикою* розуміють залежність відносної амплітуди вихідного сигналу об'єкта від частоти  $\omega$  у режимі сталих гармонійних коливань.

Під *фазовою частотною характеристикою* розуміють зрушення за фазою вихідного сигналу щодо вхідного, залежно від частоти, у тому ж режимі.

Вхідний гармонійний сигнал можна представити у вигляді:

$$x = B \cos \omega t. \quad (1.92)$$

Тоді вихідний сигнал можна записати таким чином:

$$y = A \cos(\omega t + \varphi), \quad y = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]. \quad (1.93)$$

Опис властивостей одновимірних лінійних об'єктів ідентифікації у формі вагової функції і частотної характеристики є еквівалентними, і кожна з них дає вичерпну інформацію про статичні і динамічні властивості об'єкта.

При синтезі математичних моделей доводиться також вирішувати питання про те, на яких саме вхідних і вихідних змінних будуть ґрунтуватися моделі об'єктів ідентифікації. Для цього, перш за все, виявляють всі можливі змінні, які можуть бути входами і виходами об'єктів. На наступному етапі з них виділяють найважливіші. Водночас виникає питання, як оцінювати "вагу" змінних. Відповідь на це питання визначається цілями автоматизації: вагомими слід вважати ті змінні, які найсуттєвіше впливають на досягнення поставленої мети. Тому завдання розроблення математичної моделі тісно пов'язано з формуванням критеріїв оптимізації автоматизованого технологічного процесу.

### 1.11. Імпульсні реакції

Розглянемо систему зі скалярним вхідним сигналом (рис. 1.12).



Рис. 1.12. Загальний вигляд системи зі скалярним вхідним сигналом.

Вважають, що система *стаціонарна*, якщо форма, її реакції на довільний вхідний сигнал не залежить від вибору початку відліку часу. Вважають, що система *лінійна*, якщо її вихідна реакція на лінійну комбінацію вхідних сигналів співпадає з лінійною комбінацією вихідних реакцій на кожний окремий вхідний сигнал. Крім того, систему називають *причинно обумовленою*, якщо значення вихідного сигналу у довільний момент часу залежить від значень вхідного сигналу у попередні моменти часу (до даного моменту включно).

Відомо, що лінійна, стаціонарна, причинно-обумовлена

система може бути описана імпульсною реакцією (або ваговою функцією)  $h(\tau)$  [24]:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t)u(t - \tau)d\tau \quad (1.94)$$

Знаючи  $\{h(\tau)\}_{\tau=0}^{\infty}$  і  $u(s)$  для  $s \leq t$  можна провести послідовний розрахунок вихідного сигналу  $y(t)$  ( $s \leq t$ ) для будь-якого вхідного сигналу. Отже, імпульсна реакція повністю визначає поведінку системи.

Як наслідок типового підходу до збирання інформації проводять спостереження вхідних і вихідних сигналів у дискретні моменти часу. Таким чином можна передбачити, що  $y(t)$  спостерігатимуть у вибіркові моменти часу:  $t_k - kT$ , ( $k=1, 2, \dots$ ):

$$y(kt) = \int_0^{\infty} h(t)u(kt - \tau)d\tau \quad (1.95)$$

Інтервал ( $T$ ) будемо називати *вибірковим інтервалом*. Можна також розглядати випадки нерівномірно розміщених моментів вибірових вимірювань.

У комп'ютеризованих системах керування вхідний сигнал  $u(t)$  у більшості випадків постійний у інтервалі між вибірковими моментами часу:

$$u(t) = u_k, kT \leq t < (k + 1)T \quad (1.96)$$

Ця обставина спрощує аналіз системи, позаяк в основному перебіг процесів зумовлений чисто практичними міркуваннями. Підставляючи (1.96) у (1.95) отримаємо:



$$y(kt) = \int_0^{\infty} h(t)u(kt - \tau)d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^{iT} h(t)u(kT - \tau)d\tau =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{(i-1)T}^{iT} h(t)d\tau \right) u_{k-1} = \sum_{i=1}^{\infty} h_T(i)u_{k-1}, \quad (1.97)$$

де:

$$h_T(i) = \int_{(i-1)T}^{iT} h(t)d\tau \quad (1.98)$$

Співвідношення (1.97) дозволяє визначити значення вихідного сигналу у вибіркові моменти часу. Характерно, що для вхідних сигналів, які задовольняють умову (1.96), співвідношення (1.97) є точним, і для розрахунку відгуку на вхідний сигнал достатньо знати послідовність:  $\{h_T(i)\}_{i=1}^{\infty}$ . Співвідношення (1.97) описує систему з *дискретними* або *вибірковими спостереженнями*. У цьому випадку послідовність:  $\{g_T(i)\}_{i=1}^{\infty}$  будемо називати імпульсною реакцією цієї системи.

Якщо вхідний сигнал не є постійним і не задовольняє умову (1.96), запис (1.97) може бути використано у вигляді апроксимації при умові, що зміни у вибіркового інтервалі не є значними.

До позначень з формул (1.96) - (1.98) звертаються лише у тих випадках, коли є суттєвим вибір початку відліку і величина інтервалу ( $T$ ). Однак, у більшості випадків позначення можна спростити, враховуючи, що величина ( $T$ ) дорівнює одиниці. При цьому для нумерації дискретних моментів часу використовують індекс  $t$ . Тоді, формула (1.97) матиме вигляд:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)u(t - k), t = 0,1,2,\dots \quad (1.99)$$

## 1.12. Моделювання давачів та перетворювачів вимірювальних каналів

Під час моделювання елементів вимірювальних каналів автоматичних інформаційних та керуючих систем важливе значення має отримання адекватної математичної моделі чутливих елементів первинного вимірювального перетворювача і давача у цілому, тому що вони здійснюють перетворення вимірювальних фізичних величин у вимірювальний сигнал, тобто фізичне перетворення. Більшість давачів вимірювальних каналів автоматичних систем мають на виході електричний сигнал, а наступні перетворювачі виконують масштабні перетворення вимірювальних сигналів, які неважко реалізувати за наявності обчислювальної техніки і відповідних алгоритмів з прийнятими похибками або взагалі без похибок. Основні похибки з'являються під час моделювання давачів та їх елементів або безпосередньо пов'язаних з ними наступних перетворювачів, які часто містять давачі.

Сучасні технології характеризуються різноманітними параметрами, які мають різну фізичну і хімічну природу. Вказані параметри відображають у більшості випадків, неелектричні процеси (механічні, теплові, хімічні та ін.). Інформацію про миттєві значення технологічних параметрів отримують за допомогою давачів, чутливі елементи яких взаємодіють із зовнішнім середовищем. Реакції взаємодії перетворюють у придатні для подальшого оброблення сигнали. Як правило, такі сигнали є електричними (напруга, струм, частота та ін.).

У загальному вигляді давач можна розглядати як перетворювач енергії, у якому певна вхідна величина ( $x$ ) (технологічний параметр) перетворюється у вихідний сигнал ( $y$ ) (як правило, електричний, а іноді – пневматичний, гідравлічний або сигнал іншої фізичної природи). Зв'язок між цими величинами у *статичному* режимі можна описати за допомогою формули:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (1.100)$$

де:

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  – коефіцієнти градуїрованої характеристики.

До статичної характеристики перетворювача чи вимірювального каналу ставлять основну вимогу, щоб залежність між вхідною величиною і вихідним сигналом була якомога ближчою до лінійної, хоча у практичних умовах ця вимога не завжди реалізується і вихідний сигнал ( $y$ ) приймає вигляд (1.100). У ідеальному випадку усі коефіцієнти рівняння (1.100), крім коефіцієнта  $a_1$ , дорівнюють нулю і статична характеристика має вигляд прямої:  $y = a_1 x$ , яка проходить через початок координат під кутом, тангенс якого дорівнює  $a_1$ .

У динамічному режимі залежність “вхід-вихід” вимірювального перетворювача або каналу від інерційних властивостей ланок може бути описана диференціальним рівнянням:

$$ax(t) = by(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + b_{n-1} \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad (1.101)$$

де:

$b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  – коефіцієнти, які залежать від внутрішніх властивостей (інерційності, пружності, тертя та ін.) перетворювальних ланок;

$a$  – коефіцієнт, який залежить від зовнішніх чинників і коефіцієнта підсилення.

Контрольований параметр, залежно від перебігу технологічного процесу (або з інших причин), може мати сталий характер або змінюватись у часі. Це стосується не лише механічних величин (сили, швидкості, прискорення та ін.), але й таких як температура, освітленість, концентрація та ін. Якщо вхідна величина  $x(t)$  є функцією часу, то й вихідний сигнал  $y(t)$  також буде змінюватись з плином часу.

Перетворення енергії здавачем можна здійснювати двома способами:

1. Енергія вхідної величини ( $x$ ) безпосередньо перетворюється у енергію вихідного сигналу ( $y$ ). На цьому принципі працюють *енергетичні* або *генераторні* давачі.

*Наприклад.* Термопара є генератором термо-ЕРС. Величина цієї ЕРС функціонально пов'язана з температурою робочого і вільного кінців термопари, що є інформативним параметром температурного поля, яке вимірюють.

Водночас зауважимо, що у генераторних давачах використовують термо-, п'єзо- фотоелектричний, електромагнітний та інші ефекти.

2. Вхідна величина ( $x$ ) забезпечує лише керування передачею енергії від деякого додаткового джерела енергії до вихідного сигналу ( $y$ ). Таке керування здійснюють у результаті зміни таких параметрів електричного ланцюга, як активний, індуктивний чи ємнісний опір, або ж їхніх комбінацій. Такі давачі називають *параметричними*, тому що вони під впливом досліджуваної величини змінюють свій параметр (прикладом такого давача може бути терморезистор). Отже, застосовуючи принцип керування потоком енергії, можна змоделювати резистивні, індуктивні, ємнісні, фоторезистивні, магнітопружні, радіоактивні та інші давачі.

Усі давачі можна поділити на дві групи: енергетичну і параметричну. З іншого боку, їх можна також класифікувати за виглядом вхідного сигналу або вхідної величини.

Щоб отримати вихідний сигнал параметричного давача, у відповідний електричний ланцюг подають зондуючий або випробувальний сигнал, яким може бути електрична напруга постійного або змінного струму, електромагнітні хвилі широкого частотного діапазону або електричні імпульси різної форми.

Якщо зондуючий сигнал має гармонійну форму:  $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , тоді його можна охарактеризувати амплітудою ( $U_m$ ), початковою фазою ( $\varphi$ ) і частотою ( $\omega$ ). Кожний з цих параметрів після перебігу сигналу через електричне коло давача стає функцією вимірювального параметра ( $x$ ). Інформацію, що вимірюється, про технологічний

параметр можна отримати, аналізуючи значення амплітуди, фази або частоти вихідного сигналу давача. Параметр сигналу, який надає інформацію про технологічний параметр є інформативним. Інші параметри сигналу не є інформативними. Водночас вони впливають на давач, створюючи завади. Якщо використати як зонduючий сигнал постійну напругу ( $w=0, \varphi=0$ ), інформацією, яку вимірюють, буде значення напруги на виході давача. При імпульсній формі зонduючого сигналу інформативними може бути тривалість імпульсу або інші параметри.

У багатьох випадках при ( $x=0$ ) інформативний параметр сигналу не перетворюється у нуль, тому вихідний сигнал первинного вимірювального перетворювача при гармонійному вхідному сигналі можна описати виразом:

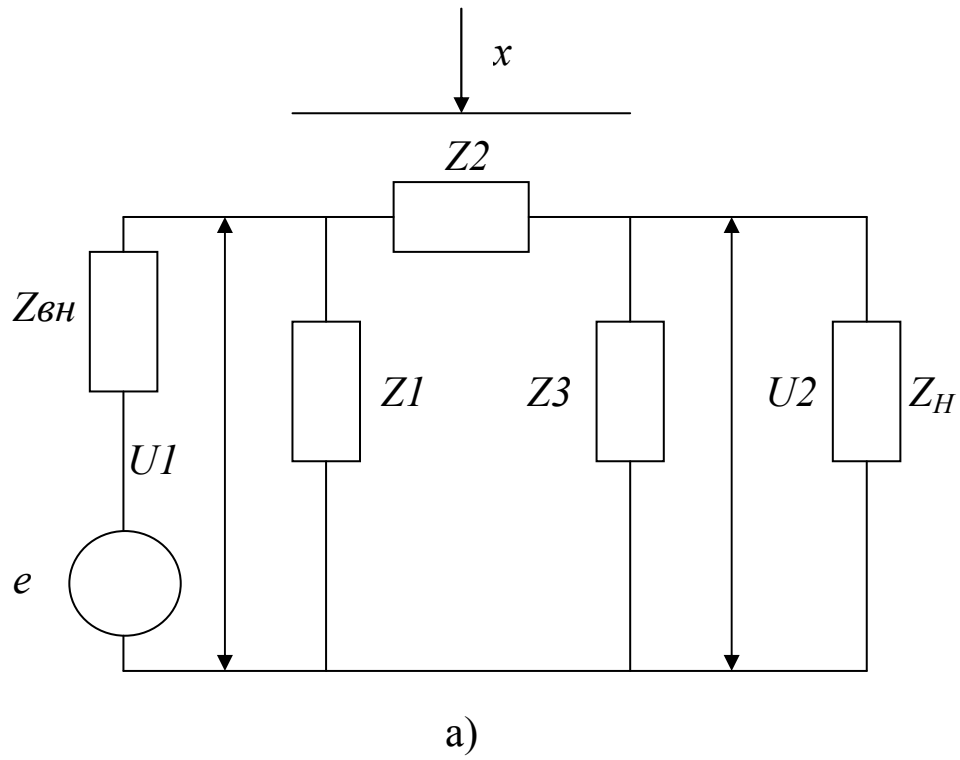
$$U(t) = [U_n + \Delta U(x)] \cos \{ [w_n + \Delta w(x)]t + \Delta \varphi(x) + \varphi_n \},$$

де:

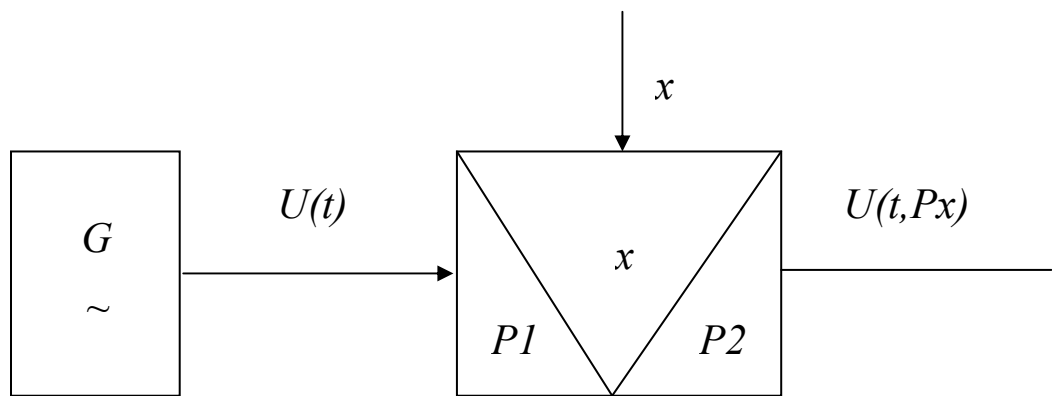
$U_n, w_n, \varphi_n$  – початкові значення параметрів сигналу;

$\Delta U(x), \Delta w(x), \Delta \varphi(x)$  – інформативні зміни параметрів.

Інформація на виході може міститися у абсолютних або відносних змінах амплітуди, фази або частоти вихідного сигналу первинного вимірювального перетворювача. При зміні технологічних параметрів у часі (тобто, при динамічному вимірюванні) інформативні параметри вихідних сигналів первинного вимірювального перетворювача є змінними величинами і вимірювальні сигнали набувають форми амплітудно-модульованих, фазо-модульованих або частотно-модульованих коливань. Більшість давачів можна віднести до групи параметричних модуляторів (рис. 1.13), які, у загальному випадку, є чотиріполюсником з П- або Т-подібною схемою заміщення, узагальнені параметри якої  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  змінюються під впливом величини ( $x$ ).



a)



б)

Рис. 1.13. Схема параметричного давача:  
 а) схема заміщення керованим чотириполіусником;  
 б) структурна схема.

Коли давач працює в режимі параметричного модулятора, тоді у результаті дії вимірюваної величини ( $x$ ) змінюється комплексний коефіцієнт передачі чотириполосника, який визначається коефіцієнтом  $k(j\omega)$ . Якщо навантаження давача невелике, тобто  $Z_p \rightarrow \infty$ , тоді:

$$k_0 = [k_n + \Delta k(x)] \exp j[\Delta \varphi(x) + \varphi_n],$$

де:

$k_n, \varphi_n$  – початкові значення модуля і фази коефіцієнта передачі;

$\Delta k(x), \Delta \varphi(x)$  – інформативні зміни.

Ці величини визначають узагальненими опорами чотириполосника та їх чутливістю до контрольованого технологічного параметра. У цьому випадку електричне коло параметричного давача можна представити у вигляді двополосника з комплексним опором:

$$Z = Z_n + \Delta Z(x),$$

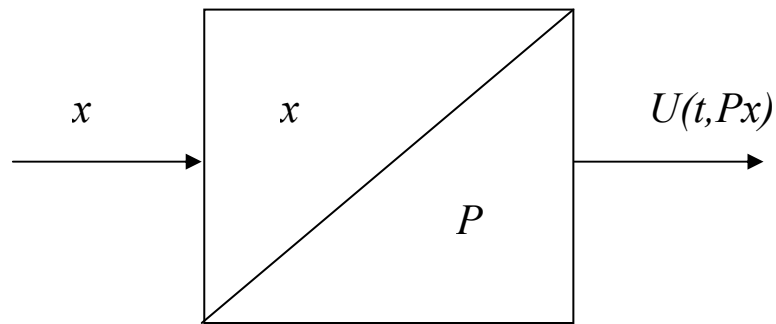
де:

$Z_n$  – початковий опір;

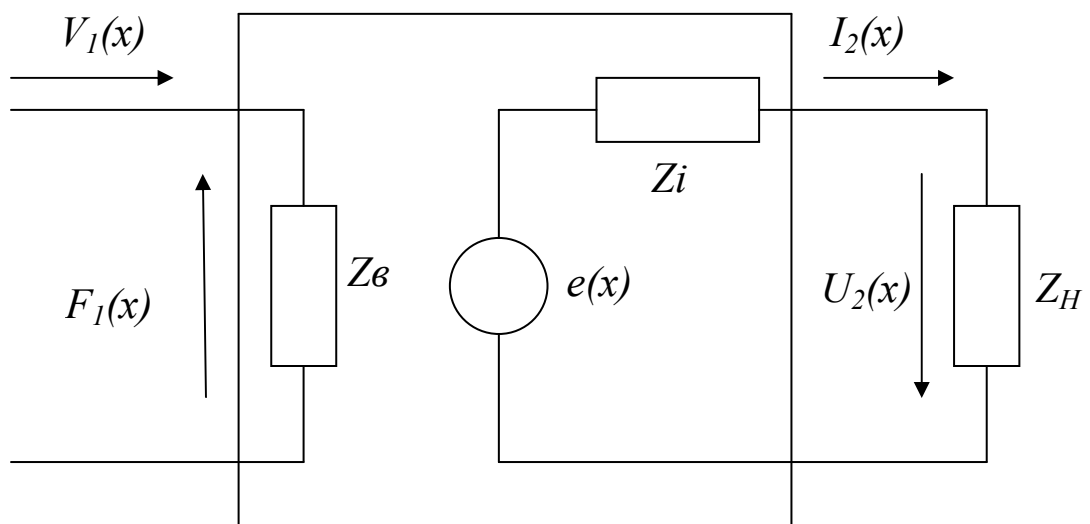
$\Delta Z(x)$  – інформативна зміна опору.

Властивості перетворення параметричних давачів також суттєво залежать від внутрішнього опору навантаження давача  $Z_n$ . У цьому випадку коефіцієнт передачі давача  $k(j\omega)$  можна обчислити аналітично, використовуючи результати експериментальних досліджень давача.

Крім того, параметричний давач зображають модулятором (рис. 1.14, а), який живиться від генератора змінного чи постійного струму. Генераторні давачі на виході характеризуються внутрішньою ЕРС  $e(x)$ , яка є функцією вимірюваного технологічного параметра ( $x$ ) (рис. 1.14, б).



а)



б)

Рис. 1.14. Схема генераторного давача:

а) структурна схема;

б) схема заміщення енергетичним чотириполіусником із входами різної фізичної природи.

Цей параметр у більшості випадків має неелектричну фізичну природу, тому на вході чотириполіусника його можна вважати за узагальнену силу ( $F$ ) або узагальнену швидкість ( $V$ ),



які будуть еквівалентними вхідній напрузі й струму електричного чотириполюсника. Опис генераторного давача в узагальнюючих координатах (сили і швидкості) можна здійснити за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду, що дає можливість представити такий давач у вигляді узагальненої енергетичної моделі. Така модель ґрунтується на системі з двох рівнянь, які уособлюють два канали зв'язку об'єкта з навколишнім середовищем, причому параметрами каналів будуть імпеданси різної фізичної природи.

## **Розділ 2. Основні поняття теорії моделювання систем**

Моделювання у різних галузях технології – це метод дослідження хімічних, фізичних, механічних, теплових, технологічних чи інших процесів або систем шляхом побудови та дослідження їх моделей. Моделі процесів чи систем відрізняються від моделей об'єктів масштабами або фізичною природою явищ, що відбуваються у них. Водночас для достатньо точного (адекватного) відображення явищ і процесів, які відбуваються у об'єктах чи системах під впливом зовнішнього середовища, необхідно мати апріорні відомості про властивості об'єктів моделювання [25].

### **2.1. Види моделювання складних об'єктів і систем**

Моделювання використовують для вирішення різноманітних завдань, найважливішими з яких є [26]:

- дослідження нових процесів;
- проектування виробництва;
- оптимізація окремих апаратів і технологічних схем;
- виявлення резервів потужності і пошук найефективніших шляхів модернізації діючого виробництва;
- моделювання планування виробництва;
- розроблення автоматизованих систем керування виробничими системами, які проектуються;
- побудова автоматизованих систем наукових досліджень.

Процеси моделювання ґрунтуються на аналізі і синтезі властивостей подібних за фізичною природою об'єктів. При цьому моделювання поділяють на фізичне і математичне.

#### **2.1.1. Фізичне моделювання**

Метод зводиться зазвичай до створення і дослідження моделей, які відрізняються від об'єкта моделювання масштабами (наприклад, лабораторне і промислове моделювання). Фізичне моделювання ґрунтується на теорії подібності та у встановленні і аналізуванні закономірностей

поведінки розробленої моделі у наперед заданих критичних умовах впливу зовнішнього середовища.

Необхідною умовою фізичного моделювання є рівність у об'єкті і його моделі критеріїв подібності. Зазначимо, що критеріями або факторами подібності у цьому випадку є певні безрозмірні комбінації різноманітних фізичних величин, які впливають на параметри об'єкта і моделі. На практиці забезпечити вказану умову рівності декількох критеріїв подібності надзвичайно важко, якщо тільки не будувати модель тотожною до об'єкта моделювання. Тому, часто використовують наближене фізичне моделювання, при якому другорядні процеси, що відбуваються у об'єкті не моделюють зовсім або моделюють наближено.

***Приклад.** Масообмінну колону моделюють лабораторною колонкою. При цьому подібність гідродинамічних процесів, перебіг яких у об'єкті і фізичній моделі не є ідентичним, ігнорують. У цьому випадку моделюють і, на подальших етапах ідентифікації, аналізують лише роздільну здатність апарату, яка визначається термодинамічними закономірностями міжфазової рівноваги системи за різних режимів експлуатації досліджуваного об'єкта.*

Позитивними аспектами у фізичному моделюванні є:

- можливість вивчення об'єктів з меншими витратами (сировини, енергії, часу);
- можливість дослідження об'єктів, у яких перебіг фізичних і хімічних процесів під впливом різноманітних факторів зовнішнього середовища не достатньо вивчений;
- можливість проведення на моделі випробувань, які є надто складними і громіздкими у реальних умовах.

Водночас недоліками методу фізичного моделювання є:

- можливість прояву власних властивостей моделі внаслідок невідповідності критеріїв подібності об'єкта і моделі (наприклад, різні режими технологічного процесу приготування композиції);

- необхідність застосування аналогічних контрольно-вимірювальних приладів на моделі і об'єкті;
- відносна складність побудови фізичної моделі, що зазвичай є значно зменшеною копією об'єкта;
- складність достовірної екстраполяції результатів, отриманих на моделі, безпосередньо до самого об'єкта, що зумовлено відсутністю надійних критеріїв достовірності масштабного перенесення.

Не дивлячись на перераховані вище недоліки, фізичне моделювання часто є єдиним засобом дослідження хіміко-технологічних процесів (особливо мало вивчених). При цьому фізичне моделювання, у багатьох випадках, є початковим етапом математичного моделювання. Показано, що результати експериментальних досліджень, проведених на фізичних моделях, складають апріорну інформацію про об'єкт. Така інформація, у свою чергу, є основою для побудови і перевірки функціонування математичних моделей [27].

### **2.1.2. Математичне моделювання**

Метод зводить дослідження властивостей об'єкта до вивчення властивостей математичної моделі, яка, у свою чергу, є системою математичних рівнянь, що відображає, у вигляді математичного опису, поведінку об'єкта моделювання. Математична модель дозволяє прогнозувати поведінку об'єкта в умовах впливу зовнішнього середовища, критерії впливу якого на об'єкт є змінними. Аналогом експерименту на моделі при фізичному моделюванні у даному випадку (при математичному моделюванні) є математичний експеримент, який, як правило, проводять з використанням програмного забезпечення.

Залежно від мети ідентифікації і початкової (апріорної) інформації про об'єкт моделювання та умов його функціонування застосовують різні за формою і структурою математичні описи моделі. До найпоширеніших видів моделей відносять стохастичні, статистичні і детерміновані.

*Стохастичні моделі.* Стохастичні моделі будують на основі ймовірнісних уявлень про перебіг фізичних і хімічних процесів у об'єкті моделювання. Такі моделі дозволяють прогнозувати поведінку об'єкта моделювання шляхом обчислення функцій розподілу ймовірностей для змінних, які характеризують досліджувані властивості (при заданих функціях розподілу ймовірностей вхідних змінних і випадкових збурень).

Одним з основних напрямків застосування стохастичних моделей є моделювання складних систем (складних агрегатів, технологічних процесів, виробничих систем, підприємств та ін.). Стохастичні моделі використовують також для:

- аналізу функціонування об'єктів в умовах випадкових збурень;
- вирішення складних завдань календарного планування роботи підприємства;
- дослідження можливих наслідків непередбачуваних аварійних відмов технологічного устаткування;
- виявлення найефективніших схем резервування для підвищення надійності функціонування систем;
- моделювання виробництва у цілому і т.д.

*Статистичні моделі.* Статистичні моделі будують на основі аналізу експериментальних даних, отриманих на діючому об'єкті (в умовах впливу на нього випадкових збурень). Такі системи є системами співвідношення, які пов'язують значення вихідних і вхідних змінних об'єкта. Структуру цих співвідношень зазвичай задають апіорі, і визначенню підлягають лише значення деяких попередньо вибраних параметрів у прийнятих залежностях. Найчастіше використовують залежність, що задається у формі полінома з показником степеня, який не є більшим від 2.

При визначенні параметрів цих моделей необхідно використовувати апарат математичної статистики, оскільки на результати експериментів і вимірювань, як правило, накладаються випадкові помилки, завади, а також впливають невраховані на попередніх етапах ідентифікації фактори [28].

У випадку побудови статистичних моделей на основі апріорної інформації, яку отримано на основі пасивного експерименту, параметри моделей, що розраховують, виявляються, як правило, статистично залежними, тобто корельованими. Зазначимо, що під час пасивного експерименту реєстрація значень вхідних і вихідних змінних здійснюють без будь-якого втручання експериментатора у процес поведінки об'єкта під впливом керованих чи некерованих (випадкових) факторів. Це значно ускладнює точну інтерпретацію отриманих результатів експериментів і обмежує можливості моделі у подальшому прогнозуванні. Надійніші дані моделювання можливо отримати у випадку планомірного варіювання вхідними змінними у необхідних межах шляхом застосування апостеріорної інформації про об'єкт. У такому випадку будують ортогональні моделі, тобто такі, що забезпечують статистичну незалежність вихідних параметрів моделей.

Етапи загальної процедури побудови будь-якої статистичної моделі:

- 1) розрахунок параметрів моделі;
- 2) перевірка значущості знайдених значень параметрів;
- 3) перевірка адекватності отриманої моделі до об'єкта.

Для перевірки значущості параметрів і адекватності моделі зазвичай використовують статистичні критерії перевірки гіпотез. Якщо будь-який параметр моделі при перевірці виявляється незначущим, то його значення у рівняннях моделі прирівнюють до нуля, що приводить до відповідного спрощення моделі.

Адекватність математичної моделі об'єкта, що вивчається, перевіряють шляхом порівняння експериментальних даних, отриманих після аналізу результатів поведінки об'єкта, і результатів моделювання із залученням методів статистичної перевірки гіпотез. Як критерії адекватності найчастіше використовують квадратичні вирази, що характеризують відхилення експериментальних даних від розрахункових.

Числове значення критерію адекватності ще не дає можливості зробити будь-який висновок про адекватність моделі. Адекватність моделі повинна бути обов'язково перевірена і узгоджена зі всіма статистичними оцінками

вимірювань на об'єкті моделювання. Якщо у результаті перевірки адекватності модель виявляється неадекватною, це означає, що:

- деякі значущі вхідні змінні не були враховані, як фактори, на початковому етапі побудови моделі;
- точність експериментальних результатів дослідження не є достатньою для встановлення отриманих залежностей.

Позитивним аспектами статистичних моделей є:

- можливість застосування статистичних моделей до об'єктів, у яких відбуваються фізичні і хімічні процеси, механізм перебігу яких не є відомим;
- можливість моделювання складних систем, детальний аналіз і проектування яких викликає значні труднощі.

Недоліками статистичних моделей є:

- складність узагальнення отриманих результатів дослідження, що може зустрічатися навіть при вивченні однотипних об'єктів;
- неможливість обґрунтованої екстраполяції властивостей моделі за межами дослідженої області зміни вхідних змінних;
- складність побудови таких моделей для нестационарних об'єктів з великим часовим запізненням реакції на вхідні збурення.

Одним з основних напрямків застосування статистичних моделей є планування оптимальних умов проведення експериментів і аналіз та опис функціонування окремих апаратів або ділянок виробництва для вирішення складних завдань керування і оптимізації.

*Детерміновані моделі.* Детерміновані моделі будують на основі математично виражених закономірностей, що описують перебіг фізичних і хімічних процесів у об'єкті моделювання. Такі моделі дозволяють однозначно знаходити значення змінних, які характеризують найважливіші властивості об'єкта [29-31]. Причому використання детермінованих моделей забезпечує адекватність їх побудови стосовно властивостей

об'єкта незалежно від сукупності значень вхідних змінних і конструктивних параметрів об'єктів моделювання. Зазначимо, що такі моделі є основою для вирішення завдань *масштабного переходу*. Для аналізу і синтезу результатів експериментів з детермінованими моделями реальних об'єктів, як правило, необхідно використовувати програмне забезпечення. При цьому особливу увагу приділяють розробленню ефективних алгоритмів вирішення системи рівнянь математичного опису поведінки реального об'єкта.

Для більшості хімічних і фізичних явищ характерна наявність перебігу процесів міжфазової взаємодії при структуроутворенні матеріалів. У цьому випадку можливі хімічні перетворення у об'ємі самого матеріалу. Тому такі детерміновані математичні моделі, як правило, ґрунтуються на результатах аналізу балансу мас і енергії на різних етапах структуроутворення матеріалів, що обчислюють з урахуванням їх кінетичної, гідро- і термодинамічної структури.

Рівняння гідродинаміки реальних процесів у об'єктах ідентифікації, як правило, надзвичайно складні і мають великий діапазон зміни граничних умов (наприклад, рівняння Нав'є - Стокса). Це приводить до необхідності використовувати у математичних моделях гетерогенних систем спрощені описи процесів гідродинаміки чи термодинаміки. Таким чином будують ідеалізовані математичні моделі. Це зокрема, моделі ідеального змішування, ідеального витіснення і проміжна або дифузійна модель, які, у більшості випадків, є максимально близькими до реальних умов моделювання.

У тих випадках, коли й дифузійна модель не завжди буває адекватною, використовують складні комбіновані моделі, які визначають структуру об'єкта ідентифікації як поєднання вказаних ідеалізованих моделей. За наявності у системах, зокрема гетерогенних (тобто таких, що містять декілька фаз), різних видів взаємодії (йонної, ковалентної, адсорбційної, хемосорбційної та ін.), для кожної фази зазвичай записують свої рівняння гідро- чи термодинаміки.

При цьому основою рівнянь балансів мас і енергії, які записані з урахуванням прийнятих гідро- чи термодинамічних моделей системи, є фактори джерел зміни енергії у системі.



Вага вказаних факторів (або їх коефіцієнти у прийнятих математичних моделях) визначається інтенсивністю перебігу фізико-хімічних процесів на межі поділу фаз при структуроутворенні об'єкта моделювання. Тому в основу математичних моделей також вводять рівняння, що описують швидкість перебігу, ентропію, ентальпію хімічних реакцій, масо-, теплообміну та ін.

Крім того, математична модель містить теоретичні, напівемпіричні або емпіричні співвідношення, які характеризують різноманітні залежності (наприклад, залежність теплоємності чи швидкості міжфазової взаємодії від природи введеної у рідку фазу твердої речовини або залежність властивостей гетерогенного матеріалу від температурно-часових режимів його структуроутворення і т.д.) [32-35].

При побудові детермінованої моделі важливе значення має оптимальне поєднання необхідної складності моделі з допустимими спрощеннями. Надто складна математична модель, що враховує множини, можливо, другорядних факторів і явищ, може виявитися неприйнятною, внаслідок необхідності виконання величезного об'єму обчислень при розв'язуванні рівнянь. Навпаки, дуже спрощена математична модель може призвести до принципово неправильних висновків про властивості об'єкта моделювання.

*Алгоритм обчислення системи рівнянь математичної моделі реалізує можливість проведення експериментальних обчислень коефіцієнтів для критеріїв моделі. Алгоритм обчислення суттєво залежить від виду рівнянь, які і є складовими моделі. Вид рівнянь, у свою чергу, визначається прийнятими початковими припущеннями і завданнями експериментальних обчислень.*

Прийнято розрізняти стаціонарні і нестаціонарні моделі, у яких параметри не змінюються або змінюються з часом відповідно. Крім того, прийнято розрізняти моделі з розподіленими і зосередженими параметрами, які змінюються або не змінюються у просторі. Основу математичного опису стаціонарних моделей із зосередженими параметрами складають системи, у яких відсутні диференціальні рівняння,

оскільки змінні моделі не залежать від просторових координат і часу. Звичайні диференціальні рівняння використовують у моделях для опису нестационарних режимів у об'єктах, які містять зосереджені параметри. Крім того, такі рівняння використовують для опису стаціонарних режимів у об'єктах з параметрами, розподіленими тільки по одній координаті. Це відповідає залежності змінних моделі від однієї просторової координати або від часу.

Для математичного опису різноманітних нестационарних режимів об'єктів моделювання, що характеризуються розподіленими параметрами, а також стаціонарних режимів, що розподілені більше, ніж за однією координатою, як правило, застосовують диференціальні рівняння з частковими похідними. У останніх шукані змінні є функціями нескінченно незалежних змінних, що і визначає можливість застосування цих рівнянь для об'єктів даного класу.

Методи прикладної математики дозволяють вирішувати широке коло завдань для експериментальних обчислень. За допомогою цих методів для будь-якого завдання складають алгоритм його обчислення – поетапна конкретизація моделі, яка і визначає послідовність операцій, що дозволяють з початкових даних отримати шуканий результат. При побудові конкретного алгоритму, як правило, спочатку аналізують, а у подальшому використовують особливості вирішуваної задачі для створення ефективних (зазвичай ітераційних) схем обчислення. У таких ітераційних схемах загальні методи застосовують для вирішення підзадач окремих етапів загального алгоритму.

***Приклад.** При побудові достатньо складної детермінованої математичної моделі масообмінної колони для формування багатоконпонентної суміші використовують математичний опис, який враховує:*

- *рівняння матеріальних балансів компонентів суміші для всіх ємкостей колони, нагрівника і конденсатора;*
- *рівняння теплових балансів для тих же елементів;*
- *рівняння, що визначають кінетичну активність інгредієнтів суміші;*

- *опис умов паро-рідинної рівноваги;*
- *співвідношення для розрахунку ентальпії потоків рідини і пари.*

У загальному випадку розв'язання повної системи рівнянь математичної моделі зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь високого порядку щодо невідомих значень змінних (наприклад, концентрації і природи компонентів, тиску пари, температури рідини і т.д.). Вибір алгоритму розв'язання задачі обумовлює вибір програмного забезпечення, необхідного для реалізації алгоритму. Разом з тим, для даної системи рівнянь математичної моделі можна запропонувати достатньо ефективні алгоритми, що зводять розв'язання цієї нелінійної системи до звичайної ітераційної схеми. Така поетапна конкретизація моделі, що приводить до зменшення кількості факторів і оптимізації діапазону їх зміни, суттєво зменшує об'єм математичних обчислень з використанням програмного забезпечення.

### **2.1.3. Ідентифікація моделей**

При недостатній адекватності апріорно побудованої математичної моделі вирішується завдання її ідентифікації, тобто уточнення заданих на початковому етапі наближених значень параметрів і, можливо, деяких залежностей, врахованих у складному математичному описі [36]. У попередньому розділі було показано, що спектр методів ідентифікації математичних моделей є дуже широким і різноманітним, тому вибір оптимального з них у кожному конкретному випадку визначається об'єктом моделювання, а також ресурсами, що є у розпорядженні суб'єкта ідентифікації. Зауважимо, що при виборі метода ідентифікації враховують можливість:

- постановки на фізичних моделях необхідних експериментів з прогнозованою точністю, які не можливо реалізувати з різних причин на самому об'єкті дослідження;

- використання для корекції результатів дослідів, отриманих на об'єкті моделювання при перевірці адекватності моделі.

Завдання ідентифікації моделі зазвичай зводиться до завдання мінімізації критерію адекватності об'єкта шляхом підбору відповідних значень уточнюючих параметрів і виду сумнівних залежностей. При цьому вирішення задачі мінімізації прийнятого критерію адекватності, що розглядається як функція параметрів математичної моделі, як правило, є достатньо складною проблемою.

У цьому плані одним з основних напрямків застосування детермінованих моделей є:

- моделювання і оптимізація діючих апаратів та виробничих систем;
- проектування нових виробничих систем і підприємств;
- розроблення систем автоматизованого керування апаратами і технологічними процесами;
- автоматизація наукового експерименту.

При моделюванні і оптимізації діючих виробничих систем і підприємств зазвичай, перш за все, вирішують завдання побудови, у достатній мірі, адекватної математичної моделі об'єкта дослідження. З цією метою максимально використовують експериментальні результати дослідження, що отримують попередньо на діючих установках при їх нормальній експлуатації (ап'юрна інформація). Особливо важливою є ап'юрна інформація про зміну поведінки об'єкта ідентифікації внаслідок відхилень умов експлуатації від регламентованого технологічного режиму. Ідентифікацію математичних моделей, як правило, здійснюють шляхом мінімізації відповідного критерію адекватності. Подальше прийняття оптимальних рішень для модельованого процесу проводять, використовуючи методи оптимізації. Застосування детермінованих математичних моделей при проектуванні нових виробничих систем є ефективним за наявності, у достатній мірі, адекватних моделей вхідних факторів, під якими розуміють основні етапи технологічних процесів. При цьому (формально і, водночас, з точки зору математичних рішень) завдання

проектування еквівалентне завданню ідентифікації математичної моделі, яке полягає у мінімізації критерію адекватності. Відмінність полягає у тому, що при ідентифікації математичної моделі уточнюють кількість і діапазон зміни вхідних критеріїв з метою зменшення кількості похибок експерименту і, як наслідок, попереджують відхилення результатів моделювання від заданих проектних показників. У випадку, коли математичні моделі проєктованих об'єктів не є адекватними, тоді для їх отримання необхідно провести додаткові експериментальні дослідження.

Отже, розроблення систем автоматизованого керування, як і проектування, вимагає побудову адекватних математичних моделей (не обов'язково детермінованих). Зазвичай розглядають два аспекти цього завдання:

- синтез структури системи автоматизованого керування;
- визначення параметрів її регулювання залежно від умов експлуатації.

У складі систем автоматизованого керування засобів програмного забезпечення для вироблення стратегії керування часто застосовують математичні моделі технологічних процесів. Водночас для підвищення точності систем автоматизованого керування використовують адаптивні моделі, параметри яких налаштовують за заданим критерієм адекватності під час експлуатації системи. При цьому основним завданням автоматизації є те, що фізичні і математичні моделі, по суті, об'єднуються у одну глобальну модель, цільове призначення якої – достатньо адекватно відтворювати перебіг досліджуваних процесів у об'єкті ідентифікації з мінімальними затратами сировини, енергії і часу.

## **2.2. Моделювання систем керування**

Моделювання (у широкому змісті) є основним методом дослідження в усіх областях знань і науково-обґрунтованим методом оцінювання характеристик складних систем, які використовують для прийняття рішень у різноманітних сферах

інженерної діяльності. Існуючі системи, а також такі, що проектують, можна ефективно досліджувати за допомогою математичних моделей (аналітичних та імітаційних). Такі моделі будують і реалізують з використанням сучасного програмного забезпечення, яке, у цьому випадку, є інструментом експериментатора для вдосконалення моделі.

Вироблення методології моделювання направлене на отримання, упорядкування та оброблення інформації про об'єкти, які існують поза нашою свідомістю і взаємодіють між собою та із зовнішнім середовищем.

У наукових дослідженнях велике значення мають гіпотези, що ґрунтуються на невеликій кількості дослідних даних, спостережень, припущень. Швидка і достовірна перевірка гіпотез може бути проведена у процесі поставленого експерименту. При формулюванні і перевірці правильності гіпотез велике значення має аналогія.

### **2.2.1. Підходи до дослідження систем**

У сучасній теорії керування використовують моделі двох основних видів. Для технологічних об'єктів такий поділ відповідає “феноменологічним” і “дедуктивним” моделям [37].

Під феноменологічними моделями будемо розуміти емпіричні залежності виходів ( $Y$ ) від входів ( $X$ ), причому кількість як факторів, так і властивостей об'єкта, що оцінюють, є невеликою. Такі моделі не описують структурні характеристики об'єкта і не з'ясовують основні закономірності перебігу фізичних та хімічних процесів у межах системи. До класу феноменологічних моделей належать моделі математичної статистики.

Під дедуктивними моделями будемо розуміти систему фізичних та математичних закономірностей, які описують механізми взаємодії усіх складових об'єкта чи досліджуваного процесу в умовах впливу зовнішнього середовища. Такі моделі ґрунтуються на вивченні структури досліджуваного об'єкта, а також на встановленні законів про те, як система функціонує. Використання дедуктивних моделей передбачає можливість працювати у системах реального часу.

Зазначимо, що модель і система знаходяться у деяких співвідношеннях, від яких залежить ступінь відповідності між ними. При цьому модель і система можуть бути ізоморфними, коли існує відповідність між ними. Саме на основі такої відповідності, яка ґрунтується на основі спільних факторів входу моделі і системи, а також критеріїв їх оцінювання, реалізують процес моделювання.

Водночас під час реального моделювання, у більшості випадків, проводять спрощення системи, тобто на початковому етапі ідентифікації об'єкта скорочують спектр його властивостей і можливостей поведінки в умовах впливу зовнішніх факторів. Це приводить до зменшення кількості вхідних факторів, а, відповідно, і виходів, внаслідок зменшення простору станів системи. В.М.Томашевським показано, що аналогія, абстракція і спрощення є основними етапами, які використовують при побудові моделей систем [1, 38]. При аналізі можливих станів системи  $Z_s$  і моделі  $Z_m$  автор розрізняє такі типи відношень:

1. Детерміновані відношення, коли стан системи однозначно визначає стан моделі:

$$P[Z_s = Z_{si} | Z_m = Z_{mj}] = P[Z_m = Z_{mj} | Z_s = Z_{si}] = 0 \vee 1,$$

де:

$P$  – ймовірність;

$Z_{si}, Z_{mj}$  – конкретні стани системи і моделі відповідно для незалежних значень  $i, j$ .

У даному випадку розглянуто дискретну модель, яка містить скінченну множину станів.

2. Ймовірнісні відношення зі скінченною множиною станів, коли стан системи визначає стан моделі. Навпаки, у цьому випадку, стан моделі не завжди визначає стан системи, але лише з деякою ймовірністю:

$$P[Z_s = Z_{si} | Z_m = Z_{mj}] = 1 \vee 0,$$

$$P[Z_m = Z_{mj} | Z_s = Z_{si}] \leq 1.$$

3. Ймовірнісні відношення з нескінченною множиною станів, коли стан системи визначає стан моделі з деякою ймовірністю і навпаки.

$$P[Z_s = Z_{si} | Z_m = Z_{mj}] = \leq 1,$$

$$P[Z_m = Z_{mj} | Z_s = Z_{si}] \leq 1.$$

Важливим для системного підходу є визначення структури системи, як сукупності зв'язків між її елементами, що відображають взаємодію компонентів. Структуру системи можуть вивчати ззовні, з погляду складу окремих підсистем і відносин між ними, а також з середини. У цьому випадку аналізують окремі властивості, що дозволяють системі досягати заданої мети, тобто коли вивчають функції системи. Відповідно до цього запропоновано кілька підходів до дослідження структури системи з її властивостями, до яких слід, перш за все, віднести *структурний* і *функціональний* [39].

При *структурному* підході виявляють склад елементів системи і зв'язки між ними. Аналіз сукупності елементів і зв'язків між ними дозволяє зробити висновок про структуру системи. Остання залежить від мети дослідження і може бути описана на різних рівнях моделі. Найбільш загальним описом структури є топологічний опис, що дозволяє визначити у загальних поняттях складові частини системи. Такий підхід достатньо повно реалізовано у теорії графів. Розглянемо детальніше структуру і принцип побудови графів.

Відношення між елементами структури можна представити відповідним графом, що дозволяє формалізувати процес дослідження інваріантних у часі властивостей системи і водночас використати розвинутий математичний апарат теорії графів [24, 40].

Графом називають пару:

$$G = (A, B),$$



де:

$A$  – множина вершин;

$B \rightarrow A$  – множина ребер (дуг).

З метою спрощення аналізу вершини графа нумерують, тоді такий граф будемо називати *поміченим*.

Кожне ребро графа пов'язує дві вершини, які, у цьому випадку, називають суміжними. Якщо граф помічений, тоді ребро задають парою символів  $(i, j)$ , у якій  $i$  та  $j$  є номерами суміжних вершин. Якщо усі ребра графа задають впорядкованими парами  $(i, j)$ , де порядок розміщення вершин має значення, тоді такий граф будемо називати *орієнтованим*. При цьому неорієнтований граф не містить орієнтованих ребер, а у частково орієнтованому графі орієнтовані не усі ребра [24].

Геометрично графи зображають у вигляді діаграм, на яких вершини відображають точками, а ребра – відрізками, що з'єднують суміжні вершини. Орієнтоване ребро  $(i, j)$  задають відрізком зі стрілкою, яка направлена з вершини  $i$  у вершину  $j$ . На рис. 2.1 наведено діаграми неорієнтованого і орієнтованого графів структурних схем. Неорієнтований граф завжди можна представити у вигляді орієнтованого графа, замінивши кожне неорієнтоване ребро двома протилежно направленими орієнтованими ребрами (рис. 2.1, а) [24, 41]. На рис. 2.1, а символами показано такі позначення:

$K_0$  – блок керування верхнього рівня;

$K_1, K_2, K_3$  – блоки керування нижнього рівня;

$P$  – процес, яким управляють.

Методику побудови графа (діаграми графа) за структурною схемою здійснюють таким чином: операції зображають у вигляді вершин графа, а зв'язки між операціями – ребрами.

Зауважимо, що принцип побудови графічного зображення не є достатнім для повного аналізу структури системи. Тому розроблено і широко використовують інші способи задання графів. Важливе значення серед таких методів мають матричні структури.

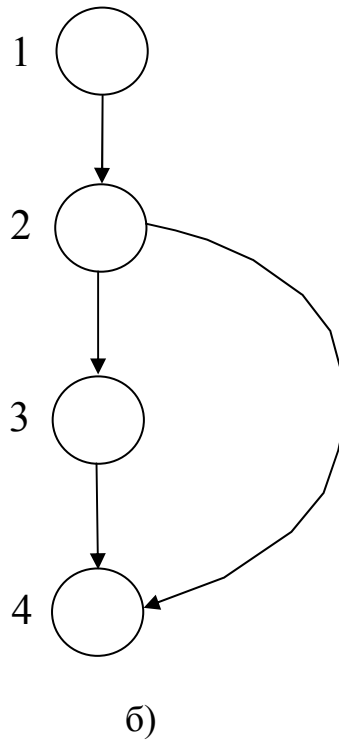
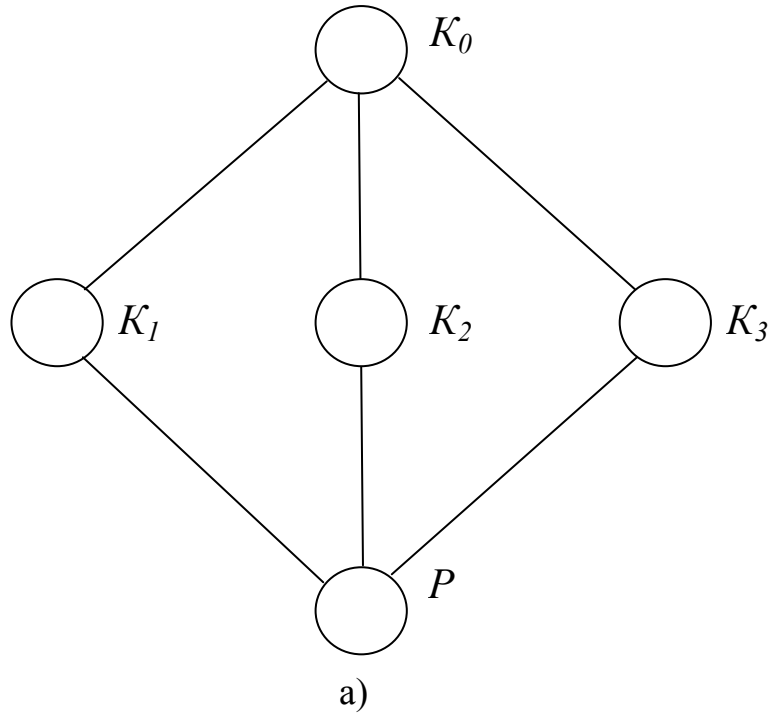


Рис. 2.1. Неорієнтований (а) і орієнтований (б) графи структурних схем.

Відомо [24], що орієнтований граф можна задати матрицею суміжності вершин:

$$V = \|v_{ij}\|,$$

у якій  $v_{ij} = 1$ , якщо граф містить ребро  $(i, j)$ , і навпаки, якщо граф не містить ребер такого типу, тоді  $v_{ij} = 0$ .

Аналогічно будують графи суміжності для неорієнтованих графів.

Крім того, часто використовують інші форми матричного запису графів. Зокрема такі матриці, як:

$$W = \|w_{ij}\|,$$

де:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \text{ – початкова вершина ребра } j; \\ -1, & \text{якщо } i \text{ – кінцева вершина ребра } j; \\ 0 & \text{– у інших випадках.} \end{cases}$$

Для графа, що зображений на рис. 2.1, б матрицю можна побудувати таким чином:

$$V = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array};$$

$$\begin{array}{c}
 (1,2) \quad (2,3) \quad (2,4) \quad (3,4) \\
 W = \begin{array}{c|cccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 4 & 0 & 0 & -1 & -1
 \end{array}
 \end{array}$$

Якщо граф неорієнтований, тоді матриця містить символи: 0 або 1, а  $w_{ij} = 1$ .

Значна кількість нулів у матриці свідчить про неекономічність таких форм представлення графів, що особливо суттєво, коли графи мають багато вершин. Тому у багатьох випадках використовують спискові форми запису графів.

Списком є множина:

$$R = \{R(i)\}.$$

Кожен елемент  $R(i) \in R$  є множиною вершин графа. Відповідно, у елемент  $R(i)$  входять ті вершини  $j$ , яким у графі належить ребро  $(i, j)$ . Наприклад, список, що задає граф на рис. 2.1, б виглядає таким чином:

$$R = \{R(1) = \{2\}, R(2) = \{3, 4\}, R(3) = \{3\}, R(4) = \emptyset\}.$$

Цей же запис можна представити у лаконічнішому вигляді, якщо елементи множини  $R(i)$  записати у круглих дужках, перед якими проставлено номер  $i$ :

$$R = \{1(2), 2(3, 4), 3(3), 4(\emptyset)\}.$$

Припустимо, що кожне ребро графа може прилягати не лише до двох, як у звичайному графі, а до кількох вершин. Такий граф будемо називати *гіперграфом*. Гіперграфом є пара:

$$H = (A, B),$$

де:

$A$  – множина вершин;

$B$  – множина ребер, у якій кожне ребро  $B(i) \in B$  задають безпосередньо переліком вершин.

На рис. 2.2 показано структуру гіперграфа  $H = (A, B)$ , у якому  $A = \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $B = \{B_1, B_2\}$ ,  $B_1 = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $B_2 = \{3, 4, 6\}$ . Ребра  $B_1$  і  $B_2$  умовно показано заштрихованими багатокутниками, у кутах яких розміщені вершини, що їм належать. Оскільки вершина 4 – єдина, яка належить одночасно обом ребрам, тоді гіперграф легко можна розбити на два однореберних гіперграфи.

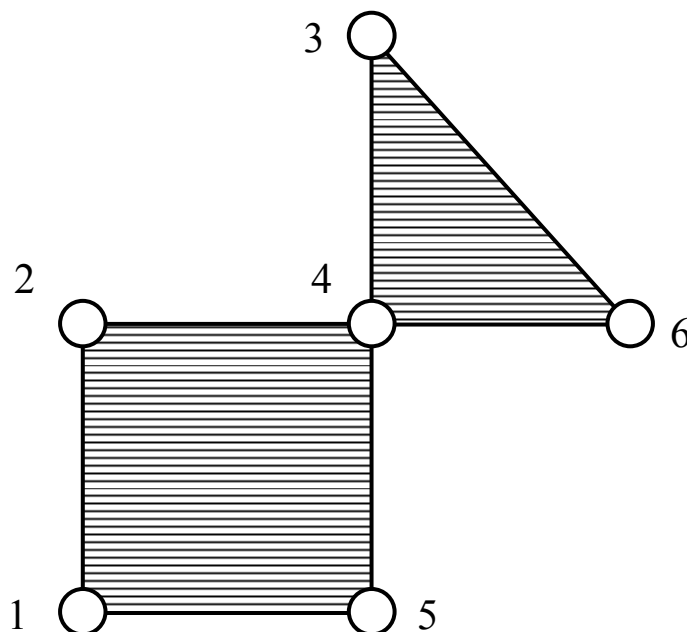


Рис. 2.2. Діаграма гіперграфу.

Наведені положення дозволяють, використовуючи гіперграфи, провести декомпозицію структури на окремі не

суттєво пов'язані ділянки. Це значно спрощує дослідження структури системи в цілому, оскільки її аналіз, у цьому випадку, зводиться до аналізу окремих простих структур.

Аналогічно до графа гіперграф можна задати матрицею або списком, у якому  $R(j)$  – множина вершин, що належать  $j$  – му ребру. Для гіперграфу, зображеного на рис. 2.2, матриця має вигляд:

$$W = \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|.$$

Для цього ж графу список має вигляд:

$$R = \{1 (1, 2, 4, 5), 2 (3, 4, 6)\}.$$

На рис. 2.3 показано граф трирівневої ієрархічної структури. Його можна розбити на два підграфи. Перший підграф містить вершини 1-го і 2-го, а другий – 2-го і 3-го рівнів ієрархії.

У першому підграфі вершину 7 можна представити як ребро деякого гіперграфу, що суміжне з вершинами того ж гіперграфу 1, 2, 4 і 5. Аналогічно, вершину 8 ієрархічного графа можна представити як верхнє ребро гіперграфу, суміжне з його вершинами 3, 4 і 6 (рис. 2.2).

У цьому випадку другий підграф можна описати гіперграфом:

$$H' = (A', B'),$$

де:

$$A' = \{2, 3\};$$

$$B' = B'_1 = \{1\}.$$

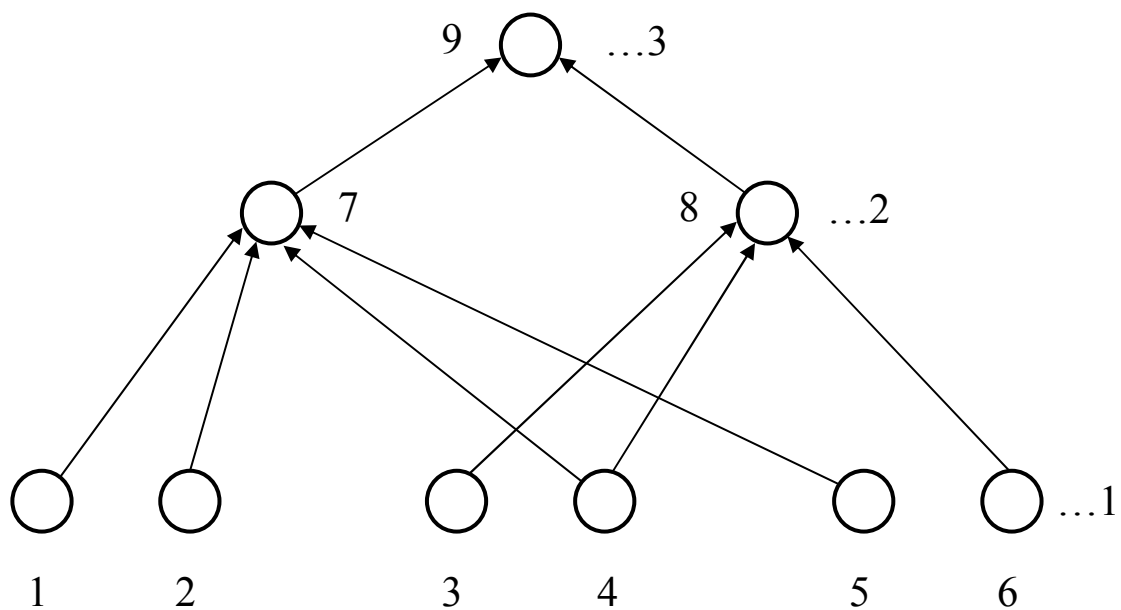


Рис. 2.3. Ієрархічний граф.

Такий підграф можна задати матрицею:

$$W' = B'_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$R' = \{1 (2, 3)\}.$$

Порівнюючи структуру гіперграфа і ієрархічного графа (рис. 2.2 і 2.3 відповідно) можна зробити висновок, що використання гіперграфів для аналізу і опису структур систем є досить економічним і перспективним. Особливо їх використання ефективно при заданні ієрархічних графів без петель і контурів, де будь-які дві суміжні вершини розміщені на сусідніх рівнях ієрархії (рис. 2.3). Такий граф можна представити як сукупність  $(m-1)$  гіперграфів, де  $m$  – загальна кількість рівнів ієрархії у графі. Крім того, гіперграфи доцільно

використовувати для аналізу структури і топологічних характеристик систем.

Зауважимо, що при дослідженні структури системи з її властивостями, порівняно із структурним (який розглянуто вище), використовують *функціональний* підхід. При такому підході розглядаються окремі функції, тобто алгоритми поведінки системи. На наступному етапі оцінюють функції, які виконує система, причому під функцією розуміють властивість, що забезпечує досягнення мети. Оскільки функція відображає властивість, а властивість, у свою чергу, відображає взаємодію системи  $S$  із зовнішнім середовищем  $E$ , тому властивості можуть бути відображені у вигляді деяких характеристик елементів  $S_{iv}$  підсистем  $S_i$  або системи  $S$  в цілому.

За наявності деякого еталону порівняння можна ввести кількісні і якісні характеристики систем. Для кількісної характеристики вводять показники, що відображають співвідношення між даною характеристикою і еталоном. Якісні характеристики системи знаходять, наприклад, за допомогою методу експертних оцінок.

Виявлення функцій системи у часі  $S(t)$ , тобто функціонування системи, передбачає її перехід з одного стану у інший, тобто рух у просторі станів  $Z$ . При експлуатації системи  $S$  важливим показником є якість її функціонування, яка характеризується показником ефективності. При цьому вводять значення критерію оцінювання ефективності. Існують різні підходи до вибору критеріїв оцінювання ефективності. Система  $S$  може бути оцінена або сукупністю часткових критеріїв, або деяким загальним інтегральним критерієм.

Зазначимо, що створювана модель  $M$  з погляду системного підходу також є системою, тобто:

$$S' = S'(M).$$

Таку модель також можна розглядати як складну систему відносно зовнішнього середовища  $E$ . Водночас найпростішими є моделі, у яких зберігається пряма аналогія відгуку на подані входи, тобто – під впливом керованих факторів (входів)



змінюються властивості (виходи) системи. Таким чином зберігається пряма аналогія явища.

Існують також моделі, у яких немає прямої аналогії, а зберігаються лише закони і загальні закономірності поведінки елементів системи  $S$ . Правильне розуміння взаємозв'язків як усередині самої моделі  $M$ , так і взаємодії її із зовнішнім середовищем  $E$ , у значній мірі, визначається тим, на якому рівні знаходиться дослідник.

Простий підхід до вивчення взаємозв'язків між окремими частинами моделі передбачає їх розгляд як відображення зв'язків між окремими підсистемами об'єкта. Такий класичний підхід може бути використаний при створенні достатньо простих моделей. Процес синтезу моделі  $M$  на основі класичного (індуктивного) підходу реалізовується таким чином.

Реальний об'єкт, що підлягає моделюванню, розбивають на окремі підсистеми. Тобто вибирають початкові дані для моделювання і уточнюють цілі, які відображають окремі етапи процесу моделювання. Виходячи з об'єму апріорної інформації або сукупності вихідних даних досягають мети моделювання кожного окремого етапу функціонування системи. На основі цієї мети формують деяку компоненту майбутньої моделі на кожному етапі (такою компонентою може бути будь-яка функція чи система рівнянь, що об'єднують увесь спектр наявних і необхідних входів та виходів системи). Відповідно, сукупність таких компонент на кожному етапі дослідження, забезпечує формування глобальної кінцевої моделі  $M$ .

Отже, розроблення моделі  $M$  на основі класичного підходу означає підсумовування окремих компонент у єдину модель, причому кожна з компонент вирішує свої власні задачі і вона є ізольованою від інших частин моделі. Тому класичний підхід може бути використано для реалізації порівняно простих моделей, у яких можливе розділення і взаємний незалежний аналіз окремих етапів функціонування реального об'єкта.

Для моделі складного об'єкта така роз'єднаність задач ідентифікації не є допустимою, оскільки призводить до значних витрат ресурсів при реалізації моделі з використанням

конкретних програмно-технічних засобів. Слід звернути увагу на дві особливості класичного підходу. Це, зокрема:

- побудову моделі здійснюють від часткового до загального, тобто модель (система) формують шляхом підсумовування окремих її компонент;
- не враховують виникнення нового системного ефекту.

При моделюванні складних об'єктів ідентифікації виникла необхідність спостереження їх з вищого рівня. У цьому випадку спостерігач (дослідник) розглядає дану систему як деяку підсистему глобальної метасистеми, тобто системи вищого рангу. Тоді, з позиції нового системного підходу, слід будувати математичну модель не лише досліджуваної системи, що вирішує сукупність поставлених завдань, але й створювати нову систему, яка є складовою частиною метасистеми.

Системний підхід широко застосовують у системотехніці у зв'язку з необхідністю дослідження складних реальних систем, коли є очевидною недостовірність, а іноді помилковість прийняття яких-небудь конкретних рішень. Основою для виникнення системного підходу були такі критерії:

- значний об'єм апіорної інформації, що збільшувався на кожному етапі моделювання;
- необхідність обліку складних стохастичних зв'язків у системі;
- необхідність аналізу впливу некерованих факторів зовнішнього середовища на кожному етапі моделювання складних систем.

Наведені фактори зумовили дослідників вивчати складний об'єкт не ізольовано, а у взаємодії із зовнішнім середовищем і водночас у сукупності з іншими системами деякої складної метасистеми.

Системний підхід дозволяє вирішити проблему побудови складної системи з урахуванням всіх факторів та можливостей, пропорційних їх значущості, на усіх етапах дослідження системи і побудови моделі [42]. Системний підхід враховує, що кожна система є інтегрованою і єдиною навіть тоді, коли вона складається з окремих незалежних підсистем. Отже, у

системному підході розглядають комплексну систему як інтегроване єдине ціле, причому аналіз на початкових етапах побудови моделі починають з головного – формулювання мети функціонування. Початкові вимоги до моделі системи формулюють, виходячи з таких критеріїв:

- початкових даних, які відомі апіорно у результаті аналізу зовнішньої системи;
- обмежень, які накладаються на систему ззовні;
- можливостей реалізації моделі;
- мети функціонування.

На основі цих вимог орієнтовано формують перехідні підсистеми, елементи і здійснюють найскладніший етап синтезу – вибір складових системи, для чого використовують необхідні у даних умовах функціонування об'єктів критерії.

При моделюванні необхідно забезпечити максимальну ефективність моделі системи, яка визначається різницею між показниками результатів, отриманих при експлуатації моделі, і тими витратами, які були вкладені у її розроблення.

### **2.2.2. Стадії розроблення моделей**

На основі системного підходу запропоновано послідовність розроблення моделей, у якій виділяють дві основні стадії проектування: макропроектування і мікропроектування.

На стадії *макропроектування*, виходячи з результатів аналізу апіорної інформації про реальну систему  $S$  і зовнішнє середовище  $E$  визначено такі стадії проектування:

- будують модель зовнішнього середовища;
- виявляють ресурси і обмеження для побудови моделі системи;
- вибирають модель системи;
- вибирають критерії, що дозволяють оцінити адекватність моделі  $M$  реальної системи  $S$ .

Побудувавши модель системи і модель зовнішнього середовища, на основі критерію ефективності функціонування системи у процесі моделювання вибирають оптимальну стратегію керування, що дозволяє реалізувати можливості

моделі для відтворення окремих напрямків функціонування реальної системи.

Стадія *мікропроекування* суттєво залежить від конкретного виду вибраної моделі. У разі вибору імітаційної моделі необхідно забезпечити створення інформаційного, математичного, технічного і програмного забезпечення системи моделювання. На цій стадії можна встановити основні характеристики створеної моделі, оцінити час роботи з нею і витрати ресурсів для отримання моделі процесу функціонування системи із заданою адекватністю.

Незалежно від виду запропонованої моделі при її побудові необхідно керуватися комплексом принципів системного підходу:

- пропорційно-послідовне і поетапне розроблення усіх напрямків функціонування моделі;
- узгодження інформаційних, ресурсних, економічних та інших характеристик;
- врахування співвідношення окремих рівнів ієрархії у системі моделювання;
- врахування цілісності моделі системи на кожному незалежному етапі її планування, дослідження і побудови.

Модель повинна відповідати заданій меті її створення, тому окремі частини повинні компонуватися взаємно, виходячи з єдиного системного завдання. Мета повинна бути сформульована об'єктивно, тоді вона матиме більшу змістовність і на кожному конкретному етапі буде відображати об'єктивні можливості створюваної системи моделювання. При кількісному формулюванні мети формалізують цільову функцію, яка адекватно відображає найважливіші фактори, що впливають на процес досягнення мети.

Побудова моделі належить до системних завдань, при вирішенні яких синтезують апріорну інформацію значного об'єму. Використання системного підходу у цих умовах дозволяє не тільки побудувати модель реального об'єкта, але й на основі цієї моделі вибрати необхідну кількість значущих

вхідних факторів у реальній системі. Це дозволить оцінити показники її функціонування, а, у подальшому, на основі моделювання знайти найефективніший варіант побудови і режим функціонування реальної системи.

### **2.2.3. Загальна характеристика проблеми моделювання систем**

З розвитком системних досліджень та з розширенням експериментальних методів вивчення реальних явищ все більше значення мають абстрактні методи, з'являються нові наукові підходи моделювання та ідентифікації об'єктів, автоматизуються елементи розумової праці. Важливе значення при створенні реальних систем мають математичні методи аналізу і синтезу, оскільки значна кількість відкриттів ґрунтується на теоретичних дослідженнях. Проте було б неправильно забувати про те, що основним критерієм будь-якої теорії є практика, і навіть суто математичні твердження перевіряють експериментальними дослідженнями [43].

Одночасно з розвитком теоретичних методів аналізу та синтезу удосконалюють і методи експериментального вивчення реальних об'єктів, з'являються нові засоби дослідження. Проте експеримент був і залишається одним з основних та істотних інструментів пізнання. Процеси моделювання дозволяють по-іншому описати реальні процеси і спростити експериментальне його вивчення. Удосконалюється і саме поняття моделювання. Якщо раніше під моделюванням розуміли реальний фізичний експеримент або побудову макету, що імітує реальний процес, то на сьогодні з'явився новий вид моделювання, в основі якого має місце постановка не тільки фізичних, але також і математичних експериментів.

Пізнання реальної дійсності є тривалим і складним процесом. Визначення якості функціонування складної системи, вибір оптимальної структури і алгоритмів прогнозування, побудова системи відповідно до поставленої перед нею метою – основна проблема проектування сучасних систем. Тому моделювання можна розглядати як один із

методів, що використовують при проектуванні і дослідженні складних систем.

Моделювання ґрунтується на деякій аналогії реального і уявного експерименту. Аналогія є основою для пояснення явища, що вивчають. Проте, критерієм істини може бути лише практика. Хоча сучасні наукові гіпотези можуть формувати чисто теоретичним шляхом, але, по суті, вони ґрунтуються на практичних знаннях. Для пояснення реальних процесів висувують гіпотези, для підтвердження яких проводять експерименти або наводять такі теоретичні міркування, які логічно підтверджують їх правильність. У широкому змісті під експериментом можна розуміти деякий спектр результатів спостереження будь-яких явищ, які здійснюють в умовах, близьких до природних.

Розрізняють пасивний експеримент, коли дослідник спостерігає за перебігом процесу, і активний, коли спостерігач втручається і організовує перебіг процесу. Останнім часом поширеним є активний експеримент, оскільки саме за результатами таких досліджень можливо виявити критичні параметри системи, отримати достовірні закономірності перебігу фізичних і хімічних процесів у системі, забезпечити можливість повторення експерименту у різних точках і т.д.

Реальний об'єкт має деяку формальну структуру. Відповідно, для будь-якої моделі характерна наявність деякої структури, що відповідає формальній структурі реального об'єкта.

Основою моделювання є інформаційний взаємозв'язок, оскільки безпосередньо процес побудови моделі ґрунтується на інформації про реальний об'єкт. У процесі реалізації моделі отримують інформацію про об'єкт, одночасно у процесі експерименту з моделлю вводять інформацію у модель. Суттєве місце у процесі ідентифікації і моделюванні об'єктів та систем займає оброблення отриманих результатів. Отже, інформація є основою усього процесу моделювання.

Виходячи з цього, важливе значення на сьогодні має метод імітаційного моделювання. Відомо, що *імітаційне моделювання* – це метод конструювання моделі системи з

одночасним проведенням експериментів [1, 44, 45]. Виділимо найсуттєвіші особливості імітаційного моделювання.

Зазначимо, що структурою складної системи є загальний опис елементів і зв'язків між ними. Поведінку системи із заданою структурою описують за допомогою станів і моментів переходів між ними. Стан системи у момент часу  $t$  визначають як безліч значень певних параметрів системи у цей самий момент часу. Будь-яку зміну значень можна розглядати як перехід до іншого стану. У цьому аспекті імітаційна модель відображає властивості середовища, у якому функціонує досліджувана система. Зовнішнє середовище задають вхідними факторами моделі.

Вся інформація про імітаційну модель подається у вигляді сукупності алгоритмів, які описують процес функціонування системи. Отже, здебільшого імітаційною моделлю є її програмна реалізація на комп'ютері, а імітаційне моделювання зводиться до проведення експериментів з моделлю на кожному етапі її конкретизації. Під час імітаційного моделювання можуть бути задіяні не лише програмні, але й технічні засоби.

З математичної точки зору імітаційну модель можна розглядати як сукупність рівнянь, які розв'язують, використовуючи чисельні методи. Окремі рівняння можуть бути простими, але їх кількість і частота розв'язання – дуже великими. Етапи розв'язання таких рівнянь встановлюють послідовність станів моделі. Отже, імітаційна модель функціонує аналогічно до функціонування системи.

За наявності у моделі випадкових факторів виникає необхідність статистичного оцінювання результатів моделювання, яке виконують за допомогою методу *статистичного моделювання* (методу Монте-Карло). Статистичне моделювання є самостійним видом моделювання і є складовою імітаційного моделювання. Його використовують за необхідності моделювання ймовірнісних систем і процесів. При цьому зазначимо, що стохастичне моделювання використовують під час імітаційного моделювання при необхідності врахування випадкових факторів.

У імітаційному моделюванні об'єктом ідентифікації можуть бути складні організаційно-технічні системи, які можна віднести до класу складних систем. За своїм змістом створена

модель також є системою, яку відносять до класу складних систем. Для таких систем є характерними такі властивості.

1. Мета функціонування, яка визначає ступінь ціленаправленої поведінки моделі. У цьому випадку моделі можуть бути розділені на одноцільові, що призначені для вирішення одного завдання, і багатоцільові, тобто такі, що дозволяють вирішити або проаналізувати напрямки функціонування реального об'єкта.

2. Складність. Враховуючи те, що модель є сукупністю окремих елементів та зв'язків між ними, її складність можна оцінити, аналізуючи загальну кількість елементів у системі і зв'язків між ними. За різноманітністю елементів можна виділити кілька рівнів ієрархії системи, окремі функціональні підсистеми у моделі, спектр входів і виходів і т. д. Тобто поняття складності може бути ідентифіковане за цілою гамою ознак.

3. Цілісність. Ця ознака вказує на те, що створювана модель є однією цілісною системою і складається з великої кількості частин (елементів), які знаходяться у взаємозв'язку.

4. Невизначеність системи. Буває невизначеність:

- станів системи;
- можливості досягнення поставленої мети;
- методів вирішення задач;
- достовірності початкової інформації і т.д.

Основною характеристикою невизначеності є така міра інформації, як ентропія. Вона дозволяє у багатьох випадках оцінити кількість інформації, необхідної для досягнення заданого стану системи. При моделюванні основною метою є отримання необхідної відповідності моделі до реального об'єкта і у цьому змісті кількість інформації у моделі можна також оцінити за допомогою ентропії. Це означає, що необхідно знайти ту граничну мінімальну кількість інформації, яка потрібна для отримання необхідного результату із заданою достовірністю. Отже, поняття невизначеності, що характеризує складну систему, можна застосовувати до імітаційних моделей, причому вона є однією з основних ознак системи.

5. Поведінка моделі на кожному етапі її конкретизації, яка дозволяє оцінити ефективність досягнення системою



поставленої мети. Залежно від наявності випадкових впливів розрізняють детерміновані і стохастичні системи, а за своєю поведінкою – неперервні та дискретні і т.д. Аналіз поведінки моделі на різних етапах ідентифікації дозволяє оцінити ефективність побудованої моделі, а також точність і достовірність отриманих при моделюванні результатів. Очевидно, що поведінка моделі не обов'язково співпадає з поведінкою реального об'єкта, причому часто моделювання може бути реалізоване на основі апріорної інформації, яка отримана при аналізі поведінки іншого об'єкта.

6. Адаптивність, яка є властивістю високоорганізованої системи. Завдяки адаптивності система пристосовується до різних факторів збурення у широкому діапазоні зміни впливів зовнішнього середовища. Модель завжди має можливість до адаптації у широкому спектрі факторів збурення. Слід зазначити, що на різних етапах ідентифікації може стати суттєвим питання стосовно стійкості моделі до різноманітних впливів збурення. Позаяк модель є складною системою, важливими є питання, пов'язані з її поведінкою у критичних умовах, тобто питання живучості, надійності і т. д.

7. Організаційна структура системи моделювання, яка суттєво залежить від складності моделі і ступеня досконалості засобів моделювання. Одним з останніх досягнень у галузі моделювання можна вважати можливість використання імітаційних моделей для проведення машинних експериментів. Для цього необхідна оптимальна організаційна структура комплексу технічних засобів, інформаційного, математичного і програмного забезпечення системи моделювання, оптимальна організація процесу моделювання. Водночас слід звертати особливу увагу на тривалість процесу моделювання і точність отриманих результатів експерименту.

8. Керованість моделі. Експериментаторам завжди необхідно управляти системою з метою отримання інформації про перебіг процесів у різноманітних критичних умовах впливу зовнішнього середовища, які імітують реальні. У цьому сенсі наявність керованих параметрів моделі у реалізованій системі моделювання дає можливість поставити широкий спектр експериментальних досліджень і отримати значну кількість

результатів для аналізу поведінки моделі та подальшої її корекції.

9. Можливість розвитку моделі, яка, виходячи з сучасного рівня науки і техніки, дозволяє створювати потужні системи моделювання і дослідження багатьох напрямків функціонування реального об'єкта. Проте, не можна при створенні системи моделювання обмежуватися тільки завданнями, які розглядають на черговому етапі. Необхідно передбачати можливість розвитку системи моделювання як по горизонталі (у сенсі розширення спектру функцій, що вивчаються), так і по вертикалі (у сенсі розширення кількості підсистем). Тобто, створена система моделювання повинна сприяти застосуванню нових сучасних методів і засобів ідентифікації. Очевидно, що інтелектуальна система моделювання може функціонувати лише спільно з колективом людей, тому до неї ставлять ергономічні вимоги.

#### **2.2.4. Цілі моделювання систем керування**

Одним з найважливіших аспектів побудови систем моделювання є проблема мети. Будь-яку модель будують залежно від мети, яку ставить перед нею дослідник, тому одна з основних проблем при моделюванні – це проблема цільового призначення. Подібність перебігу процесу у моделі до реального процесу є не метою, а умовою правильного функціонування моделі. Тому стосовно мети слід ставити завдання вивчення будь-якого напрямку функціонування об'єкта.

Для спрощення моделі мету ділять на кілька етапів, внаслідок чого створюють ефективніші види моделей залежно від отриманих етапів моделювання. Можна вказати цілий комплекс прикладів розподілених етапів моделювання (причому кожен з них має свою мету, яка є складовою загальної мети моделювання) у галузі складних систем. Наприклад, для підприємства важливим є вивчення процесів оперативного керування виробництвом, оперативно-календарного планування, перспективного планування. Для

кожного з цих напрямків функціонування підприємства можуть бути успішно використані методи моделювання.

Якщо мета моделювання відома, тоді на наступному етапі вирішують проблему побудови моделі. Побудова моделі є можливою при наявності інформації або за умови, коли експериментатори висувають гіпотези щодо структури, алгоритмів і параметрів досліджуваного об'єкта. На підставі цього здійснюють ідентифікацію об'єкта. На сьогодні широко застосовують різні способи оцінювання параметрів системи: за методом найменших квадратів, за методом максимальної правдоподібності, марковське оцінювання та ін.

Якщо модель побудована, тоді на наступному етапі ідентифікації об'єктів вирішують проблему реалізації моделі. Основним завданням реалізації моделі є мінімізація часу отримання кінцевих результатів і забезпечення їх достовірності.

Для правильно побудованої моделі характерним є те, що вона виявляє лише ті закономірності, які необхідні дослідникові. Причому зауважимо, що у розробленій моделі не розглядають властивості системи, які є не суттєвими для даного дослідження. Слід зазначити, що оригінал і модель повинні бути одночасно схожими за значущими ознаками, що дозволяє виділити найважливіші властивості, які вивчають. У цьому сенсі модель виступає, у деякій мірі, уособленням оригіналу, що забезпечує конкретизацію і вивчення лише деяких властивостей реального об'єкта.

Виходячи з наведеного вище можна зробити висновок, що при моделюванні складних об'єктів у одних випадках складнішим етапом є вирішення проблеми ідентифікації, у інших – складнішим є етап вирішення проблеми побудови формальної структури об'єкта. Можливі труднощі і при реалізації моделі, особливо у випадках імітаційного моделювання складних систем. При цьому слід підкреслити значення дослідника у процесі моделювання. Постановка завдання, побудова змістовної моделі реального об'єкта є творчим процесом. У цьому сенсі немає формальних шляхів вибору оптимального виду моделі. Часто відсутні формальні методи, що дозволяють достатньо точно описати реальний

процес. Тому вибір тієї або іншої аналогії, вибір того або іншого математичного апарату моделювання повністю ґрунтується на наявному досвіді дослідника і його помилка може призвести до неадекватних результатів моделювання складної системи.

Засоби обчислювальної техніки, які на сьогодні широко використовують для обчислень при аналітичному моделюванні або для реалізації імітаційної моделі системи, можуть лише допомогти з погляду ефективності побудови складної моделі. Однак, вони не дозволяють підтвердити правильність побудови розробленої моделі. Тільки на основі аналізу оброблених результатів дослідження, а також досвіду дослідника можна з певною достовірністю оцінити адекватність моделі стосовно реального процесу.

Якщо у процесі моделювання суттєве місце займає реальний фізичний експеримент, тоді важливою є надійність інструментальних засобів, які використовують для аналізу апріорної інформації. У цьому плані збої і відмови програмно-технічних засобів можуть призвести до отримання спотворених значень вихідних даних, що відображають перебіг процесу. Тому при проведенні фізичних експериментів необхідно мати спеціальне устаткування, розроблене математичне і інформаційне забезпечення, що дозволяє реалізовувати діагностику засобів моделювання на кожному етапі ідентифікації. Це дозволить нівелювати ті помилки у вихідній інформації, які викликані несправностями устаткування.

### **2.3. Автоматизовані системи розпізнавання образів**

Ідентифікація і прогнозування часто практично нічим один від одного не відрізняються у спектрі набору математичних моделей та алгоритмів. Основна відмінність між ними полягає у тому, що при ідентифікації ознаки і стани об'єкта відносять до одного часу, тоді як при прогнозуванні ознаки (фактори) визначають попередньо, а стани об'єкта – на наступних етапах дослідження. Це означає, що системи розпізнавання образів можуть застосовуватися не тільки для

вирішення завдань ідентифікації, але й прогнозування і керування.

### **2.3.1. Основні поняття і визначення**

*Системою розпізнавання образів* будемо називати клас систем штучного інтелекту, що забезпечують:

- формування конкретних образів об'єктів і узагальнених образів класів;
- навчання, тобто формування узагальнених образів класів на основі прийнятих прикладів об'єктів (тобто таких, що належать до тих або інших категорій – класів);
- самонавчання, тобто формування кластерів об'єктів на основі аналізу некласифікованої навчальної вибірки;
- розпізнавання, тобто ідентифікація (і водночас прогнозування) станів об'єктів, що описують певними ознаками;
- вимірювання ступеня адекватності моделі;
- вирішення оберненої задачі ідентифікації і прогнозування (забезпечується не всіма моделями).

Ознаками об'єктів називатимемо конкретні результати вимірювання показників їх властивостей. Властивості об'єктів відрізняються за своєю якістю. Їх вимірюють за допомогою органів сприйняття або приладів. Результатом вимірювання є зниження невизначеності у знаннях суб'єкта про властивості об'єкта. Показники властивостей конкретизують шляхом їх зіставлення з певними градаціями відповідних вимірювальних шкал: номінальних, порядкових або відношень.

У номінальних шкалах відсутні відношення порядку, початок відліку і одиниця вимірювання.

На порядкових шкалах визначеними є співвідношення “більше – менше”, але відсутні початок відліку і одиниця вимірювання.

На шкалах відношень визначеними є відношення порядку, усі арифметичні операції, є початок відліку і одиниця вимірювання.

Припустимо, що шкали утворюють осі координат деякого абстрактного багатовимірного простору, який називатимемо “фазовим простором”. У цьому фазовому просторі кожен конкретний об’єкт представляють певною точкою, що має координати, які відповідають значенням його властивостей за осями координат, тобто градаціям описових шкал. Осі координат фазового простору не є взаємно-перпендикулярними шкалами відношень, тобто, у загальному випадку, це неортонормований і неметричний простір. Отже, у ньому не можливо застосувати Евклідову міру відстаней (тобто, у цьому випадку не діє Евклідова метрика). Застосування такої міри відстаней коректне, якщо одночасно виконуються дві умови:

- усі осі координат фазового простору є шкалами відношень;
- усі осі координат є взаємно-перпендикулярними або близькими до цього.

Узагальнений образ класу формують з декількох образів конкретних об’єктів, які відносять до даного класу, тобто відповідають одній градації деякої класифікаційної шкали. Узагальнені образи класів формалізують (шифрують) шляхом використання класифікаційних шкал і градацій, які можуть бути тих же типів, що і описові (тобто, номінальними, порядковими або відношеннями). Водночас належність конкретних об’єктів до того чи іншого класу визначає дослідник, який вводить інформацію у навчальну вибірку, або автоматично сама система на основі кластерного аналізу конкретних об’єктів.

Навчальна вибірка є деякою підмножиною досліджуваної сукупності, яку називають “генеральною сукупністю”. На основі вивчення навчальної вибірки можна зробити висновки про генеральну сукупність, причому важливо знати міру достовірності отриманих висновків.

Розглянемо, як залежить міра достовірності висновків про генеральну сукупність від об’єму навчальної вибірки.

Якщо навчальна вибірка містить усі об’єкти генеральної сукупності, тобто вони співпадають, тоді достовірність висновків буде найвищою (за всіх інших рівних умов). Якщо ж

навчальна вибірка досить мала, то навряд чи на її основі можуть бути зроблені достовірні висновки про генеральну сукупність, оскільки у цьому випадку у навчальну вибірку можуть навіть не входити приклади об'єктів усіх або переважної більшості класів.

Під *репрезентативністю* навчальної вибірки розумітимемо її здатність адекватно представляти генеральну сукупність, тому вивчення самої генеральної сукупності можна коректно замінити дослідженням навчальної вибірки. Однак, репрезентативність залежить не тільки від об'єму, але й від структури навчальної вибірки, тобто від того, наскільки повно представлені всі категорії об'єктів генеральної сукупності (класи) і від того, наскільки повно вони описані ознаками.

*Зважування даних або ремонт навчальної вибірки* – це операція, у результаті якої частковий розподіл об'єктів за класами у навчальній вибірці максимально, наскільки це можливо, наближається до частотного розподілу генеральної сукупності (якщо він відомий з незалежних джерел) або до рівномірного.

Основними операціями у моделях розпізнавання є узагальнення і розпізнавання.

*Узагальнення* – це операція формування узагальнених образів класів на основі описів конкретних об'єктів, що входять у навчальну вибірку. Зазначимо, що операцію узагальнення реалізують далеко не у всіх моделях систем розпізнавання (наприклад, у методі *K*-найближчих сусідів). Зазвичай немає можливості визначити вагу ознак для вирішення завдання ідентифікації поки не реалізовано узагальнення.

*Розпізнавання* – це операція порівняння і визначення ступеня схожості образу даного конкретного об'єкта з образами інших конкретних об'єктів або з узагальненими образами класів. У результаті виконання цієї операції формують рейтинг об'єктів або класів стосовно схожості з об'єктом розпізнавання. Важливим етапом при реалізації операції розпізнавання у математичній моделі є вибір виду *інтегрального критерію або міри схожості*, який на основі знань про ознаки конкретного об'єкта дозволив би кількісно

визначити ступінь його схожості з іншими об'єктами або узагальненими образами класів.

У ортонормованому просторі, осями якого є шкали відношень, використовують, як міру схожості, Евклідову відстань. Проте, такі простори на практиці зустрічаються швидше як виняток з правила, а операція ортонормування є досить трудомісткою при обчисленні. Це приводить до “збіднення” моделі, а отже її не завжди зручно і доцільно використовувати.

Тому на сьогодні актуальним є завдання вибору або конструювання інтегрального критерію схожості, застосування якого було б коректним і у неортонормованих просторах. Крім того, такий інтегральний критерій повинен бути стійким до завад як при аналізі початкових даних, так і у процесі формування моделі.

*Навчання з вчителем (експертом)* – це процес формування узагальнених образів класів на основі навчальної вибірки, що містить характеристики конкретних об'єктів як у описових, так і у класифікаційних шкалах та градаціях.

Причому, якщо описові характеристики можливо формувати за допомогою інформаційно-вимірювальної системи автоматично, то класифікаційні є результатом процесу оцінювання експертом ступеня належності вибраних об'єктів до різних класів. У цьому випадку не виникає питання про те, для формування узагальненого образу яких класів слід використовувати опис даного конкретного об'єкта.

*Самонавчання (кластерний аналіз)* – це процес формування узагальнених образів класів, на основі навчальної вибірки, що містить характеристики конкретних об'єктів, причому тільки в описових шкалах і градаціях.

Такий процес реалізують у три етапи:

- кластерний аналіз об'єктів навчальної вибірки, у результаті якого визначають групи подібних об'єктів за ознаками (кластери);
- привласнення кластерам статусу узагальнених класів, для формування узагальнених образів об'єктів, які належать саме цим кластерам;



- безпосереднє формування узагальнених образів класів.

Після побудови моделі визначають ступінь її адекватності, виконуючи при цьому такі операції.

*Верифікація моделі* – це операція встановлення ступеня її адекватності (валідності) шляхом порівняння результатів ідентифікації конкретних об'єктів з їх фактичною приналежністю до узагальнених образів класів.

Розрізняють внутрішню і зовнішню, інтегральну і диференціальну валідність.

*Внутрішня валідність* – це здатність моделі з достатньою точністю ідентифікувати об'єкти навчальної вибірки.

Якщо модель має невисоку внутрішню валідність, її не можна вважати вдало побудованою.

*Зовнішня валідність* – це здатність моделі з достатньою точністю ідентифікувати об'єкти, що не входять у навчальну вибірку.

*Інтегральна валідність* – це середньостатистична достовірність ідентифікації усіх класів об'єктів розпізнавання.

*Диференціальна валідність* – це здатність моделі з достатньою точністю ідентифікувати об'єкти за класами.

*Адаптація моделі* – це облік у моделі об'єктів, що не входять у навчальну вибірку, але входять у генеральну сукупність, стосовно якої дана навчальна вибірка є репрезентативною. Адаптація моделі не приводить до зміни класифікаційних і описових шкал чи градацій, а лише передбачає зміну об'єму навчальної вибірки, що, у свою чергу, зумовлює кількісну зміну моделі.

Якщо моделлю вірно ідентифікуються об'єкти, які не входять у навчальну вибірку, то це означає, що ці об'єкти входять у генеральну сукупність, стосовно якої дана навчальна вибірка репрезентативна. Отже, на основі навчальної вибірки можна виявити закономірності взаємозв'язків між ознаками і належністю об'єктів до класів, які діють не тільки у навчальній вибірці, але належать до генеральної сукупності.

*Синтез (або повторний синтез – пересинтез) моделі* – це облік у моделі об'єктів, які не входять ні у навчальну вибірку,

ні у генеральну сукупність, відносно якої дана навчальна вибірка репрезентативна.

До цієї групи відносять об'єкти з новими, раніше невідомими закономірностями взаємозв'язків ознак. Зазначимо, що пересинтез моделі приводить до її якісної зміни.

### 2.3.2. Проблема розпізнавання образів

Проблема розпізнавання образів зводиться до двох завдань: навчання і розпізнавання. Тому перш ніж сформулювати задачу навчання розпізнавання образів уточнимо, у чому зміст їх розпізнавання.

Простим варіантом розпізнавання є *чіткий запит* на пошук об'єкта у базі даних за його ознаками, який реалізується в інформаційно-пошукових системах. При цьому кожному полю бази даних відповідає ознака (описова шкала), а значенню поля – показник ознаки (градація описової шкали). Складнішими варіантами розпізнавання є *нечіткий запит з неповнотою інформації*, коли не всі ознаки об'єктів задають у запиті на пошук, оскільки не всі вони відомі. Відомий також *нечіткий запит із завадами*, коли не всі ознаки об'єкта відомі, а деякі вважають відомими помилково. У таких випадках у базі даних аналізують усі об'єкти, в яких співпадає хоча б одна ознака. На наступному етапі об'єкти сортують стосовно кількості ознак, які співпали. При визначенні рангу об'єкта у відсортованому списку усі ознаки вважають такими, що мають однакову “вагу” і враховують лише їх кількість.

Проте, слід врахувати, що:

- по-перше, насправді ознаки мають різну вагу, тобто одна і та ж ознака по-різному характеризує різні об'єкти;
- по-друге, експерта можуть цікавити не лише самі об'єкти, які є в базі даних, але й класифікація самого запиту, тобто належність його до певної категорії або узагальненого образу класу.

Якщо реалізація чітких або нечітких запитів не викликає особливих труднощів, то розпізнавання, як ідентифікація з

узагальненими образами класів, які враховують відмінності ваги ознак, є певною проблемою.

У результаті навчання система розпізнавання повинна мати здатність:

- групувати об'єкти за класами, до яких вони належать (ідентифікувати об'єкти вірно);
- навпаки, не групувати об'єкти за класами, до яких вони не належать (не ідентифікувати об'єкти помилково).

Ця і є проблема навчання розпізнаванню образів, причому полягає вона у наступному:

- у розробленні математичної моделі, що забезпечує: узагальнення образів конкретних об'єктів і формування узагальнених образів класів; розрахунок ваги ознак; визначення ступеня подібності конкретних об'єктів з класами і формування рангів класів за ступенем подібності з конкретним об'єктом;
- у наповненні моделі конкретною інформацією, що характеризує наперед визначені напрями ідентифікації.

### **2.3.3. Класифікація методів розпізнавання образів**

Розпізнаванням образів називають завдання встановлення відношення еквівалентності між конкретними і узагальненими образами-моделями об'єктів реального або ідеального середовища. Відношення еквівалентності відображають належність об'єктів оцінювання до певних класів, що розглядають як самостійні одиниці.

При побудові алгоритмів розпізнавання класи еквівалентності можуть задаватися дослідником, який користується власними уявленнями або використовує зовнішню додаткову інформацію про подібність і відмінність об'єктів у контексті поставленої задачі. Тоді говорять про “розпізнавання з експертом”. У іншому випадку, коли автоматизована система вирішує задачу класифікації без залучення зовнішньої

навчальної інформації, говорять про автоматичну класифікацію або “розпізнавання без експерта”.

Більшість алгоритмів розпізнавання образів потребують залучення високопродуктивної комп’ютерної техніки, що характеризується значною обчислювальною потужністю.

Авторами запропоновано широкий спектр методів розпізнавання образів [10, 11]. Зокрема, розрізняють параметричні, непараметричні і евристичні методи. Крім того, незалежно використовують таку типологію методів розпізнавання образів:

- методи, засновані на принципі розділення;
- статистичні методи;
- методи, побудовані на основі “потенційних функцій”;
- методи обчислення оцінок;
- методи, засновані на апараті алгебри логіки.

Основою даної класифікації є відмінність у формальних методах розпізнавання образів. Водночас у ній не враховано евристичний підхід до розпізнавання, що отримав широке розповсюдження при аналізі експертних систем.

*Евристичний підхід* ґрунтується на знаннях, що важко формалізуються, та інтуїції дослідника. При цьому безпосередньо дослідник визначає, яку інформацію система повинна використовувати для досягнення необхідного ефекту розпізнавання.

Описані вище фундаментальні способи розпізнавання образів дозволяють запропонувати таку класифікацію методів:

- інтенсіональні методи, які ґрунтуються на операціях з ознаками;
- екстенсіональні методи, які ґрунтуються на операціях з об’єктами.

Необхідно зазначити, що існування саме цих двох груп методів розпізнавання, які оперують ознаками і об’єктами, на наш погляд, є закономірним. Жоден з цих методів, взятий окремо, не дозволяє сформулювати адекватне відображення наочної області. Методи доповнюють один одного, тому системи розпізнавання повинні забезпечувати реалізацію обох методів лише у комплексі.

### 2.3.4. Ідентифікація у системі керування

Автоматизована система керування складається з двох основних частин: об'єкта керування і керуючої системи.

Керуюча система здійснює такі функції:

- ідентифікація стану об'єкта керування;
- побудова керуючої дії, виходячи з мети керування (при цьому враховують стан об'єкта керування і навколишнього середовища);
- безпосереднє керування об'єктом.

Розпізнаванням образів є безпосередньо ідентифікація стану деякого об'єкта. Автоматизована система керування, побудована на традиційних принципах, може працювати тільки на основі параметрів, закономірності зв'язків яких вже відомі, вивчені і відображені у математичній моделі. Тому автоматизовані системи керування, принцип дії яких ґрунтується на традиційному підході, практично не є ефективними під час керування складними системами з активними детермінованими об'єктами.

Тому до складу перспективних автоматизованих систем керування, які забезпечують стійке керування активними об'єктами, повинні входити підсистеми ідентифікації і прогнозування станів середовища та об'єкта керування. Такі підсистеми розробляють, використовуючи методи штучного інтелекту, методи підтримки ухвалення рішень і теорії інформації.

Стисло розглянемо питання про застосування систем розпізнавання образів для ухвалення рішень керування об'єктом. Очевидно, що застосування систем розпізнавання для прогнозування результатів керування (за умови поєднання різної кількості факторів) дозволяє розглянути та порівняти різні варіанти керування і вибрати кращі з них за певними критеріями. Проте, цей підхід на практиці не є ефективним, особливо якщо факторів багато.

Якщо, як класи розпізнавання, взяти майбутні стани об'єкта керування, а, як ознаки, – фактори, що впливають на нього, то у моделі розпізнавання образів може бути сформована кількісна міра причинно-наслідкового зв'язку

факторів і станів. Це дозволяє за заданим станом об'єкта керування отримати інформацію про величину і напрям впливу факторів, які сприяють або перешкоджають переходу об'єкта у конкретний стан.

Вибір факторів у визначеному стані системи є зворотним завданням прогнозування, оскільки при прогнозуванні, навпаки, визначають стан стосовно факторів.

Фактори можна розділити на такі групи:

- фактори, які характеризують попередню поведінку об'єкта керування;
- технологічні фактори керування;
- фактори навколишнього середовища.

Отже, системи розпізнавання образів можна застосувати у складі автоматизованих систем керування у вигляді підсистем:

- ідентифікації стану об'єкта керування;
- реалізації керуючих дій.

Використання таких підсистем є доцільним за умови, коли об'єкт керування є складною або активною системою.

### **Розділ 3. Задачі прогнозування у аспекті ідентифікації складних об'єктів і систем**

Одним з найважливіших завдань кібернетики є моделювання складних систем на основі спостереження їх взаємодії з навколишнім світом. Моделювання необхідне для того, щоб дізнатися про структуру і функції складного об'єкта (завдання ідентифікації) і визначити відповідні засоби активного впливу на нього (завдання керування). При цьому не зважаючи на об'єм інформації про об'єкт, проводять моделювання його майбутньої поведінки (завдання прогнозування або екстраполяції).

При довготривалому прогнозуванні враховують умови, за яких необхідно оцінювати можливі якісні зміни об'єкта. У цьому випадку можуть з'явитися нові впливи (некеровані фактори) зовнішнього середовища і завади, що може зумовити появу нових процесів у системі (у процесі прогнозування). Проте, завдання довготривалого прогнозування не тільки є складнішим, ніж завдання ідентифікації і короткотривалого прогнозування, воно є важливим ще й з точки зору практичної реалізації. Дослідження довготривалих наслідків моделювання має велике значення, особливо у складних екологічних, економічних, соціальних і інших системах.

Цікавим, з наукової і практичної точки зору, є прогнозування не лише якісних показників, але й кількісне (інтервальне) прогнозування процесів, при якому вказують рівні (інтервал зміни факторів чи діапазон їх впливу). Завдання кількісного прогнозування, при відповідній складності досліджуваної системи, є виключно складним і, як показують результати останніх досліджень, це завдання на сьогодні у достатній мірі ще не вирішено. Зазвичай виявляється, що для вирішення такого завдання лише якісних уявлень людини, тобто таких, що побудовані на методах інтуїції експерта, недостатньо [46].

Довготривалі прогнози, засновані на обробленні думок експертів, на практиці підтверджувалися далеко не завжди. Виявилось, що експерти можуть вирішувати досить добре лише порівняно прості завдання короткотривалих і якісних

довготривалих прогнозів. Прикладом можуть бути відмінності у думках експертів про стратегію збереження озонового шару чи про пояснення перебігу процесів зміни клімату Землі [47]. Виходячи з цього можна стверджувати, що при зростанні розмірності і складності структури об'єкта лише інтуїтивні підходи, при розробленні моделі і подальшого прогнозування її поведінки, є недостатніми.

Широко поширені при реалізації процесу ідентифікації об'єктів такі методи, як суб'єктивний системний аналіз та імітаційне моделювання, ґрунтуються на дедуктивному підході. Такий підхід зумовлює глибоке вивчення структури об'єктів моделювання для розвитку теоретичних уявлень розробника моделі і накопичення достатнього об'єму апріорної інформації. При цьому об'єм відомостей про структуру об'єкта моделювання повинен бути таким, щоб можна було б:

- сформулювати достовірні математичні рівняння, які описували б взаємозв'язок між усіма значущими елементами системи;
- вибрати оптимальну область моделювання (кількість рівнянь).

На жаль не можливо досягнути такого рівня знань у багатьох галузях, зокрема у таких, як: соціологія, біологія, екологія та інших науках про природу і суспільство. Отже, при використанні імітаційних методів моделювання необхідно глибоко вивчати та аналізувати структуру об'єкта моделювання і водночас мати великий об'єм апріорної інформації про поведінку об'єкта у різних умовах впливу факторів зовнішнього середовища [48, 49]. Зокрема, при побудові моделі досить часто необхідно мати дані про поведінку складних об'єктів і систем в умовах низького рівня завад, результати про нормальний розподіл відхилень, що зумовлює проведення аналізу великих вибірок даних.

Методи самоорганізації математичних моделей ефективно використовують при ідентифікації і подальшому прогнозуванні поведінки об'єктів, оскільки їх принцип дії ґрунтується на виборі оптимального варіанту побудови алгоритму досягнення мети за зовнішніми критеріями. При цьому надають можливість безпосередньо самій обчислювальній машині



знайти необхідну інформацію на основі оброблення наявних (часто досить коротких) вибірок даних. Особливістю методів самоорганізації математичних моделей є те, що вони забезпечують об'єктивний характер вибору моделі або системи моделей. Експертові при цьому досить вказати тільки два фактори:

- зовнішні критерії;
- послідовність їх застосування.

При побудові моделі, яка враховує значну кількість критеріїв (або деякий комбінований критерій), необхідно використовувати принцип регуляризації, тобто – однозначність вибору і підвищення завадостійкості системи. У цілому використання методів самоорганізації математичних моделей забезпечує вирішення задачі завадостійкого об'єктивного вибору моделі з оптимальною складністю. У цьому випадку задачу вирішують за допомогою відкидання незначущих варіантів побудови моделі згідно заданої ієрархії зовнішніх критеріїв, які попередньо вибрано експертом моделі.

При цьому зауважимо, що не слід вважати непридатним, при моделюванні і прогнозуванні поведінки системи у вибраних умовах впливу зовнішнього середовища, того чи іншого методу ідентифікації. Практика показує, що такі етапи ідентифікації, як вибір алгоритму моделювання, розширення початкової множини змінних (зокрема, використання приростів і сум), вибір множини опорних функцій і класів рівнянь, як правило, завжди дозволяють отримувати достатньо точні результати. Знаючи загальні прийоми моделювання та прогнозування і використовуючи широкий спектр алгоритмів та методів моделювання, на кожному етапі ідентифікації завжди потрібно експериментувати для отримання адекватної до реальної поведінки об'єкта складної моделі [50].

Методи самоорганізації дозволяють отримати моделі, на яких можна експериментувати (що не завжди можливо на реальному об'єкті). На основі цього здійснюють об'єктивний (не залежний від уявлень експерта) системний аналіз та ідентифікацію складних об'єктів, аналізуючи водночас перебіг фізико-хімічних процесів у системі.

Подальший розвиток теорії, методів і алгоритмів самоорганізації моделей дозволить отримати точне довготривале кількісне прогнозування для різних важливих галузей науки і виробництва.

### 3.1. Методи прогнозування

*Прогнозування* – це науково обґрунтоване оцінювання майбутніх станів об'єкта. При цьому процеси прогнозування показують:

- коли і у якій послідовності відбуватиметься перебіг зміни станів об'єкта;
- як той чи інший стан об'єкта впливатиме на виконання завдань, для яких даний об'єкт призначений.

Прогнозування є невід'ємною частиною будь-якої наукової діяльності. Для математичного опису об'єктів використовують відомості з різних галузей науки у вигляді тих або інших закономірностей. При цьому відповідно до завдання, поставленого перед об'єктом, доводиться абстрагуватися від його незначущих властивостей. Зокрема, при моделюванні коливань маятника немає необхідності враховувати його вартість або забарвлення і т.д. Усі значущі властивості об'єкта і взаємозв'язки у ньому використовують для пізнання структури системи (апріорна інформація) і прогнозування процесів, що відбуваються у ній. А деякі нерегулярні впливи зовнішнього середовища на об'єкт розглядають як випадкові дії (некеровані фактори).

Суттєвішими є зовнішні впливи (у тому числі дії управління і керування, що можна змінювати у процесі моделювання), які визначають якісний хід процесу. Зазначимо, що при прогнозуванні необхідно мати відомості про зміну зовнішніх факторів, які впливають на об'єкт. У такому випадку проводять *“нормативне прогнозування”*. Нормативне прогнозування пов'язано з алгоритмами керування, кожен з яких відповідає одному із варіантів зміни зовнішніх керуючих факторів або факторів завад [51].

Залежно від галузі використання об'єктів ідентифікації у спектрі прогнозування їх поведінки можна виділити такі напрямки:

- прогнозування майбутніх винаходів, технічних характеристик і функціональних можливостей машин та приладів;
- ймовірнісне прогнозування майбутніх технічних характеристик, форм і параметрів, яке ґрунтується на аналізі кількісних співвідношень та на законах логіки;
- прогнозування (з певною достовірністю) науково-технічних властивостей для заданого інтервалу часу;
- оцінювання ймовірності можливих шляхів і досягнень розвитку науки та техніки, а також оцінювання необхідних для їх досягнення ресурсів;
- оцінювання майбутніх технологічних змін структури і параметрів об'єкта, які відбудуться на тому чи іншому етапі моделювання з високою ймовірністю;
- прогнозування майбутньої структури і властивостей системи з певною (високою) ймовірністю за умови, що вплив факторів зовнішнього середовища є незмінним (якщо інтенсивність їх впливу змінюється, то не суттєво);
- науково-обґрунтований аналіз (з певною ймовірністю) стану об'єкта на конкретному етапі моделювання або аналіз можливих шляхів досягнення цього стану, який було спроектовано на початкових стадіях ідентифікації для досягнення часткової мети у спектрі загальної мети моделювання;
- вибір головної мети, що завжди передуює плануванню експерименту, а також її розкладання на ієрархію конкретних (поетапних) цілей і завдань.

У процесі прогнозування визначають значущість стану системи і умов впливу керованих та некерованих факторів. Виходячи з цього формують мету ідентифікації, моделювання і подальшого прогнозування [52].

Як видно з наведеного вище, суттєвими факторами у процесі прогнозування є: час, мета, структура, навколишнє

середовище, ресурси та ін. Взаємозв'язок таких же факторів вивчає теорія автоматизованого управління технологічних систем. Тому прогнозована величина ( $y$ ) у загальному випадку може бути представлена як змінна стану або вихідна величина деякої системи управління. На вхід такої системи управління подають відповідні вхідні керовані величини ( $x$ ). Водночас зазначимо, що в реальних умовах система функціонує під впливом деяких некерованих завад ( $s$ ), які можуть з часом суттєво змінити як структуру, так і властивості об'єкта ідентифікації.

Як зазначалося у розділі 1, досліджувані об'єкти є, у загальному випадку, динамічними і стохастичними керованими системами. У зв'язку з цим, завдання прогнозування можна сформулювати таким чином: необхідно з певною ймовірністю спрогнозувати зміну станів динамічної системи (або об'єкта дослідження) під дією випадкових впливів. На початковому етапі у результаті спостереження отримують апіорну інформацію про загальну структуру системи. Надалі знаходять модель, що дає можливість прогнозувати вихідну величину ( $y$ ) на встановленому часовому інтервалі прогнозування:  $t \in P$ .

Якщо інтервал прогнозування невеликий, тоді вибирають модель, яка відображає механізм перебігу фізичних і хімічних процесів у об'єкті, а також його структуру (фізична модель). Якщо ж ставиться завдання довготривалого прогнозування, тоді будують простішу нефізичну модель.

У загальній теорії інформації вивчають системи, що складаються з таких елементів [53, 54]:

- джерело дійсного сигналу;
- шифрувальний пристрій;
- лінії зв'язку;
- дешифрувальний пристрій;
- приймач.

Стосовно теорії автоматизованого управління можна провести такі аналогії: сигнал відповідає вихідній величині точної фізичної моделі об'єкта, шифрувальний пристрій – системі планування експерименту. Зазначимо, що лінії зв'язку піддаються впливам різноманітних завад, шумів і перешкод.

Тому сигнал, який отримують на виході ліній зв'язку, є спотвореним і відповідає спотвореній вибірці експериментальних даних. Дешифрувальний пристрій можна ототожнити зі структурою моделі “чорного” чи “сірого” ящиків або з багатьма іншими способами оброблення даних, що отримали назву “зворотних перетворень”. У результаті таких перетворень проводять інтерполяцію даних або прогнозування перебігу процесів на різних етапах моделювання (рис. 3.1). Зазначимо, що процес прямого перетворення починається з аналізу вихідного стану системи. При цьому вихідним станом системи може бути як початковий стан (коли лише починають процес ідентифікації, маючи при цьому певний об'єм апіорної інформації), так і проміжний стан (стан системи на проміжному етапі імітаційного моделювання, у якому аналізують як апіорну, так і апостеріорну інформацію про поведінку об'єкта ідентифікації).

**Прямим перетворенням** будемо називати отримання різних імовірнісних та інших математичних характеристик процесу за даними його спостереження у інтервалі інтерполяції. Зокрема, побудова математичної моделі будь-якого вигляду: кореляційної функції, характеристик спектральної густини, графу (матриці) кількості переходів є прикладами прямого перетворення. Таке “прогнозування без моделі” відноситься до будь-якого з перерахованих вище прямих перетворень, при якому немає етапу моделювання об'єкта (рис. 3.1). Для всіх ймовірнісних характеристик процесу таке прогнозування приводить до широкого спектру варіантів вирішення поставленої задачі. Для досягнення однозначності знаходження ймовірнісних характеристик (що існує, наприклад, при використанні рядів Фур'є або перетворень Лапласа) потрібна додаткова інформація або регуляризуюча дія зовнішніх факторів. Простим виходом з такої складної ситуації є прийняття експериментатором на даному етапі дослідження припущення про стійкість ймовірнісних або інших математичних характеристик протягом встановленого часу ідентифікації. Тоді будь-яка характеристика системи (модель, кореляційна функція, спектр, граф

кількості переходів та ін.), яка отримана за даними спостереження у інтервалі інтерполяції, є незмінною і у інтервалі прогнозування.



Рис. 3.1. Схема прямих і обернених перетворень під час реалізації процесів моделювання і прогнозування.

Відомо, що при прогнозуванні, яке ґрунтується на побудові моделі, враховують умову її стійкості до зовнішніх впливів [55]. З наведеного вище можна зробити висновок, що в умовах прогнозування без моделі (коли враховують інші характеристики: кореляційна функція, спектр, граф кількості переходів) також можна стверджувати про їх стійкість до зовнішніх впливів.

У цьому плані слід конкретизувати, що *регуляризацією рішень* є умова стійкості ймовірнісних характеристик системи, яка забезпечує однозначність і високу значущість прийнятих рішень [56].

*Оберненим перетворенням* будемо називати отримання вихідного (початкового чи проміжного) стану системи за його математичною характеристикою з використанням наведеної вище умови стійкості, необхідної для отримання однозначного вирішення задачі. За допомогою оберненого перетворення можна вирішувати задачу відновлення вихідного стану системи не лише у інтервалі інтерполяції, але й у інтервалі відновлення кожного наступного проміжного стану системи ідентифікації.

Авторами запропоновано методи реалізації процесу оберненого перетворення [57-59]. Розглянемо декілька з них.

*Обернене перетворення за умовою стійкості кореляційної функції.* Неперервна функція у нескінченному інтервалі спостереження за перебігом процесу визначається за допомогою інтегралу:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt.$$

При моделюванні оцінюють кореляційну функцію у заданому інтервалі часу (від  $t=-T$  до  $t=+T$ ):

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t - \tau)dt.$$

При переході до дискретного відліку часу інтервал замінюють сумою, а функцію оцінюють через рівні інтервали (кроки) часу:

$$\Delta t = h = 1.$$

При цьому отримують дискретне оцінювання ординат кореляційної функції:

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{i=-T}^{i=+T} x_i x_{(i-\tau)},$$

де:

$x_i$  – змінна ордината процесу.

**Приклад.** Розглянемо короткотривале (однорівневе) прогнозування за критерієм стійкості кореляційної функції. Попередньо вибрано інтервал вимірювання змінної  $x(t)$ , що містить п'ять ординат:  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ . На цьому інтервалі можуть бути розраховані ординати оцінювання кореляційної функції, отримані за формулою:

$$k(\tau) = \frac{1}{T + 1 - \tau} \sum_{i=\tau}^T x_i x_{x-\tau}.$$

У цьому випадку виконують пряме перетворення за такими формулами:

$$k_0 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)/5;$$

$$k_1 = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)/4;$$

$$k_2 = (x_0x_2 + x_3x_1 + x_2x_4)/3;$$



$$k_3 = (x_0x_3 + x_4x_1)/2;$$

$$k_4 = (x_0x_4).$$

*Аналогічні рівняння можна запропонувати для інтервалу, який містить такі координати:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Тоді прогнозування з упередженням на один крок (за умови, що прогнозована змінна  $x=x_5$ ) виглядатиме таким чином:*

$$k'_0 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)/5;$$

$$k'_1 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5)/4;$$

$$k'_2 = (x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5)/3;$$

$$k'_3 = (x_1x_4 + x_2x_5)/2;$$

$$k'_4 = (x_1x_5).$$

*На наступному етапі використовують критерій стійкості, зміст якого полягає у тому, що кореляційна функція для обох інтервалів є однаковою, тобто:*

$$k_0 = k'_0; k_1 = k'_0; k_2 = k'_2; k_3 = k'_3; k_4 = k'_4.$$

*У результаті отримують рівняння для прогнозування властивості ( $x_5$ ):*

$$x_5(0) = x_0;$$

$$x_5(1) = x_0x_1/x_4;$$

$$x_5(2) = x_0x_2/x_3;$$

$$x_5(3) = x_0x_3/x_2;$$

$$x_5(4) = x_0x_4/x_1.$$

Кожне рівняння є умовою співпадання вказаних двох кореляційних функцій при зсуві:

$$\tau = 0, 1, 2, 3, 5.$$

Зауважимо, що середня квадратична похибка розбіжності кореляційних функцій у всіх точках має бути мінімальною. Для цього отримані рівняння слід розглядати як умовні рівняння Гауса. Тоді можна отримати однокорокове прогнозування:

$$x_5 = x_0(1+x_1x_4+x_2x_3+x_3x_2+x_4x_1)/(1+x_4^2+x_2^2+x_3^2+x_2^2+x_1^2).$$

Такий процес розв'язання будемо називати *згорткою умовного прогнозування*.

На основі наведеного прикладу можна зробити висновок про те, що обернене перетворення дискретного оцінювання кореляційної функції за критерієм її стійкості (за умови одного крокового прогнозування) реалізують, у найпростішому випадку, шляхом розв'язування лінійних рівнянь.

**Обернене перетворення за критерієм стійкості матриці кількості переходів.** При побудові графу або матриці графік зміни функції замінюють ступінчастою кривою, при цьому функція приймає тільки ряд заданих значень (рівнів), що утворюють області дискретизації.

Відомо, що втрата інформації при дискретизації співвідноситься з межами її областей. Водночас найменшу втрату інформації спостерігали за умови рівності кількості експериментальних точок у вибраних областях [60]. Кількість рівнів вибирали довільно, але за умови, щоб у кожній області було не менше 5-10 точок. Стійкість графа (матриці) кількості переходів полягає у тому, що вказана рівність числа точок у кожній області дискретизації зберігається не тільки у інтервалі вимірювань (інтерполяції), але й у інтервалі прогнозування. Цього досягають адаптацією матриці за допомогою оберненого зв'язку.

За умовою стійкості середньої кількості переходів процесу з одного рівня дискретизації на інший необхідно використовувати обернений зв'язок. Це означає, що матриця (або граф) кількості переходів з кожним черговим кроком прогнозування повинна коректуватися за допомогою оберненого зв'язку. Таким чином досягають кореляції, коли на кожному наступному етапі різниця між показниками характеристик матриць спостереження і прогнозування буде зменшуватись, а на останньому етапі така різниця дорівнюватиме нулю.

У деяких випадках за відомим алгоритмом одночасно виконують два варіанти прогнозування, що відрізняються за кількістю рівнів дискретизації вихідної величини. Після цього узгоджують результати прогнозування за *критерієм балансу*, коли аналізують різні пари варіантів прогнозування, обчислюють критерій і вибирають оптимальну модель.

З іншого боку, у межах однієї системи критерій балансу використовують для аналізу характеристик її окремих частин. У такому випадку характеристики системи у окремо взятих її частинах повинні співпадати у межах незначної похибки. Сполучення (згортка) тимчасового і просторового критерію балансу є досить ефективною і часто використовується експертами.

Зазначимо, що обернене перетворення є об'єктивним методом прогнозування, оскільки експерт не втручається у процес обчислень при функціонуванні моделі. На результат прогнозування можна впливати лише за допомогою зміни критеріїв селекції на проміжних етапах самоорганізації моделі. На початковому етапі експерти призначають тільки загальні критерії вибору, а у подальшому у самоорганізацію моделі не втручаються. У разі неадекватності моделі на проміжному етапі досягнення мети експерти можуть додатково підкоректувати вищий рівень діапазону зміни критеріїв (гранична завадостійкість, часові параметри прогнозування, тривалість обчислень та ін.). Таким чином вирішують завдання об'єктивного системного аналізу, нелінійної ідентифікації і довготривалого кількісного прогнозування процесів за критерієм балансу.

Об'єктивне обернене перетворення на сьогодні розроблено лише для вирішення завдань прогнозування. Крім того, розробляють методи автоматизованого переходу від однієї характеристики до іншої на одному або на різних проміжних рівнях прогнозування. Наприклад, за кореляційною функцією початкової реалізації можна знайти кількість і діапазон зміни її значущих вхідних факторів, що, у свою чергу, дозволяє вирішити завдання ідентифікації.

Водночас зазначимо відмінність між відомими ймовірнісними методами прогнозування і методами оберненого перетворення. Використання ймовірнісних методів прогнозування не забезпечує отримання інформації про кількісні показники властивостей системи [61]. На основі цих методів можна отримати відомості про ймовірність перебігу процесів або про властивості системи у тому чи іншому стані. Іншими словами, за допомогою ймовірнісних методів не можна вирішувати задачі оберненого перетворення від ймовірнісних характеристик до кількісного прогнозування.

Водночас за наявності додаткового зовнішнього критерію, що надає інформацію про фазу початкової реалізації випадкового процесу, відбувається регуляризація завдання оберненого перетворення. За матрицею кількості переходів, спектром або кореляційними функціями здійснюють початкову реалізацію випадкового процесу і його кількісне прогнозування. Зазначимо, що для вирішення завдань з багатьма факторами перевагу надають оберненому перетворенню кореляційних функцій. Методи, що використовують матриці кількості переходів, зручні тільки для вирішення однофакторних (скалярних) завдань моделювання (тобто завдань, де у кожній точці поля задано значення лише однієї величини або фактора).

Як зазначалося вище існує кількісне і якісне прогнозування.

**Кількісним** (або інтервальним) прийнято називати прогнозування, що вказує значення рівнів прогнозованої змінної з точністю до  $\pm 10\%$  на усьому інтервалі часу прогнозування.

*Якісне* прогнозування не забезпечує такої точності, воно характеризує процес на ймовірнісному рівні (оцінюють характеристики об'єкта, порівнюючи їх з аналогічними характеристиками інших систем).

Розрізняють методи, призначені для кількісного (точного) і якісного (нечіткого) прогнозування. Кількісне прогнозування використовують у детермінованих механічних системах, які не підлягають суттєвим зовнішнім впливам. У такому випадку додатково використовують *нормативне прогнозування*, що розглядає безпосередньо процес прогнозування при заданій зміні керуючих впливів. Основним завданням нормативного прогнозування є не кількісна інформація, а знаходження моментів часу, коли виникають критичні можливості вибору варіанту управління.

Найчастіше на практиці необхідно прогнозувати випадкові процеси, що мають значну детерміновану складову. У цьому аспекті достатньо використовувати точне кількісне прогнозування для аналізу подальшої поведінки системи і прийняття рішень. Водночас при самоорганізації довготривалого кількісного інтервального прогнозування вибирають і досліджують кілька моделей, аналізуючи їх поведінку в умовах впливу зовнішнього середовища. А відсіювання неадекватних моделей забезпечують зміною керуючих впливів при нормативному прогнозуванні, внаслідок аналізу перебігу процесів у системі.

Крім того, існує декілька підходів до визначення тривалості процесу прогнозування. Зокрема, *короткотривалим* називають прогнозування на 1-2 кроки вперед. З іншого боку короткотривалим називають процес прогнозування, у якому тривалість випередження подій складає 10-20% від тривалості спостереження за об'єктом.

Прогнозування називають *довготривалим*, якщо час випередження подій перевищує 10 кроків, причому цей час є рівним до тривалості спостереження за об'єктом.

Для стаціонарних процесів час випередження порівнюють з часом кореляції. Час випередження не може перевищувати час кореляції. Під часом кореляції стаціонарного стохастичного процесу з кореляційною функцією розуміють час, протягом

якого ця функція відхиляється від нуля не більше ніж на 5%. Це означає, що детерміновані процеси (наприклад, синусоїдальні коливання) можна адекватно прогнозувати на достатньо тривалий інтервал.

Враховуючи однозначний зв'язок між кореляційною функцією і функцією спектральної густини випадкового процесу можна задати граничну частоту, адекватну до часу кореляції. Тому моделі для довготривалого і короткотривалого прогнозування досить різні. Моделі для ідентифікації характеристик об'єкта та короткотривалого прогнозування співпадають і при малому рівні завад зазвичай є фізичними моделями, які відтворюють механізм дії об'єкта. Такі моделі абсолютно не придатні для довготривалого прогнозування. При такому прогнозуванні широко і ефективно використовують нефізичні моделі апроксимації характеристик об'єкта.

При коротко- чи довготривалому прогнозуванні часто використовують експериментальні методи, до яких відносять методи самоорганізації. Застосування методів самоорганізації передбачає, що усі основні тенденції розвитку процесу відображені у таблиці спостереження. Застосуванню експериментальних методів сприяє також суттєва інерційність процесів. Зауважимо, що використання таких методів неефективно у випадках, коли основні напрями розвитку процесу є непередбачуваними.

За допомогою експериментальних методів вирішують задачу прогнозування на основі інформації про попередні стани системи. На наступних етапах прогнозують поведінку системи (чи її моделі) за умови, коли не виникає ніяких принципових (структурних) змін у об'єкті дослідження і зовнішні керуючі фактори змінюються у тих же межах, що й у попередніх станах. У цьому випадку математична модель, отримана на підставі інформації про поведінку об'єкта у попередніх станах, залишається інформативною (або адекватною) протягом усього інтервалу прогнозування.

Відомі різні підходи до прогнозування, які відрізняються за об'ємом необхідної апріорної інформації про [62-65]:

- досліджуваний об'єкт;

- вимірювані характеристики;
- стан і зміну зовнішнього середовища.

При *детермінованому підході* передбачають, що вся інформація є апріорно відомою або може бути отримана на наступних етапах дослідження з достатньою точністю.

*Стохастичний підхід* враховує вплив некерованих факторів і завад, причому досліджувані характеристики розглядають як випадкові величини, ймовірнісні параметри яких отримують за допомогою вибірових експериментів.

Як детермінований, так і стохастичний підхід передбачає наявність у таблиці (баз даних) початкових даних повного інформаційного базису: всі значущі фактори повинні бути враховані. Точність вимірювання факторів має бути достатньо високою.

*Підхід самоорганізації* відрізняється від наведених вище підходів: об'єм апріорної інформації у цьому випадку є мінімальним, а модель будують без врахування деяких суттєвих факторів в умовах, коли завади у декілька разів перевищують сигнал. Це пояснюють тим, що у складних об'єктах фактори корелюють між собою і кожен з них може уособлювати вплив цілої групи факторів. Самоорганізація цікава тим, що зв'язки факторів використовують при їх підбиранні, у тому числі і при підбиранні невідомих факторів.

Методологічною основою застосування самоорганізації для моделювання є припущення про те, що вся інформація про структуру та функціонування системи міститься у невеликій таблиці спостереження за об'єктом моделювання (так звана вибірка даних) і у заданих критеріях вибору моделі. Тому самоорганізацію перш за все можна розглядати як метод зменшення апріорної інформації про об'єкт. При самоорганізації експерт моделі лише вказує множину зовнішніх критеріїв вибору моделі, які необхідні для побудови структури моделі з оптимальною складністю. Самоорганізація математичних моделей вирішує цю задачу без апріорної інформації про залежність закономірностей у досліджуваному об'єкті. Такий підхід часто використовують у математичній фізиці.

Для складних систем, які характеризуються незначною апріорною інформацією, широко використовують *евристичну самоорганізацію* математичних моделей [67-73]. За відомими вибірками значущих факторів та вихідних змінних системи програмним забезпеченням генерується значна кількість моделей і за відповідними критеріями селекції вибирається модель з оптимальною складністю. При цьому на початковому етапі експерт, що будує модель, задає критерії відбору, можливі класи опорних функцій і алгоритм генерування спектру моделей.

Необхідними умовами самоорганізації є:

- початкова таблиця даних спостереження, яку називають вибіркою;
- встановлення закономірності отримання моделей різної складності у межах класу заданих опорних функцій;
- встановлення закономірності поступового ускладнення структури моделей;
- засоби відбору моделей (евристичні критерії селекції), що визначають мету побудови моделі.

Ці умови визначають мінімум апріорної інформації, необхідної для здійснення самоорганізації моделі. У цьому випадку з широкої гами моделей за заданим набором зовнішніх критеріїв вибирають єдину модель з оптимальною складністю. Слід звернути увагу на необхідність апріорного вибору множини вхідних змінних, опорних функцій і закономірностей поступового ускладнення варіантів моделі. Важливим також є вибір критеріїв селекції відповідно до поставленого завдання моделювання.

Зазвичай такий відбір здійснюють на основі надійної апріорної інформації. Множина опорних (базисних) функцій, які використовують при прогнозуванні систем, є невеликою. Можна запропонувати широку гаму опорних функцій і вибрати ту, яка забезпечує мінімум критеріїв селекції моделі. На практиці часто використовують поліноміальні моделі алгебри, лінійні, нелінійні і диференціальні лінійні рівняння, які замінюють кінцево-різницеvими аналогами. Лише у окремих випадках застосовують нелінійні різницеvі рівняння.



Зауважимо, що самоорганізацію розглядають як метод адаптивного синтезу (адаптації) складних систем. Якщо апріорна невизначеність відноситься лише до параметрів системи при постійній (наприклад, заданій структурі), тоді можна застосовувати відомі алгоритми параметричної адаптації і навчання [74]. Якщо ж невизначеною є і структура, тоді необхідно застосовувати алгоритми самоорганізації для структурної ідентифікації.

Під самоорганізацією розуміють спонтанне виникнення структури у автономній замкнутій системі [75]. Для перебігу процесу самоорганізації системи необхідно, щоб були виконані такі умови [76]:

- існує початкова організація (множина опорних функцій);
- відомий механізм випадкових змін цієї організації (множина моделей);
- відомий механізм відбору, за допомогою якого випадкові зміни оцінюють за встановленими критеріями (алгоритм самоорганізації).

Процес самоорганізації пов'язаний зі зменшенням ентропії. У цьому сенсі принципи самоорганізації є предметом дослідження.

З точки зору *синергетики* (як галузі науки), під самоорганізацією у широкому змісті розуміють процес спонтанного збільшення організованості у системі, яка складається з множини елементів і знаходиться під впливом факторів навколишнього середовища.

Вище було показано, що самоорганізацією є вибір моделі, *структура якої характеризується оптимальною складністю*. Під такою структурою розуміють модель, у якій вона (структура) не містить надто багато елементів та зв'язків між ними у моделі і, навпаки, вона містить необхідну кількість елементів, а зв'язки між таким елементами є науково-обґрунтованими й функціонують з певною достовірністю та ймовірністю. На основі аналізу процесу функціонування таких зв'язків на різних етапах реалізації моделі роблять висновки як про адекватність моделі до реального об'єкта, так і про

перспективність подальшого прогнозування поведінки об'єкта за вибраною моделлю.

Самоорганізацію моделі, структура якої характеризується оптимальною складністю, з множини моделей математично описують зменшенням ентропії і збільшенням кількості інформації. Кількість інформації, у свою чергу, є мірою порядку, організації і є оберненою до ентропії системи. Такий підхід узгоджується з поширеним у фізиці визначенням: поняття самоорганізації тісно пов'язане з порядком, який, у свою чергу, пов'язаний з поняттям ентропії [77]. Очевидно, що теорія самоорганізації моделей вивчає декілька структур алгоритмів самоорганізації математичних моделей, вибираючи з них оптимальний.

### **3.2. Самоорганізація математичних моделей**

У попередньому розділі показано, що метод самоорганізації математичних моделей забезпечує побудову моделей прогнозування. Крім того, такий метод дозволяє вирішувати:

- завдання інтерполяції і короткотривалого прогнозування;
- завдання довготривалого прогнозування;
- завдання розпізнавання образів.

Завдання ідентифікації, прогнозування і розпізнавання образів може бути вирішено як детермінованими або ймовірнісними методами, так і за допомогою самоорганізації і поступового ускладнення моделі з одночасним оцінюванням її за зовнішніми критеріями, мінімум яких визначає модель зі структурою оптимальної складності.

Складність структури моделі є пропорційною до мінімуму точок вимірювань (реалізацій), що необхідний для оцінювання усіх параметрів системи. Для поліноміальних моделей визначають (найчастіше за методом найменших квадратів) коефіцієнти, які характеризують значущість характеристик системи. При самоорганізації моделей на початковому етапі генерують спектр моделей, після чого задають структуру

рішень різної складності. Самоорганізація (оцінювання за критеріями) забезпечує нівелювання випадкових зв'язків [78].

Після відкидання непридатних моделей множину, що залишилась, оцінюють за критеріями якості і вибирають модель *зі структурою оптимальної складності*. Алгоритми самоорганізації розрізняють за:

- способом генерування моделей з різною складністю структури: однорядні (комбінаторні) і багаторядні (порогові);
- способом уневажнення коефіцієнтів (багатоетапні);
- спектром критеріїв.

Моделі з багатьма критеріями будують для підвищення завадостійкості алгоритмів самоорганізації.

Крім того, розрізняють методи повної і неповної математичної індукції.

Повна математична індукція реалізується у однорядних алгоритмах, а неповна – у алгоритмах багаторядності. Використання методів повної індукції зумовлює аналіз усіх можливих елементарних моделей, що потребує надто багато часу і затрат. У таких випадках застосовують методи неповної індукції, при яких вибирають комбінації опорних функцій (наприклад, багаторядні алгоритми). Однак, у алгоритмах багаторядності існує ймовірність не врахування моделі зі структурою оптимальної складності. Хоча, у той же час, у процесі функціонування алгоритму на етапі відкидання незначущих (неадекватних) моделей обов'язково буде знайдена близька за критерієм модель (за структурою оптимальної складності).

Авторами розроблено основні принципи побудови алгоритмів самоорганізації математичних моделей складних об'єктів [53, 54, 78]. Розглянемо кожен з них.

*Принцип самоорганізації моделі.* Основний принцип самоорганізації можна сформулювати таким чином: при поступовому збільшенні складності структури моделі значущість зовнішніх критеріїв спочатку зменшують до мінімуму, а потім залишають постійною або збільшують.

Перше найменше значення критерію визначає єдину модель зі структурою оптимальної складності. Завжди можна знайти такий спосіб зміни складності структури моделі, щоб вказаний мінімум був єдиним. Крім того, якщо використання попередньо вибраного критерію не приводить до вибору оптимальної моделі або ж вказаний критерій є чутливим до несуттєвих змін вхідних даних, тоді додавання до нього іншого критерію (регуляризуючого оператора) дозволяє однозначно вибрати модель зі структурою оптимальної складності.

*Принцип зовнішнього доповнення.* Для однозначного вирішення завдання інтерполяції необхідно вибрати зовнішнє доповнення – оптимальний зовнішній критерій. Під *зовнішнім критерієм* будемо розуміти критерій, що обчислюють, використовуючи інформацію, яку попередньо не застосовували при оцінюванні параметрів моделі чи системи. Для кожного зовнішнього доповнення отримують відповідне йому розв'язання задачі інтерполяції. Відповідно, моделі зі структурами оптимальної складності можуть бути різними залежно від вибору зовнішнього доповнення.

Внутрішні доповнення, тобто критерії, що не використовують додаткової інформації, за наявності завад не можуть вирішити завдання вибору моделі зі структурою оптимальної складності. Середньоквадратичне відхилення функції зі зростанням складності моделі монотонно зменшується і у точці, де кількість параметрів моделі дорівнює об'єму вибірки, дорівнює нулю. Отже, складніша модель завжди є точнішою.

*Зовнішні критерії селекції моделей.* При регресійному аналізі для різних вибірок одного і того ж процесу отримують різні функції регресії, тому немає сенсу проводити кількісний аналіз коефіцієнтів регресії [79]. Результат суттєво змінюється, якщо рівняння регресії (моделі) вибирають за *критерієм мінімуму зміщення*. Згідно цього критерію необхідно, щоб моделі, отримані на проміжному етапі експерименту якнайменше відрізнялися від моделей, отриманих на інших проміжних етапах прогнозування. Критерій мінімуму зміщення

є важливим, оскільки несуперечність є обов'язковою властивістю оптимальної моделі.

Часто додатково використовують *критерій регулярності*, який дозволяє перевірити, чи є середньоквадратична похибка оцінювання незначущих факторів (які не використовують для оцінювання коефіцієнтів) мінімальною. Критерій можна застосувати як допоміжний (регуляризує) до основного критерію мінімуму зміщення.

Для регуляризації різницевої моделі прогнозування використовують *критерій точності багатокрокового прогнозування*. Для перевірки адекватності алгебраїчних моделей застосовують *критерій точності короткотермінового прогнозування*, який, у свою чергу, також часто використовують, як обмеження, при відкиданні незначущих моделей.

*Розділення таблиці даних на частини.* Основний критерій мінімуму зміщення (або несуперечності) забезпечує розділення таблиці даних на дві рівні частини  $A$  і  $B$ . Зазвичай таблицю початкових даних процесу ділять на дві або три частини вибірки:

- навчальну;
- вибірку перевірки;
- екзаменаційну.

Навчальна вибірка призначена для отримання критеріїв оцінювання параметрів моделі (наприклад, коефіцієнтів регресії). Вибірку перевірки застосовують для вибору структури моделі оптимальної складності. У цьому випадку вибірка перевірки повинна відповідати вимогам повторюваності експерименту. Екзаменаційну вибірку застосовують для оцінювання адекватності математичних моделей, що мають різну структуру (такі моделі містять вхідні фактори, що мають різну фізичну природу). Крім того, екзаменаційну вибірку можна використовувати для вибору оптимального розділення таблиці даних на навчальну вибірку і вибірку перевірки.

*Гіпотеза селекції.* Принцип селекції широко використовують у методах прогнозування. У теорії Ф.Розенблатта показано, що використання цього принципу при моделюванні і прогнозуванні поведінки систем передбачає дотримання таких основних правил [80]:

- для кожного ряду селекції моделі існує деяка мінімальна кількість комбінацій (яку називають “свободою вибору”), що забезпечує тотожність селекції багаторядності до моделі зі структурою оптимальної складності;
- надмірна кількість рядів (або етапів прогнозування) призводить до виродження моделі (інформаційна матриця стає неадекватною); навпаки, складніше завдання селекції вимагає у процесі прогнозування значної кількості рядів для отримання моделі зі структурою оптимальної складності.

Крім того, для реалізації принципу селекції необхідно визначити:

- алгоритм генерування спектру початкових моделей відбору;
- правило підвищення складності моделей відбору;
- критерії селекції і послідовність їх застосування;
- величину граничного значення, що визначає кількість моделей, які переходять у наступний ряд, внаслідок чого обмежується “свобода вибору” моделей;
- правило розділення початкових даних на навчальну вибірку, вибірку перевірки і екзаменаційну вибірку даних, причому для обох величин (граничної і розділення) існують оптимальні значення.

Виходячи з наведеного вище, авторами сформульовано теорему [81]: *ймовірність того, що при селекції не буде знайдено оптимальне рішення (але буде отримано одне з кращих суміжних рішень) зменшується, коли вихідна величина моделі-претендента суттєво перевершує встановлене граничне значення.*

Згідно цієї теореми, неефективні комбінації моделей, відкинуті у процесі моделювання на попередніх рядах, не

можуть дати ефективні комбінації на наступних рядах прогнозування.

Відповідно до теорії самоорганізації метод генерування послідовних комбінацій і відбору математичних моделей, при зростанні їх складності, є універсальним методом пошуку моделі зі структурою оптимальної складності. Оптимальне рішення знаходять тоді, коли складність моделі є однаковою або простішою від складності досліджуваного об'єкта. Такий підхід має важливе значення за наявності завад при аналізі початкових даних. Тому у алгоритмах багаторядності при неповному базисі можлива поява несуттєвих похибок.

Показано, що для функцій у вигляді поліномів похибку багаторядності слід знаходити при аналізі різниці процесів прогнозування, отриманих на моделях повної і неповної індукції [78]. При цьому авторами розроблено алгоритми, які на кожному етапі прогнозування додатково використовують початкові спостереження, тому у них відсутня вказана похибка [82].

*Принцип збереження свободи вибору.* Принцип збереження свободи вибору, або принцип неостаточних рішень, є одним з фундаментальних у самоорганізації. Він опосередковано доповнює широко поширений до теперішнього часу принцип “жорсткого” аналізу, або “жорсткого планування”, у якому на кожному етапі прийняття рішення не залишають свободи вибору. Відповідно до цього принципу вибір оптимальної моделі досягають за допомогою поетапного виконання рядів рішень. Свобода вибору забезпечується тим, що на кожен наступний ряд селекції передається не одне рішення, а декілька кращих, відібраних при виконанні попереднього ряду.

Авторами достатньо повно описано вказаний принцип: приймати рішення у даний момент часу необхідно так, щоб у наступний момент часу, коли знову виникне необхідність прийняття рішень, зберігалася б свобода вибору рішень [53-55]. У працях Д.Габора запропоновано міру свободи прийняття рішення. Такою мірою у фазовому просторі є фазовий об'єм або радіус дії конкретної характеристики.

При самоорганізації математичних моделей принцип неостаточних рішень (збереження свободи вибору) Д.Габора застосовують у двох випадках:

- при розробленні алгоритмів багаторядності;
- при послідовному застосуванні набору критеріїв для вибору кращих моделей.

Принцип збереження свободи полягає у тому, що у процесі послідовного прийняття рішень на кожному етапі реалізації алгоритму вибирають визначену кількість оптимальних рішень. При цьому кількість оптимальних рішень необхідно вибирати так, щоб подальше їх збільшення не приводило до суттєвого поліпшення результатів селекції. Показано, що лише при реалізації останнього ряду алгоритму прогнозування, де досягають мінімуму критерію селекції, вибирають єдине оптимальне рішення – модель зі структурою оптимальної складності [83].

Процеси управління, планування і розпізнавання образів, де на кожному етапі реалізації алгоритму визначають єдине рішення, можна охарактеризувати як “жорсткі” або детерміновані. Якщо при реалізації кожного етапу алгоритму прогнозування вибирають певну кількість рішень, які, відповідно до прийнятого критерію селекції, є близькими до оптимального, можна стверджувати, що це відповідає принципам багаторядності. Багаторядність і наявність свободи вибору після кожного ряду селекції є основними властивостями алгоритмів самоорганізації.

*Застосування евристичних методів.* Точність результатів моделювання залежить не тільки від досконалості математичного апарату (обчислювальних програм), але також від аспектів вибору критерію якості і ефективності його застосування. Евристичний характер самоорганізації моделей виявляється при виборі:

- граничної функції часткових описів (формування варіантів моделей);
- критеріїв селекції;
- способу регуляризації;
- способу нормування змінних;



- конкретної реалізації послідовного підвищення складності моделей.

Граничні значення, які використовують при граничному відборі (селекції), задають евристично і уточнюють за допомогою багатократного повторення обчислень і порівнянням векторів.

### **3.3. Етапи вибору моделі зі структурою оптимальної складності**

Відповідно до принципу самоорганізації з використанням неповної математичної індукції і методу багаторядності селекції отримують набір варіантів моделі при заданому вигляді граничних функцій. У загальному випадку на кожному етапі селекції отримують лінійні за коефіцієнтами моделі. Використання повної математичної індукції приводить до формування однорядних комбінаторних алгоритмів.

Для простоти обчислень при оцінюванні коефіцієнтів на навчальній послідовності можна застосувати метод найменших квадратів. Зі збільшенням складності (за умови збільшення кількості змінних або ступеня полінома варіантів моделі) апроксимація на навчальній послідовності стає достовірнішою, тобто середньоквадратичне відхилення постійно зменшується.

Згідно принципу самоорганізації можна стверджувати, що при збільшенні складності моделі зовнішній критерій (наприклад, середньоквадратичне відхилення у вибірці перевірки) зменшується лише до певного значення, а потім зростає.

З метою забезпечення свободи вибору на кожному етапі селекції слід вибирати визначену кількість оптимальних моделей. При цьому кількість встановлених при виконанні алгоритму селекції оптимальних варіантів моделі, відповідно до принципу свободи, має бути вищим від одиниці. Якщо подальше збільшення кількості рядів селекції не приводить до поліпшення зовнішнього критерію, тоді можна вважати, що отримана модель має структуру оптимальної складності.

При реалізації алгоритму самоорганізації апріорі задають:

- правило ускладнення моделі;
- систему граничних функцій;

- критерії селекції;
- метод регуляризації.

Виходячи з наявної множини дій і системи величин у процесі прогнозування будують широкий спектр моделей, після чого вибирають модель з оптимальною складністю її структури. Експерт попередньо задає критерії відбору, клас граничних функцій, алгоритм генерування моделей і спосіб регуляризації. Такий підхід називають індуктивним методом самоорганізації моделей, позаяк шукану модель зі структурою оптимальної складності отримують в результаті повного або неповного раціонального відбору можливих варіантів. У загальному випадку нелінійна задача оптимізації, пов'язана з побудовою моделі зі структурою оптимальної складності відповідно до заданого критерію якості, не може бути розв'язана аналітично за допомогою дедуктивних математичних методів, позаяк залежність критерію якості і складності моделей невідома.

Використання індуктивного методу забезпечує певну об'єктивність у побудові моделі, для чого також необхідно мати мінімальний об'єм апріорної інформації. Водночас під час практичного прогнозування використовують комбінацію детермінованого дедуктивного та індуктивного методів побудови моделі. При цьому необхідно зауважити, що за невеликого об'єму апріорної інформації на початковому етапі прогнозування, необхідно формувати значну кількість конкуруючих моделей, з яких у подальшому вибирають модель зі структурою оптимальної складності.

Вищезгадані принципи застосовують для самоорганізації математичних моделей на основі аналізу вхідних і вихідних величин. При самоорганізації моделей до апріорної інформації ставлять незначні вимоги: достатньо невелика кількість результатів спостереження і формулювання мети моделювання. Виходячи з другої теореми Ф.Розенблатта вважають, що під час прогнозування система сама вчиться розпізнавати образи, однак, для цього необхідно здійснити аналіз нескінченно великої кількості варіантів моделі [80].

Аналогічно при індуктивному підході і повній відсутності апріорної інформації необхідно аналізувати велику кількість

конкуруючих моделей. Тому часто використовують комбіновану методику, направлену на зменшення необхідного, згідно із законом У.Ешбі, набору моделей [84].

Крім того, індуктивну методику самоорганізації не слід розглядати як альтернативу дедуктивній методиці побудови моделей. При комбінованому методі моделі отримують як за допомогою системного аналізу і аксиоматичного підходу, так і за допомогою самоорганізації [85].

Застосування самоорганізації дозволяє скоротити об'єм необхідної апріорної інформації і обмежитися відомостями про кількісні достовірні значення (або їх зміну у процесі прогнозування) декількох значущих факторів. При цьому необхідно, щоб виконувались такі принципи:

- структура моделі на попередніх проміжних і наступних етапах самоорганізації повинна залишатися незмінною;
- певна закономірність зберігається у заданому інтервалі часу;
- задають клас систем, до яких належить модель (лінійна, нелінійна, статична, динамічна, змінна у часі, незмінна у часі і т. д.).

Вибрана модель є оптимальною, коли у процесі прогнозування отримано її структуру і формалізовано зовнішні критерії за допомогою вибору граничних функцій та правила поступового підвищення складності. Зауважимо, що наявність проміжної (тобто такої, що надходить у систему під час реалізації процесу прогнозування моделі) апріорної інформації пришвидшує самоорганізацію моделі. Якщо оперують інформацією про структуру, “*пам'ять*” системи, кількість і діапазон зміни вхідних величин, тоді кількість варіантів, яка необхідна під час пошуку моделі зі структурою оптимальної складності, суттєво зменшується. Водночас зростає точність вирішення задачі, а, отже, і точність ідентифікації та адекватність прогнозування.

Зазначимо, що під “*пам'яттю*” системи будемо розуміти залежність процесу реалізації моделі у проміжних рядах (станах) системи від перебігу процесів у попередніх рядах.

Самоорганізація належить до емпіричних (апостеріорних) методів моделювання. Такі методи, порівняно з теоретичними (апріорними) і напівемпіричними (імітаційними) методами побудови моделей, мають деякі переваги. У тих випадках, коли мають відомості про параметри об'єкта, однак його структура і механізм взаємодії між елементами є невідомими, самоорганізація є єдиним і надійним засобом побудови моделей прогнозування. Як зазначалося вище моделі, отримані у процесі самоорганізації, особливо ефективні для довготермінового прогнозування. Фізичні моделі, отримані на основі математичній теорії досліджуваного класу об'єктів, забезпечують досягнення лише пізнавальної мети (ідентифікація і короткотермінове прогнозування). Функціональне призначення моделей показано у табл. 3.1 [55].

Таблиця 3.1

### Функціональне призначення моделей

Вид моделі	Призначення моделі					
	Емпіричний рівень		Теоретичний рівень			
	Вимірювання	Феноменологічний опис	Інтерпретація	Пояснення	Прогнозування	Перевірка гіпотез
Аналітично-теоретична	-	+	+	+	-	-
Імітаційна	+	+	-	-	+	+
Самоорганізаційна	+	-	-	-	+	+

Кожна модель має свої особливості і обмежену область завдань, що вирішуються нею. Жодна модель не може одночасно виконувати множину завдань. Як було показано Б.Флейшманом, модель не може одночасно виконувати функції прогнозування і побудови теорії [86]. Зокрема, моделі для короткотермінового і довготермінового прогнозування є

різними за структурою, аргументами і методикою оцінювання коефіцієнтів.

З одного боку, при ідентифікації об'єкта аналітично-теоретичний підхід у побудові фізичної моделі може мати перевагу на іншими. Проте, при реалізації кількісного прогнозування (у випадку існування завод) фізична модель є непридатною. З іншого боку, при недостатній апріорній інформації методи побудови моделі (такі як самоорганізація, імітація і аналітично-теоретичний) можуть доповнювати один одного, позаяк вони не є альтернативними.

За допомогою аналітичних моделей отримують початкове уявлення і теоретичний опис проблеми. Закономірності і принципи, отримані і обґрунтовані при теоретичному підході, у подальшому враховують при імітації, а далі – при самоорганізації моделей. Імітація і, особливо, самоорганізація систем дозволяють, у окремих випадках, уточнити початкові припущення і проаналізувати перебіг процесів, які не враховували при аналітично-теоретичному підході. Тому структуру моделей, які використовували при імітації, коректують за допомогою моделей, отримані за допомогою самоорганізації. Це вказує на необхідність розширення спектру методів побудови моделей за рахунок врахування об'єктивних методів самоорганізації. Завдяки цьому, синтезуючи частини багатокomпонентної системної моделі, для яких ще не існувало науково-обґрунтованих апріорних даних, за основу беруть не окремі припущення, а моделі, отримані за допомогою самоорганізації шляхом аналізу достовірної інформації (спостереження, цілі дослідження і т. д.). Важливим є те, що моделі складних компонентів системи можливо отримати при досить малих вибірках даних спостереження.

Останнім етапом ідентифікації є перевірка адекватності або верифікація моделі, що складається з перевірки отриманої моделі на придатність для вирішення поставленої мети (наприклад, для реалізації мети управління, яку здійснюють за допомогою даної моделі). Очевидно, що таке поетапне досягнення мети не є економічним, тому вказаний процес часто замінюють простішим: перевіркою точності деякої проміжної величини. При самоорганізації такі прийоми не доцільно

використовувати, оскільки при побудові моделі застосовують методи регуляризації і відомі критерії селекції.

Алгоритми самоорганізації відрізняються від відомих статистичних методів (покрокова регресія, обчислення будь-яких можливих регресій та ін.) багаторядністю і застосуванням принципу селекції (зокрема, з використанням принципу свободи вибору Д.Габор). Крім того, у алгоритмах самоорганізації застосовують зовнішні критерії, пов'язані з метою моделювання. Під час аналізу зміни кількісних показників зовнішніх критеріїв знаходять мінімум і завдяки цьому однозначно будують модель зі структурою оптимальної складності. Багаторядні алгоритми самоорганізації містять на кожному етапі реалізації часткові моделі, кількість параметрів яких є значно меншою від кількості реалізацій навчальної послідовності. Тому для часткових моделей можна виконати перевірку значущості, прийняту у математичній статистиці.

Об'єктивність вибору моделі ґрунтується на тому, що моделі зі структурою оптимальної складності відповідають мінімуму критерію селекції. Мірою якості, або адекватності моделі, може бути мінімальне значення критерію селекції. Виходячи з цього, модель з мінімальним показником критерію селекції є достовірнішою і точнішою.

Відомо, що мінімальне значення критерію регулярності пропорційне критерію достовірності Фішера [55]. Дослідженнями встановлено, що за допомогою алгоритмів самоорганізації можливо вибрати шукану модель зі структурою оптимальної складності, якщо виконані наступні умови [78, 83]:

- на кожному етапі алгоритму реалізації набору проміжних моделей, які отримують при поступовому підвищенні складності початкової моделі, міститься шукана модель зі структурою оптимальної складності;
- правило утворення складніших варіантів моделі, а також система опорних функцій і множина вихідних змінних, відповідають моделі зі структурою оптимальної складності;

- етапи алгоритму реалізації моделей спостерігають достатньо точно і завади, які виникають при цьому, є несуттєвими;
- кількість реалізацій є достатньо великою.

Якщо з підвищенням складності моделі не знаходять мінімум критерію селекції, тоді стверджують, що застосування самоорганізації не призвело до позитивних результатів прогнозування. У такому випадку на початковому етапі прогнозування необхідно забезпечити виконання наведених вище умов реалізації алгоритмів самоорганізації для формування моделі зі структурою оптимальної складності.

### **3.4. Самоорганізація фізичних і нефізичних моделей**

*Фізичну модель* складного об'єкта визначають його математичним описом (у вигляді рівняння або системи рівнянь).

Наприклад, коливання маятника описують відомим диференціальним рівнянням другого порядку, де вихідною величиною є кут відхилення осі маятника від горизонталі, а вхідною зовнішньою дією – момент сили, прикладеної до його осі.

У складніших випадках у об'єкті (який ототожнюють із системою) знаходять закономірності, що характеризують взаємозв'язки між компонентами. Систему таких закономірностей, якщо вона з певною достовірністю відображає взаємозв'язки між компонентами, також можна назвати фізичною моделлю складного об'єкта.

У фізиці, математиці і техніці зазвичай розглядають стійкі об'єкти моделювання. Тому метою самоорганізації фізичної моделі у вигляді системи диференціальних або різницевих рівнянь є:

- ідентифікація структури і параметрів об'єкта (виконують з пізнавальною метою або для вирішення завдань управління);
- короткотривале прогнозування (на 1-3 кроки дискретизації часу вперед).

Для довготривалого прогнозування (на 10 або більше кроків вперед) фізична модель не є придатною, оскільки через недосконалість моделі похибка прогнозування з кожним кроком збільшується.

Фізичну модель (для ідентифікації об'єкта або для короткотермінового прогнозування) можна отримати за допомогою самоорганізації лише за умови наявності значного об'єму апріорної інформації про об'єкт. Процес побудови фізичної моделі при дуже малій кількості апріорної інформації називають "*відкриттям закономірностей*". У цьому випадку слід використовувати складні алгоритми самоорганізації. Вони дають можливість побудувати фізичну модель тільки у тому випадку, якщо:

- серед спектру моделей, що підлягають відбору за відомими критеріями, існує модель, яка за складом змінних, класом рівняння і видом граничної функції відповідає фізичній моделі;
- у групі критеріїв, які використовують для відбору моделей, є критерій, що відображає деяку властивість (ознаку) фізичної моделі, наприклад, її несуперечність (критерій мінімуму зміщення);
- серед змінних, наведених у таблиці початкових даних, немає показників характеристик, що корелюють з критеріями, на яких ґрунтуються закономірності побудови моделі;
- знайдено геометричне місце мінімумів критерію зміщення.

Останні дві необхідні умови можна не враховувати, якщо у алгоритмі самоорганізації передбачений етап "*додаткового визначення фізичної моделі*" експертами. У моделях, отриманих за допомогою самоорганізації, кожен фактор (протягом певного проміжку часу реалізації алгоритму) корелює з множиною інших факторів [87]. При додатковому визначенні фізичної моделі експертом відбираються лише ті фактори, які на його думку мають найбільшу значущість при оцінюванні адекватності моделей. У цьому випадку кількість моделей після самоорганізації вже є незначною.



При виконанні інших умов (окрім умови відсутності колінеарних змінних) дійсна модель завжди буде відібрана за критеріями адекватності на проміжних етапах реалізації алгоритму. При збільшенні кількості заводів (неточності отриманих даних) і при неповному інформаційному базисі (коли відсутні дані про значущий фактор фізичної моделі) на кінцевому етапі самоорганізації експертам буде запропоновано спектр моделей, які не є суперечливими за своїм фізичним змістом. Причому між такими моделями не обов'язково існуватиме взаємозв'язок. Завдання додаткового визначення моделі у цьому випадку ускладнюється, оскільки експерти можуть проаналізувати лише деякі часткові закономірності.

Відповідно до задачі моделювання змінну, що підлягає прогнозуванню, можна розглядати як вихідну величину деякої динамічної керованої системи, на яку впливають випадкові завади. У результаті самоорганізації будують модель динамічної системи, що дозволяє перетворити вхідний вектор у вихідний. Залежно від об'єму апріорної інформації про досліджувану систему отримують моделі статичних та динамічних систем із зосередженими і розподіленими параметрами.

За допомогою самоорганізації отримують моделі прогнозування у вигляді диференціальних рівнянь. Клас рівнянь і вид граничних функцій у таких моделях вибирають, виходячи з особливостей об'єкта моделювання. Наприклад, для опису циклічних процесів застосовують тригонометричні функції. Зауважимо, що слід розрізняти моделі для короткотермінового прогнозування (і водночас ідентифікації об'єкта) та моделі для довготермінового прогнозування.

Для побудови моделей короткотермінового прогнозування необхідно мати відомості про:

- фізичні моделі, де (у разі відсутності процесу додаткового визначення) деякі змінні можуть бути замінені колінеарними з ними змінними;
- високочастотні швидкозмінні фактори;
- повний інформаційний базис (вся множина факторів фізичної моделі);

- змінні з одним інтервалом усереднення.

Для побудови моделей довготермінового прогнозування необхідно мати відомості про:

- нефізичні моделі у вигляді рівнянь, що відрізняються від рівнянь математичної фізики і містять тільки частину факторів [11];
- низькочастотні фактори;
- скорочений інформаційний базис (порівняно незначна кількість факторів);
- змінні з двома-трьома інтервалами усереднення.

Серед об'єктів моделювання зустрічаються такі, у яких прогнозування деякої вихідної змінної можна реалізувати з достатньою точністю лише за умови наявності інформації про зміну цієї характеристики на деякому інтервалі часу спостереження [88]. Пояснюють це тим, що такі об'єкти відзначаються значною кількістю внутрішніх кореляційних зв'язків. Мінімальна кількість вихідних змінних (або кількість ступенів свободи) моделі визначається нерівністю [55]:

$$m \geq (M - f),$$

де:

$M$  – загальна кількість змінних об'єкта;

$f$  – кількість зв'язків.

У вказаних об'єктах  $m = 1$ , тобто  $M$  є більшим від  $f$  лише на одиницю. Це дозволяє прогнозувати зміну будь-якої однієї характеристики лише за аналізом її поведінки на попередніх етапах моделювання (без врахування даних про зміну інших величин).

У моделях прогнозування, перш за все, слід скоротити кількість рівнянь та факторів. При цьому залишають лише значущі на різних вибірках даних рівняння і найінформативніші фактори. Це дозволяє аналізувати і прогнозувати поведінку характеристичних вихідних змінних при незначній кількості факторів. Усі інші змінні прогнозують, ви-

користовуючи функцію значущих факторів і часу (за однорядними алгоритмами).

Теорія самоорганізації нефізичних моделей прогнозування ґрунтується на положенні про те, що для досягнення найбільшої точності моделювання необхідно спрощувати структуру моделі. Фізична модель є оптимальною тільки за відсутності завад і при повному інформаційному базисі.

Відповідно до теорії інформації можна стверджувати, що підвищення рівня завад призводить до збільшення похибки дослідження, зменшення кількості рівнянь і спрощення структури моделі прогнозування, яку отримують в результаті самоорганізації. Авторами показано, що алгоритми самоорганізації, за оптимального вибору їх структури і спектру критеріїв, відзначаються високою завадостійкістю: завади можуть у декілька разів перевищувати корисний сигнал, лише трохи змінюючи кінцевий результат [55]. Пояснюють це тим, що розміри області моделювання (кількість рівнянь у моделі) і складність моделі (кількість доданків у кожному рівнянні) при самоорганізації не призначаються людиною, а вибираються програмним забезпеченням. У цьому випадку автоматично вибирається оптимальна фізична модель лише тоді, якщо вона дійсно характеризується мінімальним критерієм зміщення у ієрархії заданих критеріїв.

## **Розділ 4. Автоматизоване проектування складних об'єктів і систем**

Одним з найважливіших напрямів розвитку науково-технічного прогресу і вдосконалення перебігу технологічних процесів у різних галузях промисловості на сьогодні є створення інтегрованих систем виробництва і управління. Такий підхід зумовлює широке використання засобів обчислювальної техніки і методів інформатики. Проектування сучасних високоефективних систем обчислювальної техніки ґрунтується на використанні процесів автоматизації виробництва. Основними напрямками реалізації систем автоматизованого проектування є: математичне моделювання об'єктів проектування; використання інформаційного забезпечення; розроблення методів структурного і функціонально-логічного проектування; розроблення методів і засобів технологічного та конструкторського автоматизованого проектування схемотехніки.

Відомо, що основою математичного забезпечення систем проектування є ієрархічна система математичних моделей [89-91]. Сукупність таких моделей забезпечує розроблення високоефективних систем обчислювальної техніки і автоматизованого управління. При цьому побудова складних моделей викликає значні труднощі, оскільки створення ефективних технологій оброблення даних засобами автоматизованих систем відбувається завдяки інтеграції технічних засобів і програмного забезпечення [92, 93].

### **4.1. Основні функції систем автоматизованого управління**

Сучасне виробництво характеризується складністю як технологічних процесів, що відзначаються широким спектром функціональних можливостей, так і систем управління (зокрема, етапів їх проектування та процесів функціонування). Одним з важливих напрямків вирішення даної проблеми є створення і впровадження нових підходів, методів та форм організаційно-технологічного управління процесами функціо-

нування автоматизованих систем. Накопичений досвід експлуатації автоматизованих систем показує, що принципи і методи їх роботи не забезпечують необхідний рівень ефективності експлуатації автоматизованих систем [94].

Труднощі, які часто спостерігають при організації експлуатації автоматизованих систем пояснюють нестаціонарністю характеристик процесів оброблення даних, що надходять від виробничих систем. Тоді, у процесі функціонування автоматизованих складних систем можна виділити дві періодичні фази, які повторюються. Це, у свою чергу, приводить до необхідності переналагоджування виробничих систем.

Тривалість першої фази (*фаза настроювання* автоматизованих систем) визначається об'ємом робіт, які необхідно виконати для забезпечення нових вимог споживачів стосовно оброблення даних. Фаза настроювання характеризується значним об'ємом комбінацій техніко-економічних показників.

Друга фаза – це період планомірної роботи автоматизованих систем у напрямку оброблення виробничих даних у стаціонарних режимах. На сьогодні успішно вирішують задачі мінімізації тривалості часу, що затрачається на переналагоджування автоматизованих систем. З метою вирішення цієї проблеми необхідно використовувати нові класи математичних моделей та методів.

Основні класи моделей прийняття рішень з реалізації управління настроювання автоматизованих систем [95, 96]:

- моделі нульового рангу невизначеності  $M(t_0)$ , у яких задають лише компоненти вектора;
- моделі першого рангу невизначеності  $M(t_1)$ , у яких задають причинно-наслідкові співвідношення між елементами відповідних множин;
- моделі другого рангу невизначеності  $M(t_2)$ , у яких задають структуру операторів, що визначають співвідношення між множинами;

- моделі третього рангу невизначеності  $M(t_3)$ , у яких задають структурно і параметрично оператор, що визначає співвідношення між множинами.

При організації настроювання автоматизованих систем враховують особливості їх функціонування. Для цього послідовно вирішують такі задачі:

Задача  $\alpha_1$ . Оптимальне формування вектора  $D$ , який об'єднує густину допустимих станів системи.

Задача  $\alpha_2$ . Реалізація моделі за такти часу:  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ .

Задача  $\alpha_3$ . Реалізація об'єднаних моделей за такти часу:  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$ , де:  $\tau_1 \leq \tau_i$ .

За типом зв'язків між елементами розрізняють такі класи складних систем:

1. Системи з лінійною структурою, де кожен елемент пов'язаний з двома сусідніми. У такому випадку руйнування одного зв'язку призводить до відмови всієї системи.
2. Системи з кільцевою структурою, які відзначаються тим, що інформаційний обмін здійснюють у різних напрямках ("за" або "проти" годинникової стрілки, "вперед" або "назад" і т.д.). Такі системи, де кожен елемент пов'язаний з іншим елементом системи, характеризуються відносно високою стійкістю до відмов, значною швидкістю інформаційних обмінів. Водночас такі системи не є економічними.
3. Системи з ієрархічною структурою, у яких вищий рівень розміщення елемента має меншу кількість зв'язків з іншими структурними елементами.

Відомо, що системи автоматизованого проектування можна охарактеризувати як багаторівневий комплекс технічних, математичних, програмних та інформаційних засобів [97, 98]. При цьому основною функцією складних систем автоматизації є забезпечення раціональної та

цілеспрямованої взаємодії експерта і ЕОМ у процесі синтезу або прийняття проектних та конструкторських рішень. Перспективним у цьому плані є використання алгоритмічного синтезу.

При автоматизованому проектуванні складних систем завдання алгоритмічного синтезу конкретизують таким чином:

- відповідно до технічного завдання на розроблення системи заздалегідь визначають її основні техніко-економічні характеристики;
- встановлюють перелік завдань, що вирішуються системою;
- для вибраної сукупності завдань будують алгоритми і математичні моделі, тобто розробляють інформаційні технології оброблення даних у системі;
- на основі математичного опису завдань розробляють загальний алгоритм функціонування системи, визначають можливі варіанти реалізації завдань у системі;
- з врахуванням умов експлуатації об'єкта управління і на підставі аналізу загального алгоритму визначають альтернативні варіанти побудови структури вхідної інформації і послідовностей її перетворення у системі; задають і описують функції окремих структурних елементів системи; визначають основні режими оброблення інформації у системі.

Отже, результатом реалізації етапу алгоритмічного синтезу є аналіз алгоритмів функціонування об'єкта автоматизованого проектування.

Традиційно при оцінюванні ефективності функціонування обчислювальних систем використовують узагальнений показник [99]:

$$E_1 = W / C ,$$

де:

$W$  – продуктивність ЕОМ;  
 $C$  – вартість.

Однак, при оцінюванні різноманітних варіантів побудови обчислювальних систем важливим також є фактор, що визначає спектр задач, які класифікують за часом вирішення.

При розв'язуванні задач з незначною тривалістю обчислень запропоновано показник ефективності [100]:

$$E_2 = K_m W_0 / C ,$$

де:

$K_m$  – коефіцієнт технологічного використання;

$W_0$  – продуктивність системи при ідеальній надійності.

У випадках, коли тривалість розв'язування задач велика, при оцінюванні ефективності враховують такі показники надійності, як:

$P_3(\tau)$  – ймовірність безвідмовного вирішення системою задачі;

$K_z, K_m$  – коефіцієнти готовності і технічного використання.

Тоді критерій ефективності визначають за формулою:

$$E = K_z K_m P_3(\tau) W_0 / C .$$

Крім того, для оцінювання надійності систем використовують такі характеристики [101]:

- безвідмовність ЕОМ (властивість ЕОМ зберігати працездатність протягом певного проміжку часу при обмеженнях на умови експлуатації). Розрізняють миттєві і поступові відмови. Безвідмовність оцінюють середнім часом експлуатації ЕОМ до першої (чи наступної або проміжної) відмови ( $T_0$ );



- пристосованість ЕОМ до попередження, знаходження і знешкодження недоліків. Оцінюють середнім значенням тривалості відновлення працездатності після відмови ( $T_p$ );
- достовірність функціонування (властивість ЕОМ, що визначає безпомилковість інформації). Оцінюють середнім часом відновлення обчислювального процесу після збою у роботі системи ( $T_\delta$ );
- середня тривалість профілактичних досліджень ( $T_{np}$ ).

Для аналізу ефективності функціонування багатопроцесорних ЕОМ використовують поняття “живучості”. Відносно живучості показниками надійності багатопроцесорних ЕОМ є:

- ймовірність безвідмовної експлуатації із заданою продуктивністю ( $P^E(t)$ ), тобто ймовірність того, що за час ( $t$ ) продуктивність об’єкта буде не нижчою від мінімального допустимого рівня;
- середній час експлуатації системи до відмови за параметром ( $T^E$ ), де:  $T^E$  – час, протягом якого продуктивність об’єкта досягне заданого мінімально допустимого рівня  $E$ ;
- коефіцієнт готовності до експлуатації із заданим рівнем продуктивності  $K^E_e(t)$ ;
- коефіцієнт оперативної готовності із заданим рівнем продуктивності  $K^E_o(t)$ .

Розглянемо відомі підходи до оцінювання надійності програмного забезпечення для автоматизованих систем. Автором [95] запропоновано моделі, які об’єднано у три класи.

До першого класу належать моделі росту надійності програмного забезпечення. Такі моделі ефективно використовують при налагоджуванні програм, при цьому отримують необхідні статистичні дані для прогнозування окремих характеристик програмного забезпечення.

Прикладом може бути модель Джелинського-Моранди. Нехай  $t_1, t_2 \dots t_n$  – послідовність проміжків часу ефективної

експлуатації програмного забезпечення між  $n$  - послідовним виявленням помилок у період налагоджування системи. У процесі експлуатації системи спостерігали кількість помилок  $N$  з певною густиною  $\Phi$ . Для побудови статистичного оцінювання значень  $N$  і  $\Phi$  у моделі використовують метод максимальної правдоподібності, що полягає у визначенні значень  $N$  і  $\Phi$ , а також у оцінюванні ймовірності безвідмовної експлуатації програмного забезпечення за формулою:

$$P(t) = \exp[-(N - i + 1)\Phi t].$$

До другого класу належать моделі, у яких прогнозування надійності здійснюють на основі аналізу інформації про структуру програмного забезпечення і вихідних даних.

Наприклад, у моделі Нельсона структура програмного забезпечення представлена у вигляді графу, що з'єднує вершину "вихідні дані" з іншою вершиною "результат". Граф містить  $n$  шляхів. Кожна можливість однократної безвідмовної реалізації програмного забезпечення визначають за допомогою виразу:

$$P = \sum_{i=1}^n B_i P_i,$$

де:

$P_i$  – умова ймовірності безвідмовної реалізації програмного забезпечення (але при умові, що  $x \in G_{x_i}$ );

$-\beta = P(x \in G_{x_i})$  – ймовірність вибору  $i$ -го шляху;

$G_x$  – густина векторів вихідних даних ( $x$ ).

Третій клас складають моделі, у яких враховують психологічний аспект системи "машина – користувач".

Наприклад, при побудові моделі Холстеда, виявлено співвідношення параметрів добре налагоджених програм, які вибрано за еталон [102]. З ними порівнюють процеси

функціонування інших систем, при цьому обов'язково враховують закономірності розумової діяльності людини на певному етапі прогнозування можливої кількості помилок.

*Моделі для оцінювання статистичних характеристик виконання завдань.* При кількісному оцінюванні надійності автоматизованих систем часто використовують показник ( $T$ ), який інтерпретують як тривалість або об'єм роботи, що виконується системою до першої відмови. У будь-якому випадку значення показника для складної системи є випадковими величинами, що мають відповідний розподіл. Тому їх опис можна отримати шляхом побудови емпіричного розподілу у табличній або графічній формі. Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним розподілом дозволяє отримати аналітичний опис моделі у формі:

$$F(t) = P\{T \leq t\}.$$

У деяких випадках замість функції розподілу часу експлуатації використовують функцію густини відмов:

$$f(t) = dF(t) / dt.$$

Відмітимо, що вказані ймовірнісні характеристики використовують при побудові моделей надійності систем, які не відновлюються. Оцінку безвідмовності систем, які відновлюються, здійснюють шляхом обчислення потоку відмов:

$$q(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{Q(\tau, \tau + t)}{\Delta\tau},$$

де:

$Q(\tau, \tau + \Delta t)$  – ймовірність відмови протягом інтервалу часу  $(\tau, \tau + \Delta t)$ .

Інтенсивність потоку відмов визначають за формулою:

$$u(t) = dMN(\tau) / d\tau,$$

де:

$N(t)$  – кількість відмов у інтервалі часу  $(0, \tau)$ .

Показником безвідмовності систем, що відновлюються, є також величина:

$$\bar{t} = \tau / MN(\tau).$$

При виборі теоретичного розподілу слід враховувати особливості, які характерні для автоматизованих систем. Зокрема, значення часу змінюється у межах: від  $(t_n)$  до  $(t_K)$ .

Розглянемо моделі надійності систем, що використовують при розв'язуванні практичних задач проектування [103].

*Модель 1.* Показник надійності  $T$  – неперервна випадкова величина, яка є рівномірно розподіленою у інтервалі часу:  $[t_n, t_K]$ . Густина розподілу тоді визначається за допомогою формули:

$$f(t) = \begin{cases} 1/(t_K - t_n), t_n \leq t \leq t_K \\ 0, t < t_n, t > t_K \end{cases}.$$

Математичне очікування визначають за формулою:

$$m_t = (t_n + t_K) / 2,$$

а дисперсію:

$$\sigma_t^2 = (t_n - t_K)^2 / 12.$$

*Модель 2.* Для випадку, коли показник надійності, що є випадковою величиною, має обмежену область значень, як математичну модель використовують трикутний розподіл. Форму трикутного розподілу характеризують такі величини:  $t_H$  і  $t_K$  – межі області можливих значень випадкової величини;  $t_M$  – модальний інтервал. Густина функції розподілу має вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_H; \quad t > t_K; \\ 2(t - t_H)/(t_K - t_H)(t_M - t_H), & t_H \leq t \leq t_M; \\ 2(t_K - t)/(t_K - t_H)(t_K - t_M), & t_M \leq t \leq t_K. \end{cases}$$

Математичне очікування обчислюють за формулою:

$$m_t = \int_{t_H}^{t_K} tf(t)dt = \frac{1}{3}(t_H + t_M + t_K),$$

а дисперсію:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{18}(t_H^2 + t_M^2 + t_K^2 - t_H t_M - t_H t_K - t_M t_K).$$

Параметри розподілу  $(t_H, t_M, t_K)$  оцінюють, будуючи гістограму емпіричного розподілу. Внаслідок цього отримують:

$$\hat{t}_M = \tilde{t}_M + \frac{\Delta t(f_1 - f_M)}{f_1 - 2f_M + f_2},$$

де:

$\tilde{t}_M$  – початок модального інтервалу, яки обчислюють на гістограмі емпіричного розподілу;

$\Delta t$  – довжина інтервалу;

$f_M$  – частота модального інтервалу;

$f_1, f_2$  - частоти сусідніх інтервалів.

*Модель 3.* Модель будують, використовуючи показову функцію розподілу. Такі моделі застосовують при розв'язуванні задач оцінювання надійності експлуатації об'єктів. Це зумовлено тим, що при постійних відмовах під час функціонування програмного забезпечення отримують достатньо прості формули для розрахунку показників надійності.

Показовий розподіл є типовим також для об'єктів, що складаються з багатьох елементів з різними функціями розподілу відмов.

При показовому розподілі значень показника надійності густину визначають за допомогою формули:

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t),$$

де:

$\lambda$  – параметр розподілу, який називають інтенсивністю відмов.

Математичне очікування визначають за формулою:

$$m_t = 1/\lambda.$$

*Модель 4.* При побудові моделі припускали, що густина функції розподілу значення показника надійності є сумою декількох густин розподілу:

$$f(t) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(t),$$

де:

$f_i(t)$  – густина розподілу  $j$ -го виду;

$c_j$  – коефіцієнт ваги, що враховує вплив  $j$ -го доданка.

При цьому має виконуватись умова:  $\sum_{j=1}^n c_j = 1$ .

## 4.2. Функціональні завдання проектування

Проектування складного об'єкта є довготривалим процесом. Розрізняють дві основні схеми проектування:

- згори вниз;
- знизу вгору.

Проектування згори складається з кількох рівнів:

- 1 рівень – проектування обчислювального комплексу;
- 2 рівень – врахування вимог відповідно до мети;
- 3 рівень – використання периферії;
- 4 рівень – вивчення комплектуючих елементів;
- 5 рівень – розроблення технологічних процесів.

Проектування згори виконують для унікальних об'єктів, для яких не існує прототипів. З економічної точки зору це дороге проектування.

Проектування знизу використовують при модернізації існуючих об'єктів.

Системи автоматизованого проектування розробляють у кілька послідовних етапів, зокрема [103]:

1. Діагностичний аналіз, метою якого є дослідження принципів формування складних систем. Для цього проводять попередній економічний аналіз: визначають співвідношення витрат і результатів, оцінюють необхідні ресурси, собівартість, необхідність і можливість розвитку.
2. Аналіз функцій автоматизованої системи, що складається зі списку функціональних завдань.

3. Аналіз і формування першочергових завдань (формують список функцій, які повинні бути реалізовані на початковому етапі функціонування системи).
4. Аналіз і формування списку функцій для розвитку автоматизованої системи (проектують виконання додаткових завдань системою після її створення і виконання основних функцій).
5. Вторинний аналіз про доцільність розроблення автоматизованої системи.
6. Прийняття рішення про створення складної системи.
7. Вибір початкових даних для формування технічного завдання.

Система автоматизованого проектування складна система, що потребує великих економічних витрат, тому аналіз ефективності її функціонування проводять на основі залежності, що наведена на рис. 4.1.

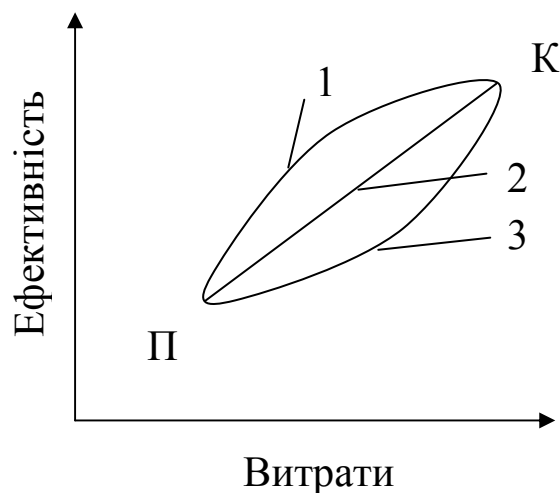


Рис. 4.1. Залежність ефективності функціонування автоматизованої системи від економічних витрат (пояснення див. у тексті).

Лінії (1, 2, 3) показують різноманітні варіанти реалізації системи автоматизованого проектування виробництва (рис. 4.1.). Лінії 1 і 3 – це крайні варіанти: крива 3 є перспективною



для виробника, а крива 1 – для користувача. Лінія 2 – лінія компромісів, тобто – ефективність пропорційна до витрат. Це область Паретто, яка є оптимальною. Завданням інженера є запропонувати цю область.

При проектування необхідно враховувати такі аспекти:

1. Список функцій устаткування;
2. Міра (або ступінь) автоматизації устаткування;
3. Рівень надійності устаткування;
4. Ступінь швидкодії устаткування;
5. Науково-технічний рівень устаткування;
6. Рівень технологічності, стандартизації, екологічності устаткування.

Відповідно до цього реалізують системні підходи до побудови функціонально-топологічної структури проектування. Така структура складається з:

1. Порівняльного аналізу керованих і некерованих факторів;
2. Топологічної структури зв'язків рівнів;
3. Топології одного рівня;
4. Територіального прив'язування пунктів концентрації інформації, центрів периферії;
5. Розподілу функціональних задач за підсистемами.

Алгоритм побудови функціонально-топологічної структури складається з таких етапів [103]:

1. Початок – формування для систем ознак якості та критеріїв виходу.
2. Централізоване генерування варіантів побудови автоматизованих систем.
3. Відкидання варіантів за умовами працездатності.
4. Відкидання коефіцієнтів завантажування деяких процесорів.
5. Відкидання коефіцієнтів використання, показники яких є меншими від необхідного рівня, попередньо запропонованого користувачем.

6. Відкидання коефіцієнтів готовності, показники яких є меншими від необхідного рівня.

Після відкидання незначущих варіантів отримують множину структур, кожна з яких відповідає технічному завданню на об'єкт проектування. Якщо у завданні оцінювання структур розглядають лише один критерій, тоді для кожної структури системи обчислюють значення цього критерію і список допустимих варіантів упорядковується. Якщо у завданні оцінювання розглядають кілька критеріїв, тоді упорядкування списку варіантів побудови функціонально-топологічної структури проводять трьома способами:

1. Введенням інтегрального критерію на множині часткових критеріїв.
2. Побудовою області Паретто (області оптимальних множин).
3. Використовуючи принцип часткових обмежень (усі критерії, крім одного, розглядають як обмеження).

В усіх трьох випадках, як правило, використовують експериментальні дослідження і аналізують отриману апріорну інформацію.

### **4.3. Розв'язування завдань автоматизації проектування методами теорії масового обслуговування**

Для аналізу методів теорії масового обслуговування введемо поняття:

1. Потік вимог – послідовність етапів, що складається з вимог на обслуговування.
2. Джерело вимог – першопричина виникнення вимог незалежно від їхньої фізичної природи.
3. Обслуговуюча система – сукупність черг і каналів обслуговування.
4. Дисципліна обслуговування – алгоритми взаємодії каналів обслуговування з чергою.

За відсутності чи наявності можливості очікування до завершення обслуговування вимог системи поділяють на:

- системи з втратами (з причини обмеження ємності буферного накопичувача або часу очікування у черзі);
- системи без втрат.

Відповідно до кількості каналів системи обслуговування бувають одно- та багатоканальними (рис. 4.2).

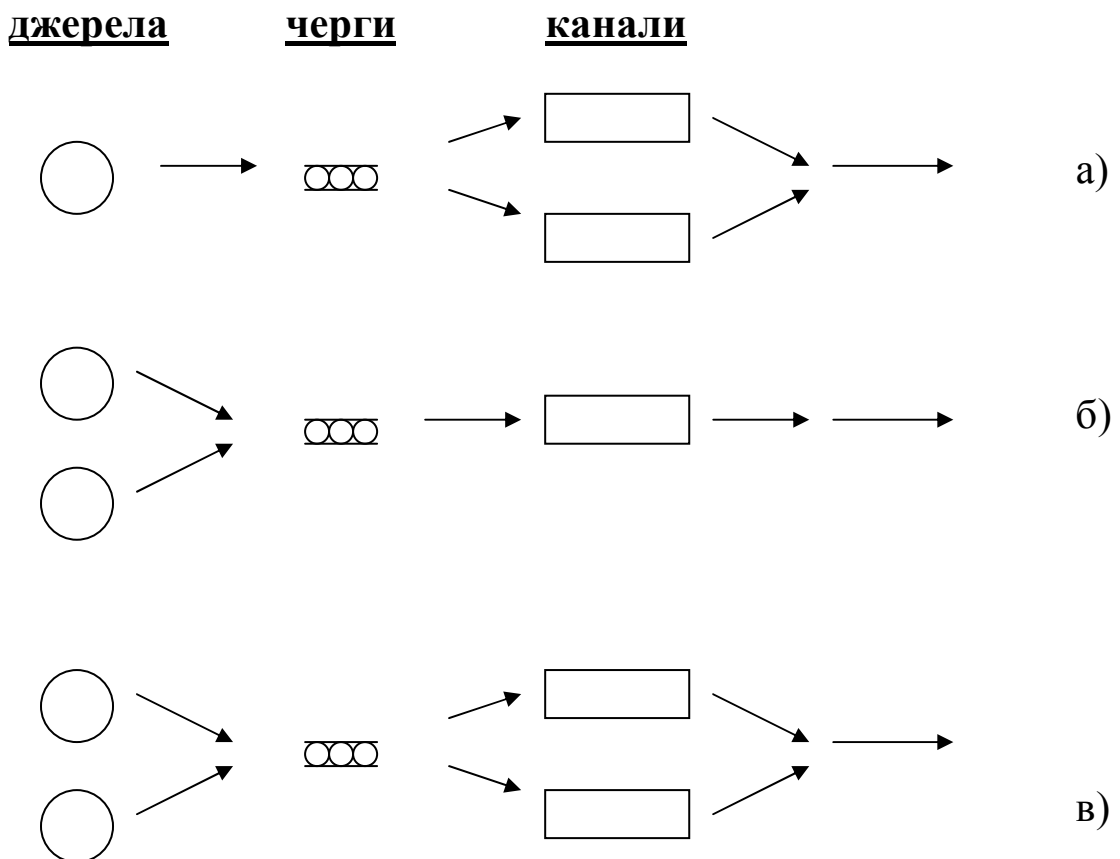


Рис. 4.2. Схема побудови структури систем масового обслуговування: а) двоканальні з одним джерелом вимог; б) одноканальні; в) двоканальні з двома джерелами вимог.

В теорії масового обслуговування існує система позначень, яка має такий вигляд:  $B/A/K$ .

$B$  – описує розподіл проміжків часу між вимогами;

$A$  – описує розподіл часу їх обслуговування;

$K$  – кількість каналів обслуговування.

Показники  $A$  і  $B$  можуть приймати такі значення:

$M$  – показниково-експоненціальні функції;  
 $D$  – детерміновані функції (рівняння Лапласа) ;  
 $E_r$  – розподіл Ерланга з порядком  $r$ ;  
 $G$  – розподіл загального типу.

Крім того, деколи вказують ємність накопичувача системи ( $m$ ) та кількість джерел навантажування ( $n$ ). Тоді дисципліну масового обслуговування позначають таким чином:  $G/G/K/m/n$ . Коли відсутні два останні показники – приймається, що їх значення дорівнює нескінченності.

Одно- і багатоканальні системи загального типу  $G/G/1$  і  $G/G/K$  можна охарактеризувати, оцінюючи деякі параметри.

Зокрема, коефіцієнт завантаження ( $\rho$ ) для системи  $G/G/1$  обчислюють за формулою:

$$\rho = \lambda \cdot \bar{x} = \lambda / \mu ,$$

де:

$\lambda$  – інтенсивність потоку вимог;

$\bar{x}$  – середній час обслуговування кожної вимоги.

У свою чергу, середній час обслуговування кожної вимоги обчислюють за формулою:

$$\bar{x} = 1 / \mu ,$$

де:

$\mu$  – інтенсивність обслуговування.

Аналогічно для багатоканальної системи  $G/G/K$  формула для обчислення коефіцієнта завантаження матиме вигляд:

$$\rho_c = \lambda \cdot \bar{x} / K = \frac{\lambda}{K\mu} .$$

Середній час перебування вимоги у системі ( $\bar{t}_c$ ) обчислюють таким чином:

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{оч} + \bar{x},$$

де:

$\bar{x}$  – середній час обслуговування;

$\bar{t}_{оч}$  – середній час очікування у черзі.

Середню кількість вимог у системі ( $\bar{j}$ ) знаходять за формулою:

$$\bar{j} = \lambda \cdot \bar{t}_c.$$

Аналогічно, для обчислення середньої кількості вимог, що очікують у черзі, використовують залежність:

$$\bar{n}_o = \lambda \cdot \bar{t}_{оч}.$$

Для багатоканальних систем  $G/G/K$  середню кількість вимог у системі обчислюють за формулою:

$$\bar{j} = \bar{n}_o + K\rho_c = \lambda \bar{t}_{оч} + \rho,$$

де:

$\rho = K\rho_c$  – коефіцієнт завантаження системи.

#### 4.3.1. Марковські системи масового обслуговування

Для опису поведінки системи у класі марковських процесів необхідно:

- визначити поняття стану;
- визначити множину станів, у яких може перебувати система;
- побудувати граф станів, тобто вказати шляхи можливих переходів системи із стану у стан;
- зазначити, у якому стані знаходиться система у початковий момент часу або задати розподіл початкових станів;

- для кожного можливого переходу обчислити інтенсивність потоку подій ( $\lambda_{ij}(t)$ ) зі стану ( $i$ ) у стан ( $j$ ) за формулою:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Загальна система диференціальних рівнянь, що описують поведінку марковського процесу має вигляд [103, 104]:

$$P_j(t) = - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \right) P_j(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t) \lambda_{ij},$$

де:

$P_j(t)$  – ймовірність того, що система у момент часу ( $t$ ), знаходиться у стані ( $J$ );

$P_i(t)$  – ймовірність того, що у системі за проміжок часу ( $t$ ) перебувало ( $i$ ) вимог;

$i, j$  – індекси стану;

$n$  – кількість вимог в джерелі;

$\lambda$  – інтенсивність потоку.

Для обчислення усіх ймовірностей ( $P_j$ ) систему диференціальних рівнянь перетворюють у систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язують із врахуванням умови:

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1 \text{ [105].}$$

Ліва частина кожного рівняння містить похідну ймовірності стану, а права містить стільки членів, скільки дуг пов'язано з даним станом. Якщо дуга направлена зі стану, відповідний член має знак “мінус”, якщо у стан – знак “плюс”. Загальний вигляд графа показано на рис. 4.3.

Завданням марковських систем є обчислення ймовірностей того чи іншого стану системи. У зв'язку з цим, пропонують спосіб обчислення ймовірностей під назвою

“Процес відмирання та розмноження” [103]. Граф поведінки марковського процесу такого виду є ланцюгом станів, у якому кожен зі станів ( $j = 1, n-1$ ) пов’язаний прямими і оберненими зв’язками з кожним із наступних станів, а стани:  $j = 0, j = n$  – лише з одним із сусідніх станів.

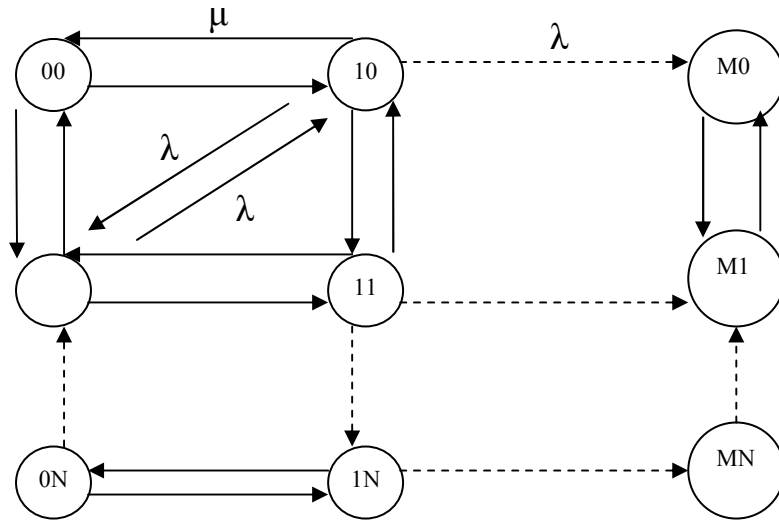


Рис. 4.3. Загальний вигляд графу станів:  $\lambda$  – інтенсивність потоку,  $\mu$  – інтенсивність обслуговування.

Загальна система рівнянь, які описують динаміку такого процесу, має вигляд [106]:

$$P^I_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t),$$

де:

$P^I_0(t), P_0(t), P_1(t)$  – ймовірності знаходження систем у  $i$ -му стані.

**Розглянемо приклад [103].** Розглядається двопроцесорна система, на вхід якої подають три потоки з інтенсивностями:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Процесори є однотипними із середньою швидкодією ( $\theta$ ). Тривалість перебування вимоги у системі не повинна перевищувати випадкової величини ( $\tau_q$ ), що розподілена

експоненціально з математичним очікуванням ( $\bar{\tau}_q$ ). Операційна система реалізує безпріоритетні дисципліни очікування і обслуговування. Критерій ефективності системи має вигляд:

$$E = \lambda(P_{\text{відн}} + P_y) + \left( K - \bar{K}_3 \right),$$

де:

$P_{\text{відн}}$  – ймовірність відмови у обслуговуванні;

$P_y$  – ймовірність виходу “застарілих” вимог з системи (тобто таких, час очікування яких у черзі на даний момент часу закінчився);

$\bar{K}_3$  – середня кількість зайнятих каналів.

Визначимо ефективність функціонування системи ( $E$ ). Розглядається система масового обслуговування типу:

$$M / M / K / m ,$$

де:

$$K = 2, m = 4 .$$

Інтенсивність обслуговування  $\mu$ , інтенсивність виходу вимог з черги:  $\alpha = 1 / \bar{\tau}_q$ .

Загальну інтенсивність потоку при безпріоритетному обслуговуванні знаходять за формулою:  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ . Коефіцієнт завантаження системи обчислюють як відношення інтенсивності потоку до інтенсивності обслуговування:  $\rho = \lambda / \mu$ .

Граф процесу відмирання та розмноження для даної моделі наведено на рис.4.4.

Граф побудований з врахуванням того, що перехід вимог з  $(j+1)$  у  $j$ -й стан відбувається після завершення обслуговування стану системи.



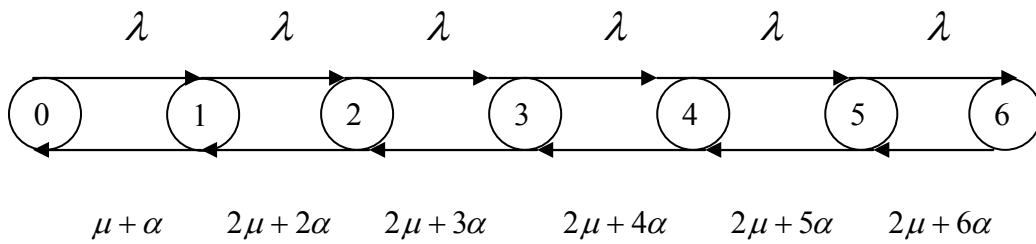


Рис. 4.4. Граф процесу відмирання та розмноження: (0-6) – стани системи;  $2\mu$  – інтенсивність обслуговування системи двома каналами;  $5\alpha, 6\alpha$  – інтенсивність виходу вимог з черги.

Використовуючи формулу, для визначення суми ряду [103]:

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{K=1}^j \frac{\lambda_{K-1}}{\mu_K} \right]^{-1},$$

знаходять значення ймовірностей перебування вимог у певних станах ( $P_0 - P_6$ ).

Середню кількість зайнятих каналів знаходять за формулою:

$$K_3 = P_1 + 2P_2 + \bar{2}(I - P_0 - P_1 - P_2),$$

де:  $I=I$  – одинична матриця.

Середню довжину черги обчислюють зі співвідношення:

$$\eta = IP_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6.$$

Коефіцієнт завантаження обчислюють за формулою:

$$\eta_3 = \bar{K}_3 / K.$$

Ймовірність відмов з причини обмеженості буфера:  $P_{\text{відк}} = P_6$ .

Ймовірність виходу вимоги з черги обернено пропорційна до потоку вимог:  $P_y = \eta\alpha / \lambda$ .

Ймовірність виходу вимоги за час обслуговування знаходять за формулою:  $P_y'' = K_3 \alpha / \lambda$ .

Далі обчислюють ефективність функціонування системи (E).

Основні співвідношення для простих систем масового обслуговування.

**Приклад.** Проведемо порівняльний аналіз двох структур організації системи оброблення інформації. Як показник порівняльного аналізу виберемо середню довжину черги у системі ( $\bar{n}_0$ ).

Розглядають дві структури системи, схему яких наведено на рис. 4.5 [103, 104].

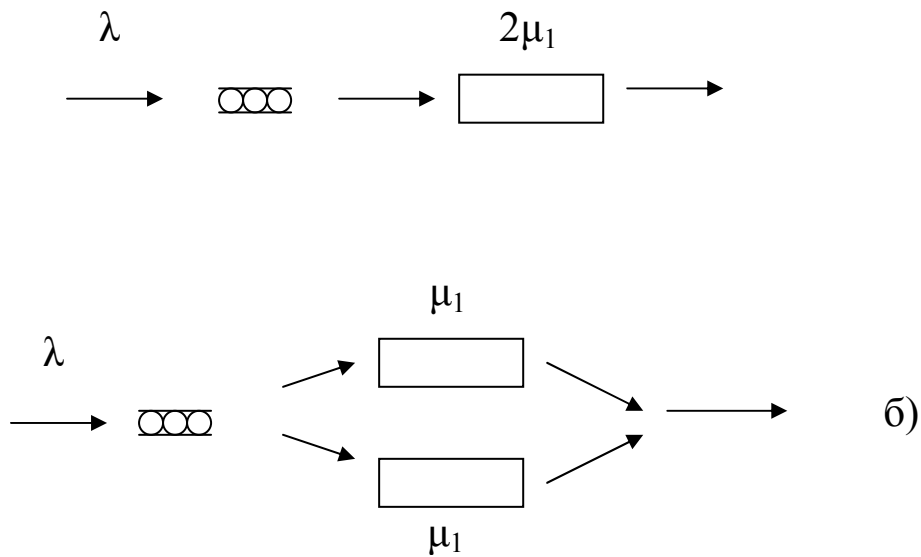


Рис. 4.5. Схема одно- (а) і двоканальної (б) автоматизованої системи масового обслуговування.

Для структури (рис. 4.5,а) відповідно до моделі, що має вигляд  $M / M / 1$ , маємо:

$$n_0^{(a)} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}; \rho = \lambda / \mu, \text{ тоді: } n_0^{(a)} = \frac{(\lambda / (2\mu_1))^2}{(1 - \lambda / (2\mu_1))}.$$

Якщо:  $\lambda / \mu_1 = \rho_*$ , тоді:

$$n_0^{(a)} = \frac{(\rho_*/2)^2}{1 - \rho_*/2} = \frac{\rho_*^2/4}{(2 - \rho_*)/2} = \frac{\rho_*^2}{4} \cdot \frac{2}{2 - \rho_*} = \frac{1}{2} \frac{\rho_*^2}{(2 - \rho_*)}.$$

Для структури (рис. 4.5,б) відповідно до моделі, що має вигляд  $M/M/K$ , маємо:

$$n_0^{(\delta)} = \frac{\rho^{K+1} P_0}{K \cdot K! (1 - \rho_c)^2}, \text{ де: } P_0 = \left[ 1 + \sum_{j=1}^K \rho^j \frac{1}{j!} + \rho^{K+1} \frac{1}{K!(K - \rho)} \right]^{-1}.$$

При  $K = 2$ , отримаємо:

$$n_0^{(\delta)} = \rho^3 \cdot P_0 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \left( 1 - \frac{\lambda}{2\mu_1} \right)^2}, \text{ оскільки: } \rho_c = \frac{\lambda}{K\mu}, \text{ тоді:}$$

$$P_0 = \left[ 1 + \rho_* + \rho_*^2 \frac{1}{2} + \rho_*^3 \frac{1}{2(2 - \rho_*)} \right]^{-1} = \left[ \frac{2 + 2\rho + \rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{2(2 - \rho)} \right]^{-1} =$$

$$\left[ \frac{(2 + 2\rho + \rho^2)(2 - \rho) + \rho^3}{2(2 - \rho)} \right]^{-1} = \left[ \frac{4 + 4\rho + 2\rho^2 - 2\rho - 2\rho^2 - \rho^3 + \rho^3}{2(2 - \rho)} \right]^{-1} = \frac{2 - \rho_*}{2 + \rho_*}$$

У цьому випадку:  $\rho = \rho_* = \lambda\mu_1$ .

Коефіцієнт переваги однієї структури над іншою оцінюють за формулою:

$$F_1(\rho_*) = \frac{n_0^{(a)}}{n_0^{(\delta)}} = \frac{1}{2} \frac{\rho_*^2}{(2 - \rho_*)} \cdot \frac{4 - \rho_*^2}{\rho_*^3} = \frac{2 + \rho_*}{2\rho_*} > 1.$$

Отже, середня довжина черги у системі зі структурою, яка зображена на (рис. 4.5,а), більша, ніж довжина черги системи, що показана на (рис. 4.5,б).

Розглянемо інший показник якості обслуговування – середній час перебування вимоги у системі  $\bar{t}_c$ .

Для моделі, що має вигляд  $M/M/1$ , показник ( $\bar{t}_c$ ) обчислюють за формулою:

$$t_c^{(a)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{2\mu_1} \cdot \frac{1}{(1-\rho)} = \frac{1}{2\mu_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu_1}} = \frac{1}{2\mu_1} \cdot \frac{2}{2-\rho_*} = \frac{1}{\mu_1(2-\rho_*)}.$$

Для моделі що має вигляд  $M/M/K$ , показник ( $\bar{t}_c$ ) обчислюють за формулою:

$$t_c^{(a)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^K \rho_0}{K\mu K_1 (1-\rho_c)^2}.$$

Тоді коефіцієнт переваги однієї структури над іншою оцінюють за формулою:

$$F_2(\rho_*) = \frac{t_c^{(a)}}{t_c^{(b)}} = \frac{1}{\mu_1(2-\rho_*)} \cdot \frac{\mu_1(4-\rho_*^2)}{4} = \frac{2+\rho_*}{4}.$$

Оскільки  $\rho \leq 1$ , тоді:  $F_2(\rho_*) < 1$ .

Звідси можна зробити висновок, що середній час перебування вимоги у системі, схему якої наведено на рис. 4.5,а, менший, ніж для системи, схему якої наведено на рис. 4.5,б.

Відповідно можна констатувати, що показник якості обслуговування суттєво впливає на вибір структури системи масового обслуговування.

### 4.3.2. Немарковські системи масового обслуговування

Під час реалізації процесів функціонування автоматизованих систем можуть виникати нові процеси, які не є марковськими. При дослідженні таких процесів

використовують методи, які розроблені для марковських ланцюгів, за рахунок виділення у вихідному випадковому процесі марковських послідовностей. При цьому у вихідному процесі вибирають такі моменти часу, де значення випадкового процесу утворюють марковський ланцюг. Окремим випадком вкладених ланцюгів Маркова є напівмарковський випадковий процес, у якому задано:

- множину станів і початковий стан;
- вектор законів розподілу тривалості перебування напівмарковського вкладеного процесу у кожному стані:  $F_i(t), i = \overline{1, n}$ , де:  $n$  – кількість вимог у джерелі;
- матрицю ймовірностей безпосередніх переходів у моменти, що відповідають закінченню перебування вкладеного процесу у вихідних станах:  $P = \{P_{ij}\}$  (у цьому випадку ймовірності переходу із першого стану у другий співвідносяться між собою).

Визначимо основні співвідношення для обчислення граничних ймовірностей напівмарковського вкладеного процесу ( $P_j$ ).

Нехай  $\tilde{P}_j(j = \overline{1, n})$  – ймовірність перебування вкладеного процесу у стані ( $J$ ) тільки з врахуванням переходів. Тоді:

$$\tilde{P}_j = \sum_i^n \tilde{P}_j \cdot P_{ij},$$

де:

$\tilde{P}_j(i = \overline{1, n})$  – ймовірність перебування вкладеного процесу у стані ( $i$ ) з врахуванням переходів;

$P_{ij}$  – ймовірність того, що у системі знаходиться ( $i$ ) та ( $J$ ) кількість вимог.

Авторами [103, 107] розраховано граничні ймовірності напівмарковського вкладеного процесу ( $P_j$ ) з врахуванням як

переходів, так і тривалості перебування процесу у відповідному стані.

Введемо деякі поняття:

$L$  – кількість різноманітних переходів;

$T_c$  – випадкова довжина (тривалість) реалізації процесу;

$T_{cj}$  – сумарна тривалість перебування вкладеного процесу у стані ( $J$ );

$L_j$  – кількість переходів процесу у стан ( $J$ ).

Тоді середнє значення тривалості реалізації вкладеного процесу у  $J$ -му стані:

$$M[T_{cj}] = L \cdot \tilde{P}_j \cdot M[T_j],$$

де:

$M[T_j]$  – середнє значення тривалості перебування у  $J$ -му стані.

Середнє значення тривалості реалізації напівмарковського вкладеного обчислюють за формулою:

$$M[T_c] = L \sum_i \tilde{P}_i \cdot M[T_i].$$

Тоді:

$$P_j = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M[T_{cj}]}{M[T_c]} = \frac{\tilde{P}_j \cdot M[T_j]}{\sum_i \tilde{P}_i \cdot M[T_i]}.$$

Відповідно ймовірність перебування вкладеного процесу у стані ( $J$ ) тільки з врахуванням переходів визначають за формулою:

$$\tilde{P}_j = \frac{P_j}{M[T_j]} \cdot \sum_i \tilde{P}_i \cdot M[T_i].$$

*Розглянемо приклад. Пропонується узагальнений цикл вирішення задачі споживачем на обчислювальному центрі: підготовка програм – введення – обчислення – аналіз результатів. На кожному з перших трьох етапів можливі помилки, виявлення яких може відбуватися на етапах введення, обчислення та аналізу результатів.*

Граф алгоритму вирішення задачі матиме вигляд (рис. 4.6):

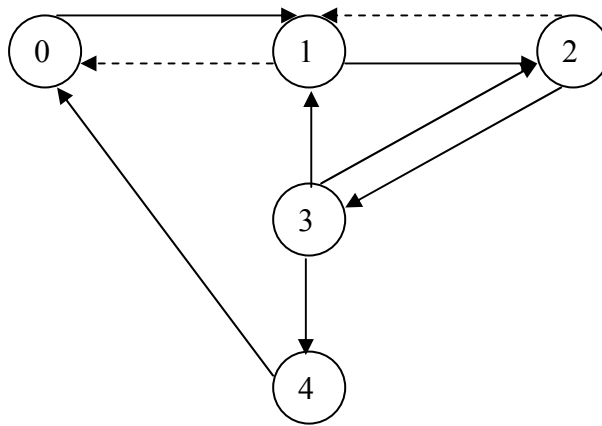


Рис. 4.6. Граф алгоритму вирішення задачі виявлення помилок на обчислювальному центрі (пояснення див. у тексті).

- Алгоритм вирішення задачі складається з таких етапів:
- 0 – фаза приготування;
  - 1 – фаза введення;
  - 2 – фаза рахунку;
  - 3 – фаза аналізу результатів;
  - 4 – фаза генерації нової задачі.

Матриця ймовірностей переходів має такий вигляд:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & 1-P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} & 1-P_{22} & 0 \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & 0 & P_{34} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_{31} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 1-P_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де:

$P_{11}, P_{22}$  – ймовірності виявлення помилок на фазах введення і обчислення;

$P_{30}, P_{31}, P_{32}$  – ймовірності виявлення помилок за результатами аналізу;

$P_{33}$  – ймовірність невиявлення помилок;

$P_{34}$  – ймовірність правильного вирішення задачі.

Тоді формують систему рівнянь для визначення ( $U$ ) для кожного конкретного випадку:

$$U_0 = U_0 P_{30} + U_4 P_{40}$$

$$U_1 = U_1 P_{11} + U_3 P_{31} + U_0 P_{01}$$

$$U_2 = U_2 P_{22} + U_3 P_{32} + U_1 (1 - P_{11})$$

$$U_3 = U_2 (1 - P_{22})$$

$$U_4 = U_3 P_{34}$$

де:

$U$  – час реакції системи на визначення (вирішення) вимоги у певній фазі.

Причому:

$$\sum_{i=0}^4 U_i M[T_i] = 1,$$

де:

$M[T_i]$  – середнє значення тривалості перебування у  $i$ -му стані.

Розв'язання наведеної системи рівнянь дозволяє знайти усі ймовірності ( $P_j$ ).

Важливим результатом використання методу вкладених ланцюгів Маркова при аналізі характеристик систем масового обслуговування є формула Полячека – Хінчена. Вона дозволяє обчислити середню кількість вимог у момент виходу із системи певної вимоги:



$$\bar{j} = \rho + \rho^2 \frac{\left(1 + \delta_x^2 / \left(\bar{x}\right)^2\right)}{2(1 - \rho)},$$

де:

$\bar{j}$  – середня кількість вимог у системі;

$\rho$  – коефіцієнт завантаження;

$\delta_x^2$  – дисперсія кількості вимог у системі;

$\bar{x}$  – тривалість інтервалу обслуговування.

Тоді, для системи  $M/M/1$  ( $M$  – функція, що описує розподіл проміжків часу між вимогами;  $M$  – функція, що розписує розподіл часу їх обслуговування;  $1$  – кількість каналів) маємо:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\mu^2}; \bar{x} = \frac{1}{\mu}; \bar{j} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Для системи  $M/D/1$ :

$$\bar{t}_{оч,i} = \frac{\bar{T}_0}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}; i = \overline{1, n},$$

$$де: \quad R_0 = 0, R_{i-1} = \sum_{K=1}^{i-1} \rho_K.$$

Для системи  $M/E_r/1$ :

$$\bar{j} = \rho + \frac{\rho^2 \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)}{2(1 - \rho)}.$$

Крім того, можна отримати співвідношення, що визначають середній час очікування вимоги у черзі:

Для системи  $M/G/1$ :

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\rho \bar{x} \left[ 1 + \frac{\sigma_x^2}{(\bar{x})^2} \right]}{2(1 - \rho)}.$$

Для системи  $M/D/1$ :

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\rho}{2\mu(1 - \rho)}.$$

Для системи  $M/E_r/1$ :

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\rho \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right)}{\mu 2(1 - \rho)}.$$

Однією з важливих характеристик системи  $M/G/1$  є середній час до завершення обслуговування вимоги:

$$\bar{T}_0 = 1/2\lambda \bar{x}^2,$$

де:

$\lambda$  – інтенсивність потоку;

$\bar{x}^2 = \nu^2$  – другий початковий момент тривалості обслуговування вимоги у системі.

#### **4.4. Системи масового обслуговування з неоднорідними потоками**

##### **4.4.1. Одноканальні системи масового обслуговування з безпріоритетним обслуговуванням**

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування, у яку поступає потік вимог з інтенсивностями  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ . Тривалість обслуговування кожного з потоків

задають функцією  $A_i(G)$  з математичним очікуванням ( $\nu_i = \bar{x}$ ) і другим початковим моментом тривалості обслуговування ( $\nu_i^2 = \bar{x}_i^2$ ). Обслуговування безпріоритетне. Інтенсивність обслуговування  $i$ -го потоку – ( $\mu_i$ ). Аналіз якості обслуговування проведемо “методом середніх значень”.

Основною характеристикою цього методу є середній час очікування ( $\bar{t}_{оч}$ ). Охарактеризуємо метод, ввівши деякі поняття:

$t_0$  – момент поступлення у систему вимоги з  $i$ -го потоку;

$t_i$  – момент, коли вимога приймається на обслуговування.

Тоді:

$$t_{оч, i} = t_i - t_0 .$$

При безпріоритетному обслуговуванні враховують такі параметри системи:

$T_0$  – час, необхідний для завершення обслуговування швидше вибраної вимоги.

$T_i$  – час обслуговування вимог з  $i$ -го потоку, що надійшли у систему швидше від даної вимоги.

Тоді:

$$t_{оч, i} = \bar{T}_0 + \sum_{i=1}^n \bar{T}_i ,$$

де:

$n$  – кількість вимог у джерелі.

$$\bar{T}_0 = 1/2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{x}_i^2 ,$$

де:

$\bar{x}_i^2$  – другий початковий момент тривалості обслуговування.

$$\bar{T}_i = \bar{x}_i \bar{n}_{0i} = \bar{x}_i \lambda_i \bar{t}_{оч,i},$$

де:

$\bar{x}_i$  – перший початковий момент тривалості обслуговування;

$\bar{n}_{0i}$  – середня кількість вимог у черзі.

Тоді:

$$\bar{t}_{оч,i} = \bar{T}_0 + \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \lambda_i \bar{t}_{оч,i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Звідси виходить, що:

$$\bar{t}_{оч,i} = \frac{\bar{T}_0}{1 - R}, \quad \text{де: } R = \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad \text{а: } \rho_i = \bar{x}_i \lambda_i.$$

Отже, середній час, необхідний для завершення обслуговування раніше вибраної вимоги ( $\bar{T}_0$ ) залежить від

величини ( $\bar{x}_i^2$ ), позаяк:  $\bar{T}_0 = 1/2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{x}_i^2$ .

Запишемо значення ( $\bar{x}_i^2$ ) для різних функцій розподілу у “методі середніх значень”:

- для експоненціальної ( $M$ ):

$$\bar{x}_i^2 = 2(1/\mu_i)^2;$$

- для детермінованої (Лапласа) ( $D$ ):

$$\bar{x}_i = (1/\mu_i)^2;$$

- для функції Ерланга 1-го порядку ( $E_{r_i}$ ):

$$\bar{x}_i = (1/\mu_i)^2 \cdot (1/r_i + 1).$$

#### 4.4.2. Одноканальні системи масового обслуговування з пріоритетним обслуговуванням

*Відносний пріоритет.* Розглянемо дисципліну обслуговування з відносним пріоритетом. При цьому менший номер потоку відповідає вищому відносному пріоритету.

Тоді:

$$\bar{t}_{оч,i} = \bar{T}_0 + \sum_{K=1}^i T_K' + \sum_{K=1}^{i-1} T_K'',$$

де:

$\bar{T}_0$  – визначають за формулою, яка наведена при аналізі систем з безпріоритетним обслуговуванням (п.п. 4.4.1).

$\sum_{K=1}^i T_K'$  – час обслуговування усіх вимог з вищим пріоритетом, які надійшли у систему протягом часу очікування ( $\bar{t}_{оч,i}$ ) вибраної вимоги.

Тоді, для визначення часу очікування вимоги у системі з відносним пріоритетом розв'язують систему рівнянь:

$$\bar{t}_{оч,i} = \bar{T}_0 + \sum_{K=1}^i \rho_K \bar{t}_{оч,K} + \sum_{K=1}^{i-1} \rho_K \bar{t}_{оч,i}; \quad i = \overline{1, n},$$

звідки :

$$\bar{t}_{оч,i} = \frac{\bar{T}_0 + \sum_{K=1}^i \rho_K}{(1 - R_{i-1})}; \quad i = \overline{1, n}.$$

Використовуюючи метод математичної індукції, отримаємо:

$$\bar{t}_{оч,i} = \frac{\bar{T}_0}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}; i = \overline{1, n},$$

$$де: \quad R_0 = 0, R_{i-1} = \sum_{K=1}^{i-1} \rho_K.$$

*Абсолютний пріоритет.* У таких системах час очікування визначають за формулою:

$$\bar{t}_{оч,i} = T_i^H + T_i^П,$$

де:

$T_i^H$  – час очікування початку обслуговування;

$T_i^П$  – час очікування в перерваному стані.

Враховуючи багатократне переривання, отримаємо:

$$T_i^П = \sum_{l=1}^{\infty} T_i^{(l)} = \frac{\nu_1 R_{i-1}}{1 - R_{i-1}},$$

де:

$$\nu_i = x_i; R_{i-1} = \sum_{K=1}^{i-1} \rho_K.$$

Час очікування до початку обслуговування  $i$ -ої вимоги визначають за формулою:

$$T_i^H = \sum_{K=1}^i T_{0,K} + \sum_{K=1}^i T_K' + \sum_{K=1}^{i-1} T_K'' + \sum_{K=1}^i T_K''' ,$$

де:

$\sum_{K=1}^i T_{0,K}$  – час, необхідний для завершення обслуговування раніше вибраної вимоги з вищим або таким же пріоритетом;

$\sum_{K=1}^i T_K'$  – час обслуговування вимог, які надійшли у систему швидше вибраної вимоги;

$\sum_{K=1}^{i-1} T_K''$  – час обслуговування вимог, які надійшли у систему протягом часу очікування вимоги  $i$  мають вищий пріоритет; відповідно, вони приймаються на обслуговування швидше даної вимоги;

$\sum_{K=1}^i T_K'''$  – час обслуговування усіх вимог, які на момент надходження вимоги знаходились у перерваному стані.

Тоді отримаємо:

$$\bar{T}_i^H = \frac{\sum_{K=1}^i 1/2\lambda_K v_K^{(2)}}{(1-R_{i-1})(1-R_i)}; R_0 = 0; i = \overline{1, n},$$

де:

$v_K^{(2)} = \bar{x}^2$  – другий початковий момент тривалості обслуговування.

Додавши час очікування початку обслуговування ( $T_i^H$ ) до часу очікування у перерваному стані ( $T_i^H$ ), обчислюють середній час очікування  $i$ -ої вимоги ( $t_{оч,i}^-$ ) у системі з абсолютним пріоритетом:

$$t_{оч,i}^- = \frac{v_i R_{i-1}}{1-R_{i-1}} + \frac{\sum_{K=1}^i 1/2\lambda_K \cdot v_K^{(2)}}{(1-R_{i-1})(1-R_i)}.$$

#### 4.4.3. Одноканальні системи масового обслуговування зі змішаними пріоритетами

У деяких системах масового обслуговування необхідно задовольнити жорсткі обмеження на тривалість очікування

окремих потоків вимог, що вимагає присвоєння їм класу абсолютних пріоритетів. Щоб витримати обмеження для усіх вимог поряд, з абсолютними пріоритетами, присвоюють деяким вимогам клас відносних пріоритетів, а інші вимоги будуть безпріоритетними. Таку дисципліну обслуговування називають “змішаною”.

Розглянемо змішану дисципліну обслуговування з трьома класами вимог, де є абсолютні, відносні пріоритети та звичайні вимоги, що обслуговуються у порядку надходження. Вимоги I класу (абсолютні пріоритети) мають пріоритет відносно вимог другого і третього класів, а вимоги II класу мають пріоритет відносно вимог III класу.

Для вимог I класу, що мають абсолютний пріоритет, характерна незалежність середнього часу обслуговування. У цьому випадку середній час очікування вимог I класу буде таким же, що й час очікування вимог у дисциплінах з абсолютним пріоритетом, який визначають за формулою:

$$t_{оч,i} = \frac{R_{i-1}V_i}{1 - R_{i-1}} + \frac{\sum_{K=1}^i 1/2\lambda_K V_K^{(2)}}{(1 - R_i)(1 - R_{i-1})}.$$

Вимоги II і III класів у змішаній дисципліні розглядають як вимоги з відносними пріоритетами, час очікування яких збільшується внаслідок переривання тривалості очікування вибраної вимоги (вимоги II чи III класу) вимогами I класу. Зауважимо, що у таких дисциплінах вимоги III класу мають найнижчий відносний пріоритет. Із врахуванням цього середній час очікування вимог таких класів визначають за формулою:

$$\overline{t_{оч,i}} = \overline{t_{оч,i}^{(n)}} + \overline{t_{оч,i}^{(o)}},$$

де:

$\overline{t_{оч,i}^{(o)}}$  – середній час очікування вимог з відносним пріоритетом без врахування переривань з боку вимог I класу;



$\overline{t_{оч,i}}^{(n)}$  – середній час очікування, зумовлений перериванням вимогами I класу.

За аналогією до наведених вище формул знаходимо ( $\overline{t_{оч,i}}^{(n)}$ ):

$$\overline{t_{оч,i}}^{(n)} = \frac{V_i R_i}{1 - R_i},$$

де:

$V_i$  – середній час обслуговування вимоги II класу;

$R_i = \sum_{k=1}^i \rho_k$  – завантаження зі сторони вимог I класу.

Середній час очікування вимог з відносним пріоритетом без врахування переривань з боку вимог I класу ( $\overline{t_{оч,i}}^{(o)}$ ) обчислюють аналогічно до методики визначення середнього часу очікування вимог у дисципліні з відносними пріоритетами:

$$\overline{t_{оч,i}}^{(o)} = \frac{\sum_{K=1}^i \lambda_K V_K^{(2)}}{2(1 - R_{i-1})(1 - R_i)},$$

де:

$V_K^{(2)}$  – похідна від  $V_K$ .

Величина ( $R_{i-1}$ ) характеризує завантаження системи вимогами з вищим відносним пріоритетом (стосовно вимоги, яку аналізують); ( $R_i$ ) характеризує завантаження системи вимогами з вищим пріоритетом.

У зв'язку з цим для вимог III класу час очікування визначають за формулою:

$$\overline{t_{оч,i}}^{(o)} = \frac{\sum_{K=1}^l \lambda_K V_K^{(2)}}{2(1 - R_{l_1+l_2})(1 - R)},$$

де:

$l_1, l_2$  – канали, зайняті вимогами I і II класу.

Для обчислення загального часу очікування ( $\overline{t_{оч,i}}$ ) вимог III класу у змішаній дисципліні середній час очікування вимог з відносним пріоритетом ( $\overline{t_{оч,i}}^{(n)}$ ) додають до середнього часу очікування, що зумовлений перериванням вимогами I класу ( $\overline{t_{оч,i}}^{(o)}$ ).

#### 4.5. Стохастичні мережеві моделі масового обслуговування

Стохастична мережева система масового обслуговування – це сукупність систем масового обслуговування, основною властивістю якої є випадкова передача виконаних вимог з однієї системи у іншу відповідно до матриці передач:  $T = \{\theta_{ij}\}$ .

Кожен елемент ( $\theta_{ij}$ ) матриці ( $T$ ) є ймовірністю передачі вимоги у систему з номером ( $j$ ) після закінчення її обслуговування у системі з номером ( $i$ ).

У простих випадках мережу задають сукупністю характеристик:

$$\{M, T, (\mu_i), (k_i), \lambda_0\},$$

де:

$M$  – кількість вузлів мережі (кількість систем масового обслуговування);

$T = \{\theta_{ij}\}$  – матриця передач;

$\mu_i$  – вектор інтенсивності обслуговування, кожна компонента якого  $\mu_i(n_i)$  залежить від кількості вимог ( $n_i$ ) у вузлі з номером ( $i$ );

$(k_i)$  – вектор складу,  $k_i$  – кількість обслуговуючих приладів у  $i$ -му вузлі;

$\lambda_0$  – інтенсивність поступлення вимог із зовнішнього джерела.

Мережу називають розімкнутою, якщо виконується умова:  $\lambda_0 \neq 0$ . У розімкнених мережевих моделях для відображення зовнішнього середовища вводять вузол з номером (0). Тоді матриця:  $T = \{\theta_{ij}\}$  визначається у межах:

$$0 \leq i, j \leq M \quad \text{і} \quad \sum_{j=0}^M \theta_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots, M.$$

Такі системи будуть функціонувати за умови, що коефіцієнт завантаження ( $\rho_i$ ) кожного вузла не є більшим за одиницю ( $\rho_i < 1$ ). Тоді інтенсивність потоків визначають за формулою:

$$\lambda_i = \alpha_j \lambda_0, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

де:

$\alpha_j$  – коефіцієнт передачі вимог від джерела до  $j$ -го вузла.

Замкнуті мережі систем масового обслуговування характеризуються відсутністю зовнішнього джерела, тобто виконується умова:  $\lambda_0 = 0$ .

Кількість вимог у мережах постійна і дорівнює деякій кількості ( $N$ ). Тоді найпростішу замкнуту мережу задають набором характеристик:

$$\{M, T, (\mu_i), (k_i), N\},$$

Для такої мережі справедливим є співвідношення:

$$\sum_{j=0}^M \theta_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots, M.$$

#### 4.5.1. Замкнуті мережі з одноканальними системами масового обслуговування

Введемо позначення для середніх значень характеристик обслуговування у  $i$ -му вузлі:

$N$  – кількість вимог;

$\bar{t}_{i,N}$  – середній час перебування вимоги у вузлі;

$\bar{n}_{i,N}$  – середня кількість вимог у вузлі;

$q_{i,N}$  – ймовірність знаходження вимоги у  $i$ -му вузлі;

$\rho_{i,N}$  – коефіцієнт завантаження вузла;

$\lambda_{i,N}$  – інтенсивність потоку вимог через вузол.

Середній час перебування вимоги у вузлі визначають за формулою:

$$\bar{t}_{i,N} = \frac{1}{\mu_i} \left( 1 + \frac{N w_i \bar{t}_{i,N}}{\sum_{j=1}^M w_j \bar{t}_{j,N}} \right),$$

де:

$$N = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, M.$$

$w$  – середня відносна частота переходи вимоги через вузол.

Для розв'язання цього рівняння використовують формули:

$$q_{i,N} = \frac{w_i \bar{t}_{i,N}}{\sum_{j=1}^M w_j \bar{t}_{j,N}}; \quad n_{i,N} = Nq_{i,N};$$

$$\rho_{i,N} = \frac{n_{i,N}}{t_{i,N} \mu_i}; \quad \lambda_{i,N} = \mu_i \rho_{i,N}.$$

Хоча наведений вище спосіб придатний лише для визначення середніх параметрів функціонування моделі замкнутої мережі, відносна простота обчислень може у багатьох випадках забезпечити високу ефективність застосування цього методу, особливо на початкових етапах системного проектування обчислювальних комплексів.

#### 4.5.2. Багатоканальні замкнуті мережі

Ймовірність знаходження у  $i$ -му вузлі ( $n_i$ ) вимог визначають за формулою [105, 108]:

$$P(n_1, \dots, n_M) = q(n_1, \dots, n_M) / G_M(N),$$

де:

$q(n_1, \dots, n_M)$  – ймовірність знаходження вимоги у  $i$ -му вузлі;

$G_M(N)$  – нормуюча константа.

Враховуючи алгоритмічні перетворення запишемо:

$$P_M(n) = x_M(n) G_{M-1}(N - n) / G_M(N), \quad \text{для } n = 0, 1, \dots, N,$$

де:

$x_M(n)$  – величина, що залежить від середньої кількості вузлів та вимог у вузлах.

Відповідно, інтенсивність ( $\lambda_{M,N}$ ) потоку вимог через  $M$ -й вузол визначають за формулою:

$$\lambda_{M,N} = w_M G_M(N-1) / G_M(N),$$

де:

$w_M$  – середня частота переходу вимоги через вузол.

#### 4.6. Стохастичні напівмарковські системи

При математичному описуванні реальних систем необхідно визначити основні кількісні параметри (характеристики) системи, які повністю характеризують поведінку системи у конкретних умовах.

Сукупність можливих різноманітних станів системи називають “*фазовим простором станів*”.

Фазовим простором станів може бути множина елементів (буквених, цифрових), які придатні для шифрування різних станів системи.

Функціонування системи полягає у тому, що протягом певного часу відбувається зміна станів системи, тобто перехід з одного стану у інший.

Розглянемо основні напрямки функціонування системи, що дозволяють побудувати напівмарковські моделі стохастичних систем:

1. Скачковидна зміна станів – перехід з одного стану у інший відбувається дискретно (у вигляді скачків). У кожному стані система перебуває певний проміжок часу, а потім миттєво переходить у інший стан.

У реальних системах такий перехід займає певний час. У такому випадку тривалість переходу зараховують до часу перебування вимоги у вихідному стані, а сам перехід вважають миттєвим.

2. Стохастичність системи – випадковий характер зміни станів системи і випадковість часів перебування у станах. Зміна станів системи відбувається відповідно з ймовірностями

переходів, а часи перебування у стані є випадковими величинами.

3. Часова однорідність системи – незалежність ймовірностей переходів між станами, а також незалежність розподілів часів перебування у станах від кількості здійснених переходів системи.

4. Напівмарковська властивість системи, що означає: незалежність ймовірностей переходів зі стану у стан і незалежність розподілу часів перебування у станах від тривалості перебувань та реалізації процесу переходу інших (попередніх) вимог. Це означає, що система у даний момент часу має марковські властивості і повністю “забуває” (тобто не залежить від перебігу у ній марковських процесів) свої попередні дії, а подальша її еволюція повністю залежить від теперішнього стану.

Узагальнимо відомості про марковський та напівмарковський процеси.

#### **4.6.1. Основні властивості марковських процесів**

1. Стаціонарність (перехідні ймовірності та часи перебування у тому чи іншому стані не залежать від часу).

2. Одиарність (за певний інтервал часу не може відбутися більше одного переходу зі стану у стан).

3. Відсутність наслідків (вся наступна траєкторія переходів процесу зі стану у стан залежить тільки від теперішнього стану і не залежить від попередньої історії розвитку даного процесу).

#### **4.6.2. Основні відмінності між марковськими і напівмарковськими процесами**

Відомо, що властивість відсутності наслідків (марковська властивість) зберігається лише у момент переходу зі стану у стан [107]. При кожному переході часова шкала зсувається до ( $t_0 = 0$ ) і перебіг процесу надалі відбувається, починаючи з

нульового часового параметру. Час відраховують з початку останнього переходу.

Якщо реєструвати тільки моменти переходів у конкретні стани  $(e_i)$ , тоді відбуватиметься процес “марковського відновлення”. У такому процесі часи між двома послідовними переходами взаємно незалежні і однаково розподілені.

Іноді зустрічається ситуація, коли марковська властивість виконується тільки для деякої множини  $(E)$  станів системи. Якщо розглядати тільки переходи з  $(E)$  станів, тоді отримують вкладені процеси  $\{S(t), t \geq 0\}$ , які, у свою чергу, називають “вкладеними напівмарковськими процесами”.

Існує декілька способів реалізації “процесу марковського відновлення”.

- *Конструктивний спосіб.* Процес марковського відновлення описують функціонуванням системи у просторі станів  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  і задають

$$Q_{KЧ}(t) =$$

напівмарковською матрицею:  $P\{S_{n+1} = r, \theta_{n+1} = t / S_n = K\}$ ;  
 $K, r \in E$

Елемент напівмарковської матриці  $(Q_{KЧ}(t))$  визначається ймовірністю того, що відбудеться перехід зі стану  $(K)$  у стан  $(n)$  і кількість перебувань у стані  $(K)$  буде не більшою від  $(t)$ .

- *Заданням матриці перехідних ймовірностей і розподілів часів перебування у станах.* У такому випадку основні характеристики систем описують перехідними ймовірностями вкладених ланцюгів Маркова і функціями розподілу часів перебування у станах:  $G_K(t)$ .

- *Стохастичний спосіб.* На практиці процес марковського відновлення, що описує функціонування реальної системи, визначають за такою формулою:

$$\alpha_K = \min_{r \in E_K} \{\alpha_{Kr}\}.$$

У цьому випадку для кожного стану системи  $(e_K)$  задають тривалість реалізації процесу



$(\alpha_{kr}, r \in E_K)$  випадкових факторів, що призводять до зміни станів системи, тобто до переходу  $(e_K \rightarrow e_r)$ . Потім визначають тривалість перебування процесів у певних станах і переходів конкретно визначених вкладених ланцюгів Маркова.

### Список літературних джерел

1. Томашевський В.М. Моделювання систем / В.М.Томашевський.-К.:Вид-во “ВНУ”, 2005.-352с.
2. Колесов И.М., Пузакова Т.Г. Временные связи и эффективность производственного процесса // Вестник машиностроения.-1981.-№7.-С.42-46.
3. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных.-М.:Финансы и статистика, 1983.-471с.
4. Банди Б. Методы оптимизации: Вводный курс.-М.:Радио и связь, 1988.-128с.
5. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование.-М.:Наука, 1982.-296с.
6. Морозов К.Е. Математическое моделирование в научном познании.-М.: Мысль-1969.-215с.
7. Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие / Под общ. ред. И.В.Кузьменко.- К.: Вища школа, 1981.-360с.
8. Ситник В.Ф., Орленко Н.С. Імітаційне моделювання: Навч. посібник.-К.:КНЕУ, 1998.-208с.
9. Ситник В.Ф., Орленко Н.С. Імітаційне моделювання: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц.-К.:КНЕУ, 1999.-208с.
10. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Практикум: Учеб. пособие для вузов.-М.: Высш. шк., 1999.-224с.
11. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов.-М.: Высш. шк., 1998.-320с.
12. Статистическое моделирование и прогнозирование: Учебное пособие / Г.М.Гомбаров, Н.М.Журавель и др., Под ред. А.Г.Гранберга.-М.:Финансы и статистика, 1990.-383с.
13. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука.- М.: Мир, 1978.-418с.
14. Цвиркун А.Д., Акинфеев В.К., Филиппов В.А. Имитационное моделирование в задачах синтеза

- структуры сложных систем: Оптимизац.-имитац. подход / Отв. ред. В.Н.Бурков.- М.: Наука, 1985.-173с.
15. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности.-М.:Наука, 1965.-524с.
  16. Кузин Л.Т. Основы кибернетики.-Т.2.: Основы кибернетических моделей.-М.:Энергия,1979.-584с.
  17. Литвинов В.В., Марьянович Т.П. Методы построения имитационных систем.-К.: Наукова думка, 1991.-120с.
  18. Томашевський В.М., Данова О.Г. Метод структурної оптимізації з використанням імітаційної моделі // Міжнародна конференція з індуктивного моделювання.-Т.2.-Львів: Державний НДІ інформаційної структури, 2002.-С.224-227.
  19. Становление и развитие имитационного моделирования в Украине / В.В.Бигдан, В.В.Гусев, Т.П.Марьянович, М.А.Сахнюк // Пр. міжнар. симп. “Комп’ютери у Європі. Минуле, сучасне і майбутнє”.-К., 1998.-С.182-193.
  20. Томашевський В.М. Імітаційне моделювання систем і процесів.-К.: ІСДО, 1994.-124с.
  21. Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский О.И. Моделирование автоматизированных линий.- Севастополь:СевГТУ, 2006.-240с.
  22. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление.-Вып.1.-М.:Мир, 1974.-406с.
  23. Кравчук А.Ф. Основы дискретной математики.-К.: НМК ВО, 1992.-196с.
  24. Николаев В.И., Брук В.М. Системотехника: методы и приложения.-Л.: Машиностроение, 1985.-199с.
  25. Игнатьева А. В., Максимцов М. М. Исследование систем управления.- М.:Наука, 2000.-234с.
  26. Патерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М.: Мир, 1984.-384с.
  27. Прикер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМП. - М.: Мир, 1987.-182с.

28. Советов Б. Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Курсовое проектирование.-М.: Высшая школа, 1988.-86с.
29. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством.-М.: Наука, 1975.-616с.
30. Коваленко И.Н., Наконечный А.Н. Приближенный расчет и оптимизация надежности.-К.: Наукова думка, 1989.-184с.
31. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем.-М.: Радио и связь думка, 1988.-176с.
32. Букетов А.В., Стухляк П.Д., Кальба Є.М. Фізико-хімічні процеси при формуванні епоксикомпозитних матеріалів.-Тернопіль: Збруч, 2005.-182с.
33. Букетов А.В., Стухляк П.Д., Левицький В.В., Долгов М.А. Дослідження епоксикомпозитів, що містять модифіковані олігомерами наповнювачі // Вісник ТДТУ.-2004.-№2.-С.52-59.
34. Стухляк П.Д., Букетов А.В., Левицький В.В. Епоксидні композити. Дослідження механізму впливу технології формування на властивості // Хімічна промисловість України.-2004.-№5.-С.17-23.
35. Стухляк П.Д., Букетов А.В., Добротвор І.Г. Епоксикомпозитні матеріали, модифіковані енергетичними полями.-Тернопіль: Збруч, 2008.-208с.
36. Копп В.Я. Математическая модель функционирования многопоточной гибкой автоматизированной линии сборки // Механизация и автоматизация производства.-1990.-№11.-С.31-34.
37. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры.- 2-е изд., испр.-М.: Физматлит, 2001.-316с.
38. Томашевський В.М., Данова О.Г., Жлдаков О.О. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання.-К.: Корнійчук, 2001.-267с.
39. Васильев Д.В., Сабинин О.Ю. Ускоренное статистическое моделирование систем управления. -Л.: Энергоиздат, 1987.-136с.

40. Харари Ф. Теория графов.-М.: Мир, 1973.-300с.
41. Холл А.Д. Опыт методологии для системотехники.- М.:Сов. Радио, 1975.-444с.
42. Основы системного анализа и проектирования АСУ: Учеб. пособие / А.А. Павлов, С.Н. Гриша, В.Н.Томашевский и др.; Под общ. ред. А.А.Павлова.-К.: Вища школа, 1991.-367с.
43. Заболотский В.П., Оводенко А.А., Степанов А.Г. Математические модели в управлении: Учебное пособие.-СПб.: СПбГУАП, 2001.-196с.
44. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ.-М.: Радио и связь, 1988.-232с.
45. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технология.-СПб.: КОРОНА принт.; М.: Альтекс-А, 2004.-384с.
46. Акаике Х. Развитие статистических методов.- В кн.: Современные методы идентификации систем.- М.: Мир, 1983.-400с.
47. Борисенко Е.П. Климат и деятельность человека.-М.: Наука, 1982.-129с.
48. Беляев В.И. Теория сложных геосистем.-К.: Наукова думка, 1978.-152с.
49. Берталанфи Л. История и статус общей теории систем.- В кн.: Системные исследования: Ежегодник, 1973.-М.: Наука, 1973.-С. 20-37.
50. Бокс Дж., Дженкис Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.-М.: Мир, 1974.-180с.
51. Браверман В.Я., Ивахненко Н.А. Прогнозирование производительности труда в энергетическом строительстве на основе алгоритмов МГУА // Автоматика.-1981.-№ 2.- С. 10-17.
52. Букатова И.Л. Эволюционное моделирование: Идеи, основы теории, приложения.-М.: Знание, 1981.-64с.
53. Ивахненко А.Г., Карпинский А.М. Самоорганизация моделей на ЭВМ в терминах общей теории связи (теории информации) // Автоматика.-1982.-№ 4.-С.7-26.
54. Ивахненко А.Г., Степашко В.С. Помехоустойчивость моделирования.-К.: Наукова думка, 1984.-295с.

55. Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей.-К.: Техника, 1985; Берлин: ФЭБ Ферлаг Техник, 1984.-223с.
56. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.-М.: Наука, 1979.-285с.
57. Горелова В.Л. Математические методы прогнозирования.-В кн.: Рабочая книга по прогнозированию.- М.: Мысль, 1982.-430с.
58. Дылбокова Д.А., Дылбоков И.С. Прогнозирование тенденций развития ЭЦВМ по МГУА по дробно-линейным частным описаниям и критерию баланса переменных // Автоматика.- 1975.-№ 2.- С.30-37.
59. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем.-К.: Наукова думка, 1982.-296с.
60. Перцептрон – система распознавания образов / Под ред. А.Г. Ивахненко.-К.: Наукова думка, 1975.-419с.
61. Ивахненко А.Г., Степашко В.С. Численное исследование помехоустойчивости многокритериальной селекции моделей // Автоматика.-1982.-№ 4.-С.26-36.
62. Кикоть В.С. Планирование эксперимента в задачах самоорганизации математических моделей // Автоматика.-1984.-№ 1.-С.32-39.
63. Ивахненко А.Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике.-К.: Техника, 1971.-364с.
64. Козубовский С.Ф., Юрачковский К.О. Информационные критерии селекции моделей // Автоматика.-1981.-№ 4.-С.80-89.
65. Маттес Б., Мюллер И. Прогнозирование временных рядов с помощью динамических моделей // Автоматика.-1982.-№4.-С.26-36.
66. Степашко В.С. Конечная селекционная процедура сокращения полного перебора моделей // Автоматика.-1983.-№4.-С.84-88.
67. Duffy J.J., Franklin M.A. A Case Study of Environmental System Modeling with Group Method of Data Handling //

- Proceedings of the 1973 JACC, Ohio State University.-  
Columbia, Ohio.-1973.-P. 101-111.
68. Duffy J.J., Franklin M.A. A Learning Identification Algorithm and Its Application to an Environmental System // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.-1975, Vol. SMC-5.-N5.-P.226-240.
  69. Ikeda S., Ochiai M., Sawaragi Y. Sequential GMDH Algorithm and Its Application to River Flow Prediction // IEEE Trans, on System., Man., Cybern.-1976, Vol. SMC-6.-N7.-P.473-479.
  70. Fisher R. The Influence of Rainfall on the Yield of Wheat at Rotamsted // Phil Trans. Roy. Soc.-Ser. B.-1925.-N213.-P.3.
  71. Haustein H., Hoffmann H. Zur Ökonomischen Analyse langfristiger Tendenzen des technischen Niveaus der Fertigung im social ist ischen Industriebetrieb // Wiss. Ztschr., Hochschule für Ökonomie "B. Leusehner".-1976.-H.4.-S.98-111.
  72. Ivakhnenko A.O. Polynomial Theory of Complex Systems // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics.-1971, Vol. SMC-1.-N4.-P.364-378.
  73. Maciejowski J.M. Model discrimination using an Algorithmic Information Criterion //Automatica.-1979, Vol. 15.-N6.-P.579-593.
  74. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах.-М.: Наука, 1968.-399с.
  75. Брусилковский П.М., Розенберг Г.С. Проверка неадекватности имитационной модели динамической системы с помощью алгоритмов МГУА // Автоматика.-1981.-№ 6.-С.43-48.
  76. Растрингин Л.А., Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления.-М.: Энергия, 1977.-215с.
  77. Пелинг В. Образование структур при необратимых процессах.-М.: Мир, 1978.-280с.
  78. Ивахненко А.Г., Зайченко Ю.П., Димитров В.Д. Принятие решений на основе самоорганизации.-М.: Сов. радио, 1976.-280с.

79. Налимов В.В. Теория эксперимента.-М.: Наука, 1971.-200с.
80. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептроны и теория механизмов мозга.-М.: Мир, 1965.-467с.
81. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.-К.: Техніка, 1975.-372с.
82. Юрачковский Ю.П. Восстановление полиномиальных зависимостей на основе самоорганизации // Автоматика.-1981.-№ 4.-С.15-20.
83. Ивахненко А.Г. Новые акценты в теории самоорганизации моделей // Автоматика.-1981.-№ 6.-С.48-60.
84. Эшби У. Схема усилителя мыслительных способностей.-В кн.: Автоматы.-М.: Изд-во иностр. лит., 1970.-401с.
85. Ивахненко А.Г., Пека П.Ю., Востров Н.Н. Комбинированный метод моделирования водных и нефтяных полей.-Наукова думка, 1984.-150с.
86. Флейшман Б.С. Элементы теории потенциальной эффективности сложных систем.-М.: Сов. радио, 1971.-224с.
87. Васильев В.И., Коваль П.Н., Коноваленко В.В. Имитационное управление сталеплавильными процессами с использованием элементов теории распознавания образов // Автоматика.-1982.-№1.-С.60-65.
88. Sawaragi Y., Soelda T., Tamura H. Statistical Prediction of Air Pollution Levels Using Non—Physical Models // Automática.-1979, Vol. 15.-№4.-P.441-451.
89. Автоматизация проектирования и производства микросборок и электронных модулей / Под ред. Н.П. Меткина.-М.: Радио и связь, 1986.-280с.
90. Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения.-М.: Мир, 1969.-486с.
91. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования: Учеб пособие для вузов.-М.: Радио и связь, 1984.-248с.



92. Буш Р., Мостеллер Ф. Сравнение восьми моделей // Математические методы в социальных науках: Сб. статей / Под ред. П. Лазарсфельда и Н. Генри; Пер. с англ.-М.: Прогресс, 1973.-С. 295-315.
93. Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости.-М.: Физматгиз, 1962.-484с.
94. Дружинин Г.В. Надёжность автоматизированных производственных систем.-М.: Энергоатомиздат, 1986.-480с.
95. Лялько С.Б. Математические модели надёжности программного обеспечения.-К.: О-во "Знание", 1988.-20с.
96. Меньшин Г.Г., Кирпич С.В. Обеспечение качества функционирования автоматизированных систем.- Минск: Наука и техника, 1986.-222с.
97. Погребинский С.Б., Стрельников В.П. Проектирование и надёжность многопроцессорных ЭВМ.-М.: Радио и связь, 1988.-168с.
98. Норенков И.П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем.-М.: Высшая школа, 1986.-304с.
99. Вермишев Ю.Х. Методы автоматического поиска решений при проектировании сложных технических систем.- М.: Радио и связь, 1982.-152с.
100. Тищенко Н.М. Введение в проектирование систем управления.-М.: Энергоатомиздат, 1986.-248с.
101. Головкин Б.А. Параллельные вычислительные системы.- М.: Наука, 1980.-135с.
102. Янбых Г.Ф., Столяров Б.А. Оптимизация информационно-вычислительных сетей.-М.: Радио и связь, 1987.-232с.
103. Обжерин Ю.Е., Скатков А.В. Полумарковская модель системы массового обслуживания с потерями / Севастоп. приборостроит. ин-т.-Севастополь, 1987.-19с. – Деп. В УкрНИИИТИ 06.07.87, №1982 – Ук87.
104. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания.-М.: Машиностроение, 1979.-431с.

105. Основы теории вычислительных систем / Под ред. С.Майорова.-М.: Высшая школа, 1976.-407с.
106. Липаев В.В., Колин К.К., Серебровский Л.А. Математическое обеспечение управляющих ЦВМ.-М.: Советское радио, 1972.-527с.
107. Скатков А.В., Филатова Е.В. Математическое моделирование векторного процессора при циклических дисциплинах обслуживания / Вестник СевГТУ, вып. 26: Севастополь, 2000.- С.90-97.
108. Дурандин К.П., Ефремов В.Д., Колесников Д.Н., Никонов В.В. и др. Моделирование сложных систем с использованием сетей массового обслуживания.-Л.: ЛПИ, 1978.-75с.

## **Додатки**

**Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з  
дисципліни “Ідентифікація і моделювання технологічних  
об’єктів”**

## Лабораторна робота № 1

**Тема:** Моделювання прямолінійних рухів.

**Мета:** навчитися складати схеми диференціальних рівнянь, писати програми для їх розв'язування, проводити машинний експеримент та інтерпретувати його результат, оцінювати кількісні та якісні характеристики поведінки досліджуваних об'єктів.

### 1. Короткі теоретичні відомості.

Вивчення прямолінійних рухів є необхідним для розуміння багатьох фізичних явищ, які виникають у системах керування, а також при ідентифікації таких систем. Зокрема, аналіз падіння тіл поблизу поверхні Землі має важливе значення при дослідженні фізики поверхневих явищ, розрахунку прямолінійності руху часток та об'єктів різноманітної форми. У зв'язку з різноманітністю та складністю механізмів таких рухів, числове (за допомогою ЕОМ) моделювання (машинний експеримент) має важливе значення.

**Основні поняття.** Розглянемо рух ідеалізованого об'єкта (матеріальної точки або об'єкта, який не має внутрішньої структури) у одновимірному випадку. Для опису одновимірного руху необхідна лише одна просторова координата. Використовуючи диференціальні рівняння, миттєву координату  $y(t)$ , швидкість  $v(t)$  і прискорення  $a(t)$  можна записати таким чином:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}; \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}. \quad (1.1)$$

Ці величини будемо називати *кінематичними*.

Скористаємось законом Ньютона для визначення прискорення матеріальної точки:

$$a(t) = \frac{1}{m} F(y, v, t), \quad (1.2)$$

де:

$F$  – рівнодійна сила;

$m$  – інертна маса.

Як видно з формули, сила залежить від координати, швидкості і часу. Фізичний зміст закону Ньютона полягає у тому, що рух матеріальної точки не залежить від відношення  $d^2v/dt^2$  і будь-яких похідних за швидкістю вищого порядку.

Часто рівняння (1.1) і (1.2) записують у вигляді одного рівняння другого порядку відносно координати:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}. \quad (1.3)$$

При відсутності опору повітря всі тіла незалежно від їх маси, розмірів і природи на однаковій відстані від земної поверхні мають однакове прискорення.

Згідно закону тяжіння силу, що діє на тіло з масою  $m$ , визначають за формулою:

$$F = \frac{GMm}{(R+y)^2} = \frac{gm}{(1+y/R)^2},$$

де:

$g = GM/R^2$ ;

$y$  – віддаль від об'єкта до поверхні Землі;

$M$  – маса Землі;

$R$  – радіус Землі.

Крім того, на об'єкт, що падає, діє сила опору повітря, яка залежить від швидкості руху фізичного тіла. Залежність сили, що діє на об'єкт від його швидкості записують у вигляді

формул:

$$F_1(v) = k_1 v \quad \text{і} \quad F_2(v) = k_2 v^2, \quad (1.4)$$

де:

коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  враховують властивості середовища та геометрію об'єкта.

Вирази (1.4) є *феноменологічними* (тобто є результатом аналізу перебігу фізичних процесів) виразами, а не законами.

При рівновазі сил тяжіння та опору повітря, коли прискорення тіла дорівнює нулю, існує гранична швидкість, яка для виразів (1.4) матиме вигляд:

$$v_1 = \frac{mg}{k_1} \quad \text{або} \quad v_2 = \left[ \frac{mg}{k_2} \right]^{1/2}. \quad (1.5)$$

Враховуючи вирази (1.4) і (1.5) рівнодійну силу, яка діє на об'єкт, що падає, обчислюють за формулами:

$$F_1(v) = mg(1 - v/v_1) \quad \text{або} \quad F_2(v) = mg(1 - v^2/v_2^2). \quad (1.6)$$

## 2. Схема диференціального рівняння.

Розв'язування диференціальних рівнянь називають їх інтегруванням. Справді, знижуючи порядок рівняння шляхом інтегрування лівої і правої частини (порядком рівняння називають порядок вищої похідної), отримують розв'язок:

$$y(t) = F(i(x(t), k_1 \int y(t) dt, k_2 \int y(dt) \dots)). \quad (1.7)$$

Наприклад, для рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + a \frac{d}{dy} y(t) + a_0 y(t) = x(t),$$

МАТИМЕМО:

$$y(t) = x(t) - a_0 \iint y(t)dt + a_1 \int y(t)dt . \quad (1.8)$$

На основі рівнянь (1.7) і (1.8) побудовано блок-схему, яку наведено на рис.1.1.

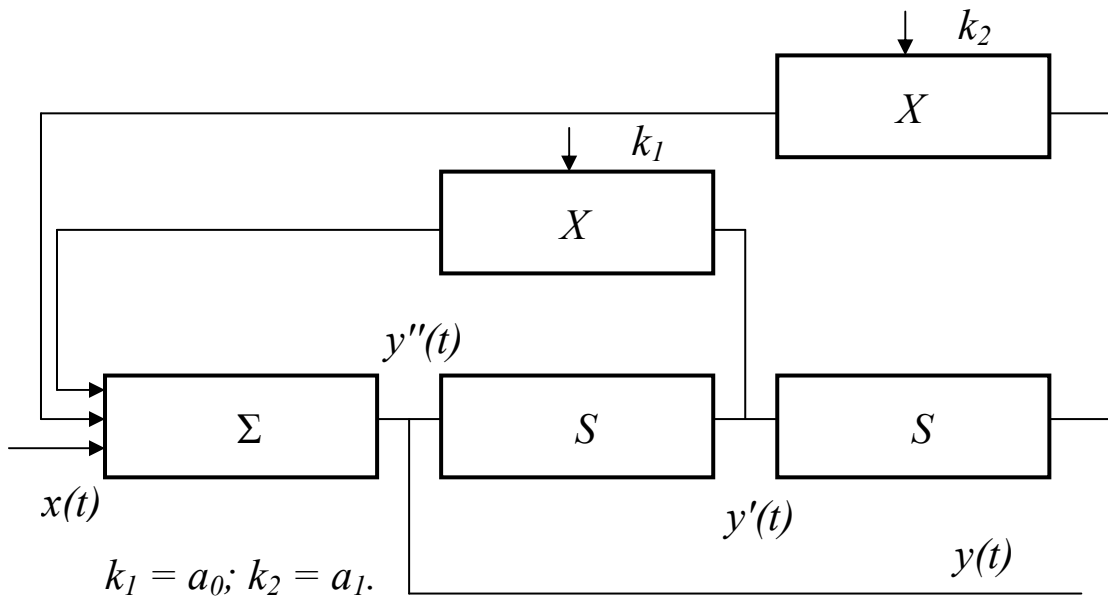


Рис. 1.1. Схема диференціального рівняння.

У цифровому виконанні інтеграл має такий вигляд (рис. 1.2):

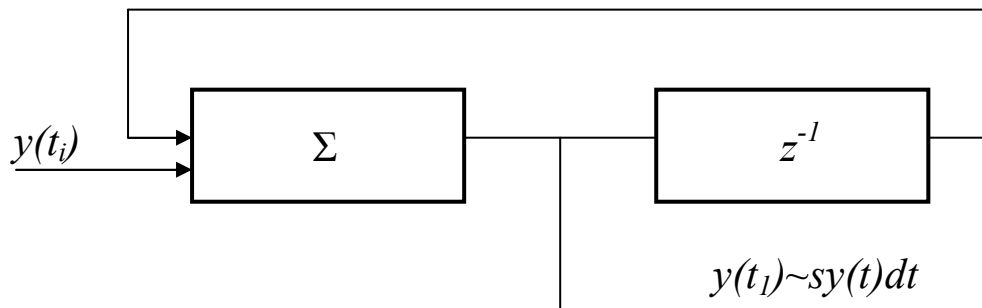


Рис. 1.2. Схема реалізації інтегрування.

На рис. 1.2:  $z^{-1} = e^{-j\omega T}$ ,  $T$  – період дискретизації.

Тоді, загальна дискретна схема рівняння матиме вигляд (рис. 1.3).

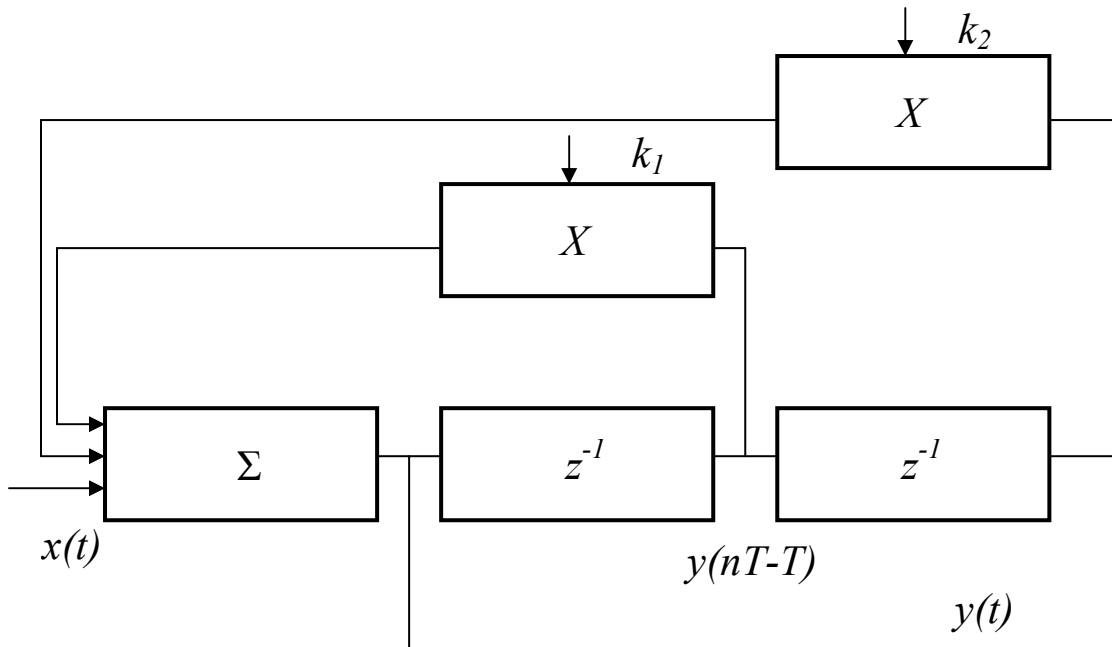


Рис. 1.3. Дискретна схема рівняння.

Алгоритм роботи схеми рівняння (рис. 1.3) має вигляд:

1.  $y(nT - 2T) = y(nT - T)$ ; зміщення даних у регістрах або:
2.  $y(nT - T) = y(nT)$ ; затримка на один такт;
3.  $y(nT) = x(nT) + k_1 y(nT - T) + k_2 y(nT - 2T)$ ; відлік розв'язку рівняння;
4.  $n = n + 1$ ;
5. перехід на крок 1.

Отже, знаючи початкові умови, отримують необхідну кількість значень розв'язку.



### 3. Завдання.

1. Скласти диференціальне рівняння падіння пінопластової кульки у повітрі.
2. Скласти схему цього диференціального рівняння.
3. Написати програму для його розв'язування.
4. Провести машинний експеримент для вибору оптимальної моделі. Skorистатися результатами натурного експерименту (табл. 1.1).
5. Нанести результати моделювання (разом експериментальними даними) у одній системі координат і визначити, яка крива моделювання краще узгоджується з експериментальною (за своїм варіантом завдання (табл. 1.2)).
6. Зробити висновок до роботи.

Таблиця 1.1

Результати дослідження падіння пінопластової кульки з параметрами:  $m = 0,254$  г,  $r = 2,54$  см.

Час, $t$ , с	Координата, $h$ , м
0,0	0,075
0,1	0,260
0,2	0,525
0,3	0,870
0,4	1,270
0,5	1,730
0,6	2,230
0,7	2,770
0,8	3,350

## Варіанти завдання

Варіант	$m$ , г	$r$ , см
1	0,346	2,01
2	0,387	2,43
3	0,405	2,76
4	0,391	2,15
5	0,502	2,92
6	0,245	3,01
7	0,267	3,12
8	0,321	2,34
9	0,421	3,41
10	0,457	3,72

**4. Контрольні питання.**

1. З якою метою застосовують моделювання прямо-лінійних рухів?
2. Що таке ідеалізований об'єкт? Як визначають рівнодійну силу, яка діє на об'єкт, що падає?
3. Що таке схема диференціального рівняння?
4. Як отримують схему диференціального рівняння?
5. Пояснити роботу дискретного інтегратора.
6. Як формують диференціальні рівняння?

## Лабораторна робота №2

**Тема:** Моделювання явищ передачі тепла.

**Мета:** навчитися складати програми для моделювання явищ передачі тепла з використанням алгоритму Ейлера.

### 1. Короткі теоретичні відомості.

Явища, пов'язані з перенесенням тепла від нагрітого тіла у навколишнє середовище, поділяють на: конвекцію, випромінювання, випаровування і теплопровідність. Вони мають важливе значення для аналізу надійності, технічної готовності та працездатності технологічного устаткування, оскільки визначають його теплові режими функціонування.

Якщо різниця температур між нагрітим тілом і середовищем не є досить великою, тоді швидкість зміни температури можна вважати пропорційною цій різниці. Це твердження можна записати у вигляді диференціального рівняння:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -r(T(t) - T_s), \quad (2.1)$$

де:

$T$  – температура тіла;

$T_s$  – температура середовища;

$r$  – “коефіцієнт охолодження”.

“Коефіцієнт охолодження” залежить від механізму теплопередачі, об'єму тіла і його теплофізичних властивостей. Знак “–” зумовлений фізичним змістом явища, що пояснюють таким чином. Температура тіла зменшується, тому залежність температури від часу  $T(t)$  повинна мати вигляд спадної функції. Тоді вираз:  $\frac{dT(t)}{dt}$  при різних  $t$  ( за умови, що:  $T > T_s$ ) має бути меншим від нуля.

Співвідношення (2.1) називають *законом теплопровідності Ньютона*.

Рівняння (2.1) є прикладом диференціального рівняння першого порядку, позаяк воно містить лише першу похідну невідомої функції  $T(t)$ . Більшість процесів, які відбуваються у природі, описують диференціальними рівняннями, тому важливо вміти розв'язувати ці рівняння. Розглянемо рівняння першого порядку:

$$\frac{dy(t)}{dx} = g(x). \quad (2.2)$$

У загальному випадку *аналітичного* розв'язку наведеного рівняння не існує. Крім того, для кращого розуміння розв'язок цього рівняння доцільно подати у графічному вигляді. Наведені причини спонукають до пошуку не точних, а наближених числових методів розв'язку диференціальних рівнянь. Виходячи з цього, ознайомимось з простими методами графічного подання розв'язків рівнянь (зокрема, з алгоритмом Ейлера).

### **Алгоритм Ейлера.**

Типовий метод числового розв'язку диференціальних рівнянь ґрунтується на перетворенні диференціального рівняння у кінцево-різницево. Проаналізуємо рівняння (2.2). Припустили, що при  $(x=x_0)$  функція  $(y = y_0)$ . У подальшому знаходять наближене значення функції  $(y)$  у точці  $(x_1 = x_0 + \Delta x)$ , якщо приріст аргументу  $(\Delta x)$  є незначним. Для цього приймають, що приріст функції  $(\frac{dy}{dx})$ , або швидкість зміни  $(y)$  на проміжку  $(\Delta x)$  (від  $x_0$  до  $x_1$ ) не збільшується. Тоді наближене значення функції  $(y)$  у точці  $x_1 = x_0 + \Delta x$  обчислюють за формулою:

$$y_1 = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + g(x_0)\Delta x = y_0 + g(x_0)\Delta x. \quad (2.3)$$

Повторивши наведені вище обчислення ще раз, знаходять значення функції ( $y$ ) у точці  $x_2 = x_1 + \Delta x$  :

$$y_2 = y(x_1 + \Delta x) \approx y(x_1) + g(x_1)\Delta x = y_1 + g(x_1)\Delta x. \quad (2.4)$$

Узагальнивши це правило отримаємо, що для будь-якої точки  $x_n = x_0 + n\Delta x$  справедлива формула:

$$y_n = y_{n-1} + g(x_{n-1})\Delta x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Цей метод є числовим методом розв'язування диференціальних рівнянь, який називають *методом Ейлера* (або методом *дотичних*). Очевидно, що для невеликих значень ( $\Delta x$ ) метод є достовірним. Величину ( $\Delta x$ ) для кожного конкретного випадку вибирають відповідно до поставлених у задачі вимог.

Передбачають, що швидкість зміни функції ( $y$ ) на відрізку від  $x_{n-1}$  до  $x_n$  є постійною, а нахил дотичної обчислюють у початковій точці відрізка. Графічну інтерпретацію виразу (2.5) наведено на рис. 2.1.

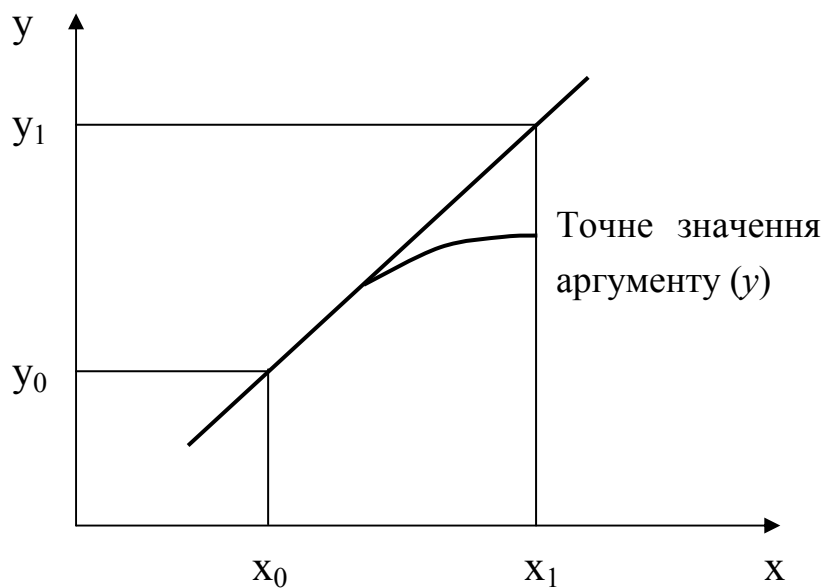


Рис. 2.1. Графічна інтерпретація методу Ейлера.

Нахил дотичної обчислюють у початковій точці інтервалу (рис. 2.1). Наближення Ейлера і реальна функція характеризуються прямою і кривою відповідно.

У випадку, коли нахил дотичної змінюється на деякому відрізку прямої, зростає похибка експерименту і, як наслідок, розроблена модель буде неадекватною до поведінки об'єкта. За таких умов для підвищення точності експерименту і збільшення адекватності моделі слід зменшити значення  $\Delta x$ .

## 2. Алгоритм виконання роботи.

1. Вибрати, виходячи з умови задачі, величину кроку ( $\Delta x$ ) і кількість інтеграцій ( $n$ );
2. Знайти значення функції ( $y$ ) та її нахил ( $g$ ) у початковій точці ( $x_0$ );
3. Обчислити кінцеве значення функції ( $y$ );
4. Повторити другий та третій кроки необхідну кількість разів.

## 3. Завдання.

1. Скласти програму моделювання процесу вистигання казеїнового клею, використовуючи алгоритм Ейлера.
2. Підібрати значення кроку інтеграції ( $\Delta t$ ) та коефіцієнта охолодження ( $r$ ) такими, щоб результат моделювання якнайменше відрізнявся від результату експерименту (табл. 2.1).
3. Розв'язати завдання. *Початкова температура казеїнового порошку становить  $90^\circ\text{C}$ . Його охолоджують на установці (рис. 2.2) і застосовують у технологічному процесі при температурі  $75^\circ\text{C}$ . Використання теплообмінника забезпечує зниження температури казеїну на  $5^\circ\text{C}$ . Як швидше охолодити казеїн:*
  - а) чекати, поки він вистигне до  $80^\circ\text{C}$ , а потім використати теплообмінник?
  - б) зразу використати теплообмінник, а потім

*чекати поки казеїн вистигне.*

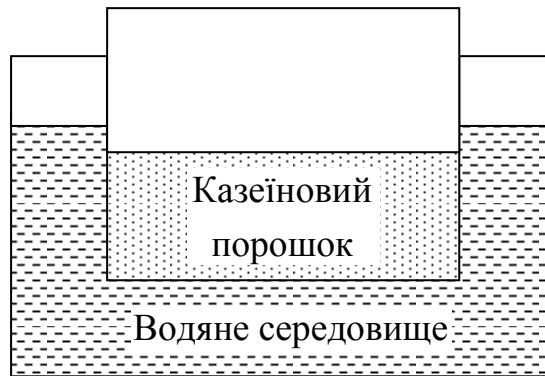


Рис. 2.2. Установка для вистигання казеїнового порошку у теплообміннику.

Таблиця 2.1

Результати дослідження вистигання казеїнового порошку, розміщеного у теплообміннику (температура повітря становить 22°C).

Час вистигання, $t$ , хв.	Температура, $T$ , °C	Час вистигання, $t$ , хв.	Температура, $T$ , °C
0	83,0	8	64,7
1	77,7	9	63,4
2	75,1	10	62,1
3	73,0	11	61,0
4	71,1	12	59,9
5	69,4	13	58,7
6	67,8	14	57,8
7	66,4	15	56,6

#### 4. Контрольні питання.

1. Пояснити фізичний зміст явища перенесення тепла, а також його значення у наукових дослідженнях.

2. Пояснити фізичний зміст закону теплопровідності Ньютона.
3. Як можна у математичному вигляді описати певні явища, що відбуваються в природі; як (і чому) їх найзручніше представити?
4. Пояснити фізичний зміст методу Ейлера.
5. Як вибрати крок інтеграції у методі Ейлера?
6. Як оцінити точність методу Ейлера?
7. Пояснити графічну інтерпретацію метода Ейлера.
8. Назвати і оцінити механізми передачі тепла від нагрітого тіла до холодного, дати їм коротку характеристику.



## Лабораторна робота №3

**Тема:** Моделювання коливних рухів.

**Мета:** Навчитися складати схеми диференціальних рівнянь, писати програми для моделювання схеми рівняння коливного руху, зокрема, застосовуючи формулу “згортки”.

### 1. Короткі теоретичні відомості

У багатьох фізичних системах рух має періодичний характер. Коли об’єкт рухається за однією траєкторією між двома граничними точками, тоді такий рух називають *коливанням*. Класичними прикладами коливань може бути рух маятника у годиннику чи рух струни.

Задля наочності розглянемо простий коливний рух тіла з масою ( $m$ ), закріпленого за вільний кінець пружини (рис. 3.1).

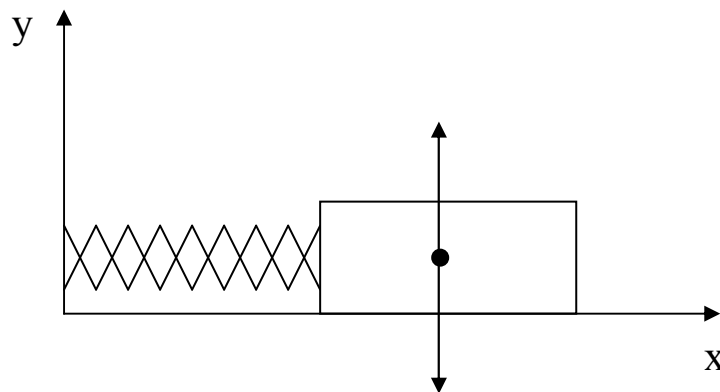


Рис. 3.1. Схема коливання тіла, прикріпленого до пружини.

Тіло ковзає по горизонтальній поверхні і його положення можна описати координатою ( $x$ ). Приймаємо, що ( $x = 0$ ) у точці рівноваги. Тобто у точці рівноваги пружина ненапружена. Якщо тіло змістити від точки рівноваги, а потім відпустити, тоді воно буде коливатися вздовж осі ( $x$ ). Згідно закону Гука відомо, що при стисканні чи розтягуванні пружини виникає сила, що діє на тіло з боку пружини. Ця сила залежить від переміщення тіла ( $x$ ):

$$F = -kx, \quad (3.1)$$

де:

$k$  – міра пружності.

Знак мінус вказує на те, що сила спричиняє повернення тіла у положення рівноваги.

Виходячи з рівняння прямолінійного руху (див. наприклад, лабораторну роботу №1), запишемо:

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -w_0^2x, \quad (3.2)$$

де:

$$w_0 = \frac{k}{m}; \quad (3.3)$$

$x = x(t)$  – функція часу.

Рівняння (3.2) є прикладом *лінійного* диференційного рівняння, позаяк у нього входять тільки перші степені змінної ( $x$ ) і її похідних. Рух, який описують рівнянням (3.2), називають *простим гармонійним коливанням*, і його розв'язок можна виразити аналітично.

З досвіду відомо, що у природі амплітуда коливань поступово зменшується, поки величина зміщення не дорівнюватиме нулю. Такі коливання називають *затухаючими*.

При моделюванні руху тіла з незначною швидкістю приймемо, що переміщення тіла зменшується пропорційно першому степеню швидкості. Тоді:

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -w_0^2x - \gamma \frac{dx}{dt}, \quad (3.4)$$

де:

$\gamma$  – коефіцієнт затухання, який є мірою гальмівної сили.

Вирішимо завдання стосовно визначення періоду

коливань деякого тіла, яке ще не рухається. Спосіб визначення періоду полягає у тому, що на початковому етапі система підлягає деякому “збуренню”. Наприклад, зміщують об’єкт з положення рівноваги і спостерігають за його рухом. У подальшому за “відгуком” системи на збурення стверджують про деякі властивості незбуреної системи.

Крім того, коли на тіло діє ще деяка сила ( $F(t)$ ), яка визначається зовнішніми впливами, рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -w_0^2x - \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{F(t)}{m} \quad (3.5)$$

“Відгук” системи прийнято розглядати як функцію від зміщення ( $x$ ), але не швидкості ( $v$ ).

Залежність функції ( $F(t)$ ) від часу можна зобразити у вигляді:

$$\frac{F(t)}{m} = A_0 \cos wt \quad \text{або} \quad \frac{F(t)}{m} = \delta(t + t_0)$$

де:

$W$  – кутова частота сили;

$$\delta(t + t_0) = \begin{cases} 1(t = t_0) \\ 0(t \neq t_0) \end{cases}$$

Остання функція характеризує дуже короткий вплив сили на зміщення тіла. Коректніше її слід було б означити як “дельта-функцію”:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty(t = 0) \\ 0(\text{для всіх інших } t) \end{cases}$$

Тоді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \text{ – селективна властивість функції.}$$

## 2. Алгоритм моделювання.

На практиці широко використовують інтегральні перетворення. Зокрема, відомі перетворення Фур'є, Лапласа, що полягають у переході від розгляду функцій на множині дійсних чисел до розгляду функцій на множині комплексних чисел.

Розглянемо “кібернетичну” модель (модель типу “чорний ящик”) (рис. 3.2).

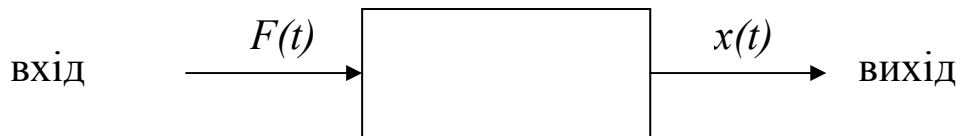


Рис. 3.2. Схематичне зображення “кібернетичної” моделі.

З рисунка зрозуміло, що маючи значення “входу”  $F(t)$  (збурення) необхідно знайти вихідне значення – “вихід”  $x(t)$ . Цю проблему можна вирішити за умови виконання таких дій:

- знайти реакцію  $h(t) = x(t)$  даної моделі на певний “еталонний” вхід, наприклад,  $\delta(t)$ ;

- знайти, як змінюються функції за наявності такого “еталонного” збурення, позаяк “чорний ящик” формує вихід  $x(t)$ .

Використавши селективну властивість дельта-функції, неперервну функцію  $F(t)$  можна перетворити у послідовність її відліків через період ( $T$ ):

$$F(nt) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\delta(t - nT)dt, n = \pm 0, 1, 2, \dots$$

З іншого боку, якщо:

$$F(t_0) = \delta(t - t_0),$$

тоді:

$$x(t) = h(t).$$

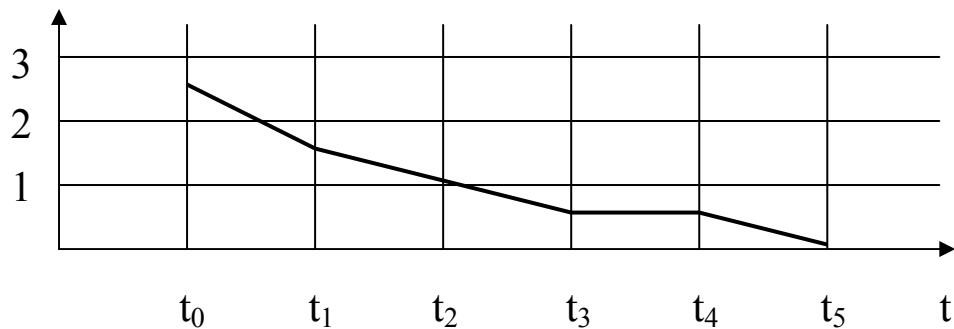
За умови, коли розглядають дискретну функцію, тоді:

$$x(nt) = h(nt).$$

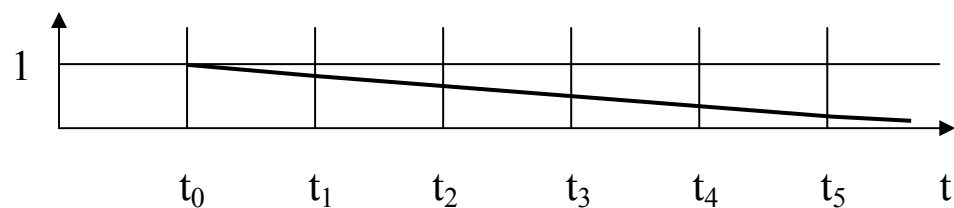
Якщо функція  $F(t)$  є послідовністю відліків, тоді кожен відлік викликає появу “свого” відгуку  $h(nt)$ .

Наведені вище положення показано на рис. 3.3.

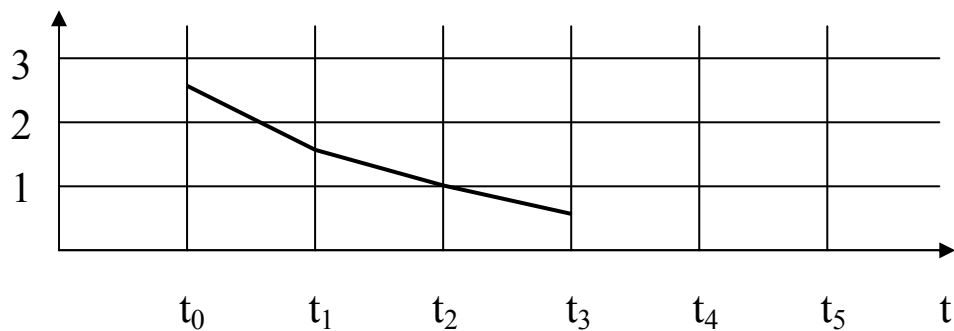
$F(nT)$



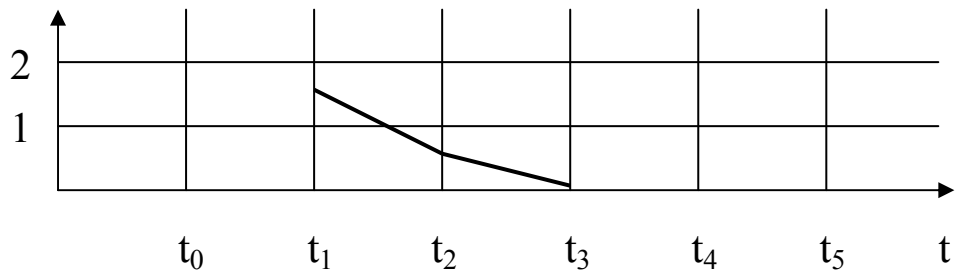
$h(nT)$



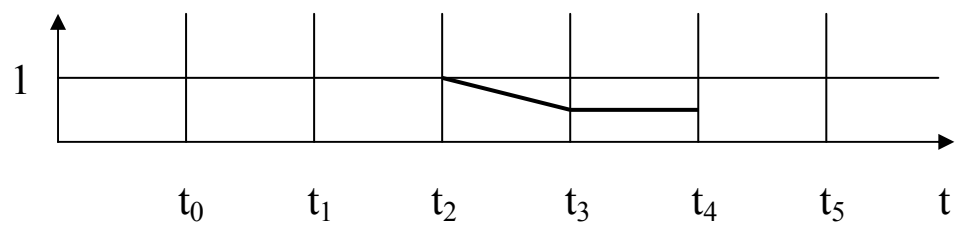
$F(t_0) h(nT)$



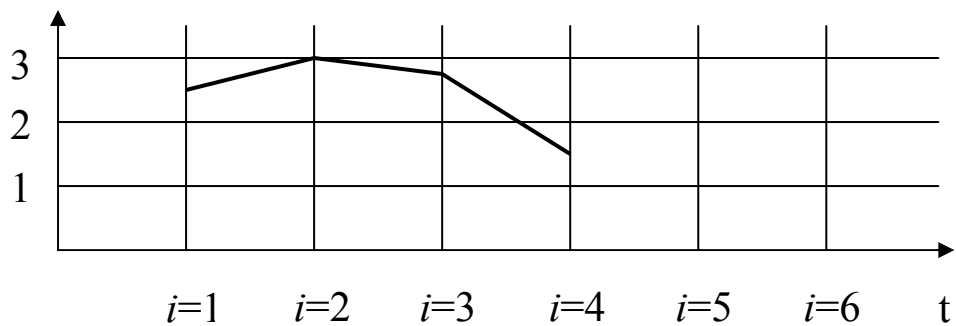
$F(t_1) h(nT)$



$F(t_2) h(nT)$



$X(iT)$



$$\begin{aligned}
 t_i &= t_0 + iT, \\
 F(t_2)h(0) + F(t_1)h(1) + F(t_0)h(2) &= \\
 F(t_0 + 2T)h(t_0) + F(t_0 + T)h(t_0 + T) + F(t_0)h(t_0 + 2T) &= \\
 = \sum_{n=0}^N F(nT)h(T - nT)
 \end{aligned}$$

Рис. 3.3. Залежність функції  $F(t)$  від відгуку  $h(nt)$ .

Отже, для  $i$ -того відліку виходу  $x = (iT)$

справедливо, що:

$$x(iT) = \sum_{n=0}^N F(nT)h(iT - nT), i = 0, \infty \quad (3.6)$$

У цьому випадку величину ( $N$ ) вибирають настільки великою, щоб вона відповідала необхідній точності. Зауважимо, що абсолютну величину ( $N$ ) вибирають також, виходячи з вимог економії часу обчислень та обмеження пам'яті обчислювальних пристроїв.

Отже, формула (3.6) є алгоритмом моделювання. Для моделювання необхідно знайти функцію ( $h$ ) диференціального рівняння. Цю функцію можуть називати по-різному: функцією відгуку, імпульсною ваговою функцією, ядром (диференціального) оператора, функцією Гріна. Безпосередньо саму формулу називають “згорткою”.

При ( $T \rightarrow 0$ ) отримують інтеграл “згортки”:

$$x(t) = \int_0^{\infty} F(\tau)h(t - \tau)d\tau .$$

Інтеграл “згортки” є точним розв'язком рівняння.

Наведений алгоритм моделювання дозволяє не виводити рівняння явища. Досить внести дельта-“збурення”, знайти реакцію на нього і при моделюванні проводити обчислення необхідних параметрів за формулою “згортки”. При зміні параметрів елементів, які визначають явище, необхідно знову визначити функцію ( $h$ ).

### 3. Завдання.

1. Скласти схему рівняння, яке описує рух ковзаючого по горизонтальній площині тіла (рис. 3.1, формула (3.5)).
2. Скласти програму для моделі із застосуванням схеми рівняння.
3. Знайти функцію ( $h$ ).

4. Скласти програму для реалізації моделі із застосуванням формули “згортки”.
5. Провести порівняльний експеримент з використанням двох моделей при заданих значеннях (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Значення коефіцієнтів і функції входу

Варіант	Збурення $F(t)$	$m$ , кг	$k$	$\gamma$ , м <sup>2</sup> /Н
1	$\sin(wt)$	0,50	0,4	$12,3 \cdot 10^{10}$
2	$2\sin(wt)$	1,10		
3	$\cos(wt)$	0,75		
4	$4\cos(wt)$	1,12		
5	$3\sin(wt)$	0,56		
6	$4\sin(wt)$	0,78		
7	$1,5\sin(wt)$	1,08		
8	$3\cos(wt)$	1,18		
9	$2\cos(wt)$	0,64		
10	$1,5\cos(wt)$	0,92		

#### 4. Контрольні запитання.

1. Що означають поняття “коливання”, “колильний рух”? Пояснити їх фізичний зміст.
2. Навести приклад простого гармонійного коливання, його диференційного рівняння.
3. Що розуміють під поняттям “відгук” системи на збурення? Як його можна описати? Пояснити формулу згортки.
4. Як виводиться рівняння, що описує рух ковзання тіла по горизонтальній площині?
5. Розкрити поняття дельта-функції як узагальненої функції.



## Лабораторна робота №4

**Тема:** Моделювання хвильових явищ.

**Мета:** Навчитися складати програми для моделювання хвильових явищ з використанням алгоритму Ейлера.

### 1. Короткі теоретичні відомості.

У роботі моделюють лінійний ланцюг зв'язаних осциляторів, досліджують властивості, що стосуються хвильових явищ, виводять лінійне хвильове рівняння.

Для опису хвильових явищ використовують поняття: амплітуда, період, частота. На *макроскопічному* рівні можна спостерігати поздовжні чи поперечні хвилі (коливання середовища, у якому поширюються хвилі) залежно від напрямку коливань часток середовища стосовно напрямку поширення хвиль. На *мікроскопічному* рівні можна спостерігати відповідні коливання часток середовища.

Розглянемо лінійний ланцюг точкових мас, з'єднаних пружинами, по якому поширюється поздовжня хвиля (рис. 4.1). При достатньо значному числі часток у ланцюгу рух поздовжньої хвилі можна моделювати, розв'язуючи рівняння руху Ньютона для окремих часток. По ланцюгу поширюється енергія, хоча самі частки від положення рівноваги далеко не відхиляються. Очевидно також, що загальний рух системи з  $(N)$  зв'язаних часток є суперпозицією (накладання) простих коливань (гармонійних) рухів.

Вважаючи кінці лівої та правої пружинки нерухомими, тобто зміщення:  $u_0 = u_{N+1} = 0$ , запишемо рух  $i$ -тої частки (маси):

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -k_c (u_i - u_{i+1}) - k_c (u_i - u_{i-1}) = k_c (2u_i - u_{i+1} - u_{i-1})$$
$$i = 2, \dots, N-1. \quad (4.1)$$

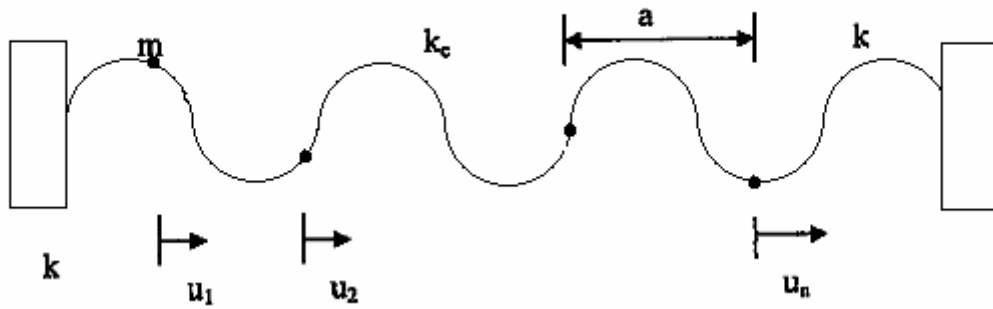


Рис. 4.1. Поздовжні коливання точкових мас, з'єднаних пружинками ( $m$  - маса частки,  $a$  - рівноважна віддаль між точковими масами; частки зв'язані пружинами нульової маси з силовою сталою  $k_c$ , силова стала двох крайніх пружинок дорівнює  $k$ ,  $u_i$  - зміщення мас від стану рівноваги).

Для  $i=1$  та  $i=N$  (частки, найближчі до стінок) матимемо ще два рівняння:

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -k_c (u_1 - u_2) - k u_1 \quad (4.2)$$

$$m \frac{d^2 u_N}{dt^2} = -k_c (u_N - u_{N-1}) - k u_N$$

Якщо  $k_c = 0$ , тоді систему рівнянь розкладають на незалежні рівняння. Подібним чином можна описати і поперечні коливання.

Для моделювання динаміки поведінки ( $N$ ) зв'язаних мас можна застосувати алгоритм *Ейлера - Кромера* (модифікований алгоритм Ейлера) або скласти відповідну схему рівняння.

Зміст алгоритму *Ейлера - Кромера* полягає у заміні змінних:

$$\frac{d^2 u_N}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = b(t) \quad (4.3)$$

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Тоді для алгоритму Ейлера отримаємо:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &= v_n(t) + b_n(t)\Delta t \\ u_{n+1}(t) &= u_n(t) + v_{n+1}(t)\Delta t \end{aligned}$$

## 2. Хвильовий рух.

За умови постійної довжини ланцюга при аналізі хвильових явищ можна вважати, що  $N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$ .

Тоді отримаємо хвильове рівняння:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{k}{m}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

де:

$v$  – має розмірність швидкості.

Дане рівняння можна записати таким чином:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{1}{a^2} [u(x = a, t) + u(x - a, t)] \quad (4.6)$$

У цьому випадку похідна записана за часом як часткова похідна, позаяк функція ( $u$ ) залежить від двох змінних. Оскільки частки розподілені неперервно, можна ввести величини:

$$\mu = m/a \quad ; \quad T = k/a.$$

Після розкладання у ряд Тейлора отримаємо:

$$u(x \pm a) = u(x) \pm a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (4.7)$$

При  $a \rightarrow 0$ , одержимо:

$$\frac{1}{a^2} [u(x+a, t) - 2u(x, t) + u(x-a, t)] \rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.8)$$

Підставивши формулу (4.8) у рівняння (4.6) отримаємо хвильове рівняння відносно  $\left(v^2 = T/\mu\right)$ , де  $T$  – натяг,  $\mu$  – лінійна густина маси.

Хвильове рівняння має множину розв'язків. Наприклад, розв'язками такого рівняння є функції:

$$u(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x \pm vt) \quad (4.9)$$

$$u(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \pm vt) \quad (4.10)$$

Легко переконатись у тому, що будь-яка функція, яка має вигляд  $f(x - vt)$  або  $f(x + vt)$  є розв'язком рівняння (4.5). Оскільки хвильове рівняння лінійне і, відповідно, задовольняє принцип суперпозиції, тоді поведінку хвилі довільної форми можна описати, представляючи за теоремою Фур'є її форму у вигляді суми синусоїдних хвиль. Тобто необхідно розглянути тільки гармонійний (синусоїдний розв'язок) хвильового рівняння.

### 3. Завдання.

1. Обчислити зміщення ( $N$ ) зв'язаних точок без прикладання зовнішньої сили (наприклад:

$$A \cos(\omega T + \delta) + A \cos(\omega T + \delta) + \dots).$$

2. При  $k_c = k = 1$  і  $N = 10$ , прикладаючи зовнішню силу:

$$F(t) = \text{const} \omega t = \cos \frac{2\pi t}{K}$$

та змінюючи величину ( $k$ ), знайти резонанс.

3. Порівняти результати, отримані у п.1 з аналітичним результатом враховуючи, що:

$$\omega_n^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi n}{2(N+1)} \text{ – вираз для визначення частоти;}$$

$n$  – номер коливання;

$N$  – кількість мас.

Знайти час поширення коливань (при збудженні однієї з мас).

4. Написати програму для реалізації поставленого завдання (таблиця 4.1).
5. Результати представити у графічному та числовому вигляді.

Таблиця 4.1

Значення мас для кожного варіанту завдання

Варіант	Значення маси, $m$ , г
1	0,346
2	0,501
3	0,405
4	0,452
5	0,502

6	0,245
7	0,267
8	0,321
9	0,421
10	0,457
11	0,564
12	0,126
13	0,872
14	0,761
15	0,391

**Зауваження:** Коефіцієнт пружності і частоту підібрати під час моделювання хвильових явищ.

#### **4. Контрольні запитання.**

1. Які коливання спостерігають на мікроскопічному та макроскопічному рівнях? Чим вони відрізняються?
2. Як математично можна змоделювати рух повздовжньої хвилі?
3. У чому полягає зміст застосування алгоритму Ейлера - Кромера для моделювання хвильових явищ?
4. Пояснити хвильове рівняння.
5. Що є розв'язком хвильового рівняння? Навести приклади.
6. Пояснити поняття суперпозиції та його застосування у хвильових явищах.

## Лабораторна робота № 5

**Тема:** Моделювання роботи операційного підсилювача.

**Мета:** Навчитися виводити рівняння роботи операційного підсилювача, провести його розрахунок і змоделювати вихідний сигнал.

### 1. Короткі теоретичні відомості.

Операційний підсилювач – активний елемент більшості блоків аналогових обчислювальних машин. Підсилювач конструктивно виконано багатокаскадним, як правило, з непарним числом каскадів (3-5). Електронний або напівпровідниковий підсилювач постійного струму (ППС) має значний коефіцієнт підсилення напруги. ППС відзначається дрейфом нуля вихідної напруги, тому операційні підсилювачі містять спеціальні зв'язки для компенсації дрейфу.

Існують операційні підсилювачі з першим і останнім каскадами за постійним струмом та декількома внутрішніми каскадами за змінним струмом для усунення дрейфу нуля. Головна проблема при проектуванні операційних підсилювачів на базі підсилювачів лише постійного струму – отримання великого коефіцієнта підсилення (від  $k = 4 \cdot 10^4 - 10^8$ ) при одночасному забезпеченні стійкої роботи.

### 2. Виведення основного рівняння операційного підсилювача.

Для виведення основного рівняння операційного підсилювача на базі ППС розглянемо схему, показану на рис. 5.1. На рисунку показано:

- точка  $a$  з потенціалом  $e_a$  – вхід у ППС;
- точка  $b$  – вихід підсилювача;
- точка  $c$  – шина з загальним потенціалом (“земля”);

$Z_1(s), Z_2(s) \dots Z_n(s)$  – імпеданси (опори) на вході операційного підсилювача;

$Z_{o.c}(s)$  – імпеданс зворотного зв'язку;

$R_y$  – вхідний опір ППС;  
 $U_{x1}(s), U_{x2}(s) \dots U_{xn}(s)$  – зображення вхідних напруг, які подаються відносно точки  $c$  на відповідні імпеданси;  
 $U_y(s)$  – зображення напруги на виході операційного підсилювача;  
 $I_1(s), I_2(s) \dots I_n(s)$  – струми, що на імпедансах вхідних зв'язків;  
 $I_y(s)$  – струм витрат;  
 $I_{o.c}(s)$  – струм зворотного зв'язку.

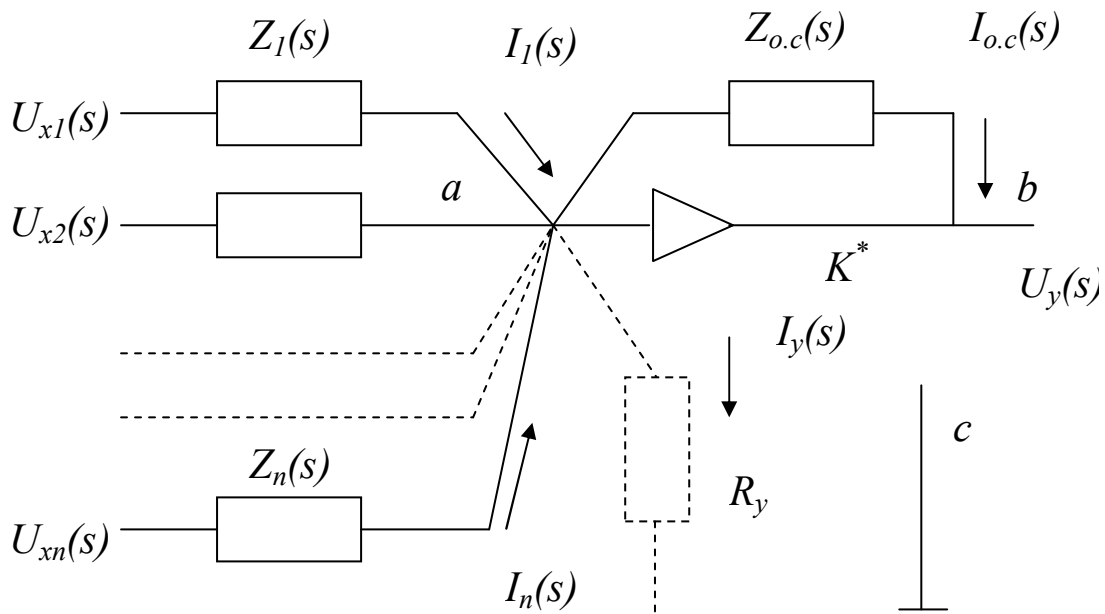


Рис. 5.1. Схема операційного підсилювача (позначення див. у тексті).

Для вузла  $a$  справедливий закон Кірхгофа, згідно якого алгебраїчна сума струмів, які входять і виходять з вузла, завжди дорівнює нулю:

$$\sum_{j=1}^n I_j(s) = I_{o.c}(s) + I_y(s) \quad (5.1)$$



Вхідні зв'язки ППС виконують таким чином, щоб справедливою була умова:

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{U_{xj}(s)}{Z_j(s)} - \frac{U_y(s)}{Z_{o.c}(s)} \right| / R_y \gg I_y(s)$$

У цьому випадку:

$$\sum_{j=1}^n I_j(s) = I_{o.c}(s) \quad (5.2)$$

Сили струму знаходять за формулами:

$$I_j(s) = \frac{U_j(s) - e_a(s)}{Z_j(s)} \quad (5.3)$$

$$I_{o.c}(s) = \frac{e_a(s) - U_y(s)}{Z_{o.c}(s)} \quad (5.4)$$

Для того, щоб зворотній зв'язок був від'ємним, характеристика “вхід-вихід” повинна мати інверсний характер, тобто, необхідно, щоб виконувалась умова:  $K^* < 0$ .

У цьому випадку підсилювач постійного струму як активний елемент дає напругу:

$$U_y(s) = -K^* e_a(s) \quad (5.5)$$

Визначивши вхід  $e_a(s)$  з формули (5.5) і підставивши його значення у формули (5.3) і (5.4), а потім і у (5.2), отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n \frac{U_j(s) + \frac{U_y(s)}{K^*}}{Z_j(s)} = \frac{-U_y(s) / K^* - U_y(s)}{Z_{o.c}(s)} \quad (5.6)$$

При  $K^* \rightarrow \infty$  (нагадаємо, що  $K^* = 10^4 \dots 10^8$ ) рівняння

операційного підсилювача прийме вигляд:

$$U_y(s) = -Z_{o.c}(s) \sum_{j=1}^n \frac{U_j(s)}{Z_j(s)} \quad (5.7)$$

Формула 5.7 є основним рівнянням операційного підсилювача.

Рівняння операційного підсилювача (5.7) отримано з виразу (5.6) шляхом граничного переходу ( $K^* \rightarrow \infty$ ). При цьому показано, що властивості операційного підсилювача визначаються тільки властивостями імпедансів  $Z_{o.c}(s)$  та  $Z(s)$  і не залежать від внутрішніх властивостей ППС. Такі підсилювачі (а у загальному випадку і системи) з великим коефіцієнтом підсилення, які характеризуються зворотними зв'язками, отримали назву підсилювачів (систем) з глибоким зворотним зв'язком. У наведеному випадку, зворотний зв'язок є від'ємним.

Для простоти математичного опису роботи операційного підсилювача будемо використовувати модель ідеалізованого операційного підсилювача. Допущення можуть бути зведені до такого вигляду:

- а) підсилювач постійного струму має нескінченно великий коефіцієнт підсилення;
- б) операційний підсилювач не вносить запізнення у сигнал, тобто відсутня інерційність.
- в) операційний підсилювач не має дрейфу нуля.

### 3. Завдання до роботи.

1. Скласти рівняння роботи операційного підсилювача (рис. 5.1, формула (5.7)).
2. Скласти програму для моделі із застосуванням схеми рівняння.
3. Знайти напругу  $U_y$ .
4. Побудувати графік вихідного сигналу.

5. Експеримент провести з використанням заданих значень кількості входів ( $n$ ) (табл. 5.1).

Примітка: при побудові графіка скористатись функцією  $u = U_y * \sin \omega t$ , де:  $U_y$  – амплітудне значення напруги.

#### **4. Контрольні запитання.**

1. Що таке операційний підсилювач?
2. Які бувають операційні підсилювачі?
3. Як з'єднують операційні підсилювачі?
4. У чому полягає основний недолік операційних підсилювачів?
5. Вивести рівняння операційного підсилювача.
6. Обґрунтувати, від чого залежать властивості операційного підсилювача?

Таблиця 5.1

Характеристики операційного підсилювача залежно від варіанту завдання

№	$n$	$Z_{0-c}$	$Z_1$	$U_1$	$Z_2$	$U_2$	$Z_3$	$U_3$	$Z_4$	$U_4$	$Z_5$	$U_5$	$Z_6$	$U_6$	$Z_7$	$U_7$	$Z_8$	$U_8$	$\omega$
1	3	1000	100	5	150	4	200	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50
2	6	1100	120	4	170	5	250	7	100	6	90	1	2	-	-	-	-	-	150
3	5	1500	110	5	100	4	200	6	170	5	200	7	-	-	-	-	-	-	30
4	2	900	100	3	150	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70
5	7	1000	200	5	150	3	210	3	110	4	210	5	90	2	130	4	-	-	100
6	8	2000	130	6	160	4	100	3	130	3	150	2	170	7	180	3	110	8	200
7	4	1150	220	3	160	1	200	6	170	7	-	-	-	-	-	-	-	-	250
8	4	1300	120	5	190	4	230	8	100	4	-	-	-	-	-	-	-	-	130
9	5	950	100	3	150	7	200	1	110	3	190	4	-	-	-	-	-	-	150
10	6	1050	120	3	110	6	130	5	200	1	120	3	100	7	-	-	-	-	50
11	3	1150	90	4	110	4	140	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	210
12	5	850	100	2	150	3	140	5	100	2	160	4	-	-	-	-	-	-	140
13	8	1000	160	4	130	4	210	7	230	4	140	5	120	4	220	8	150	2	140
14	7	1200	120	7	160	1	200	3	210	2	170	4	90	3	100	2	-	-	80
15	5	1350	100	4	150	6	100	3	140	5	110	1	-	-	-	-	-	-	90

## ЗМІСТ

Передмова	3
<b>Розділ 1. Ідентифікація технологічних процесів</b>	<b>7</b>
1.1. Ідентифікація у процесах пізнання	8
1.2. Ідентифікація об'єктів	11
1.2.1. Об'єкт ідентифікації	11
1.2.2. Відомості про об'єкт ідентифікації	13
1.2.2.1. Апріорна інформація	14
1.2.2.2. Апостеріорна інформація	16
1.3. Постановка задачі ідентифікації	17
1.4. Ідентифікація структури і параметрів об'єкта	24
1.5. Класифікація методів ідентифікації	29
1.6. Ідентифікація у процесах керування	33
1.7. Методи теорії і практики ідентифікації	37
1.8. Аналіз методів математичного опису технологічних об'єктів	40
1.9. Математичні моделі об'єктів	47
1.10. Методи синтезу математичних моделей	58
1.11. Імпульсні реакції	77
1.12. Моделювання давачів та перетворювачів вимірювальних каналів	80
<b>Розділ 2. Основні поняття теорії моделювання систем</b>	<b>88</b>
2.1. Види моделювання складних об'єктів і систем	88
2.1.1. Фізичне моделювання	88
2.1.2. Математичне моделювання	90
2.1.3. Ідентифікація моделей	97
2.2. Моделювання систем керування	99
2.2.1. Підходи до дослідження систем	100
2.2.2. Стадії розроблення моделей	113
2.2.3. Загальна характеристика проблеми моделювання систем	115
2.2.4. Цілі моделювання систем керування	120
2.3. Автоматизовані системи розпізнавання образів	122
2.3.1. Основні поняття і визначення	123
2.3.2. Проблема розпізнавання образів	128
2.3.3. Класифікація методів розпізнавання образів	129
2.3.4. Ідентифікація у системі керування	131

<b>Розділ 3. Задачі прогнозування у аспекті ідентифікації складних об'єктів і систем</b>	133
3.1. Методи прогнозування	136
3.2. Самоорганізація математичних моделей	152
3.3. Етапи вибору моделі зі структурою оптимальної складності	159
3.4. Самоорганізація фізичних і нефізичних моделей	165
<b>Розділ 4. Автоматизоване проектування складних об'єктів і систем</b>	170
4.1. Основні функції систем автоматизованого управління	170
4.2. Функціональні завдання проектування	181
4.3. Розв'язування завдань автоматизації проектування методами теорії масового обслуговування	184
4.3.1. Марковські системи масового обслуговування	187
4.3.2. Немарковські системи масового обслуговування	194
4.4. Системи масового обслуговування з неоднорідними потоками	200
4.4.1. Одноканальні системи масового обслуговування з безпріоритетним обслуговуванням	200
4.4.2. Одноканальні системи масового обслуговування з пріоритетним обслуговуванням	203
4.4.3. Одноканальні системи масового обслуговування зі змішаними пріоритетами	205
4.5. Стохастичні мережеві моделі масового обслуговування	208
4.5.1. Замкнуті мережі з одноканальними системами масового обслуговування	210
4.5.2. Багатоканальні замкнуті мережі	211
4.6. Стохастичні напівмарковські системи	212
4.6.1. Основні властивості марковських процесів	213
4.6.2. Основні відмінності між марковськими і напівмарковськими процесами	213
Список використаних літературних джерел	216
Додатки	225
Зміст	259

Здано до складання 24.12.08. Підписано до друку 05.01.09. Формат  
60x84/16. Папір друк. №1. Гарнітура літературна. Друк високий.  
Ум. друк. арк. 15,8. Зам. 3-1372. Тираж 1025.

Видавництво СМП“Тайп”, 46006, Тернопіль, вул. Чернівецька,44б.

**ISBN 966-451-000-9**