

2. Гуртовий, О.Г. Задача поперечного деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою [Текст] / О.Г. Гуртовий, С.О. Тинчук // Зб. наук. праць – Вісник УДУВГП – Рівне: УДУВГП. – 2004. – Випуск 2 (26). – С. 222 – 229.

3. Гуртовий, А.Г. Континуальные аппроксимации перемещений в толстых слоистых пластинах при разделении термомеханических нагрузок на двухсторонние симметрические и кососимметрические составляющие [Текст] / А.Г. Гуртовий // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 743 – 756.

4. Варвак, П.М. Новые методы решения задач сопротивления материалов [Текст] / П.М. Варвак. – К.: Выща школа, 1977. – 160 с.

5. Гуртовий, О.Г. Особливості застосування варіаційно-різницевого методу в одновимірних задачах теорії пружності [Текст] / О.Г. Гуртовий // В зб.: Вісник НУВГП. – Рівне: НУВГП. – 2006. – Вип. 2 (34), част. 1. – С. 116 – 121.

6. Пискунов, В.Г. Решение задачи статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке [Текст] / В.Г. Пискунов, В.С. Сипетов, Ш.Ш. Туйметов // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 41 – 52.

Отримано 25.11.2015

УДК 539.3

Віктор Січко, канд. фіз.-мат. наук

Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ТОВСТОСТІННОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ

***Резюме.** Дано постановку просторової задачі про вимушені резонансні коливання й дисипативний розігрів в'язкопружної товстостінної циліндричної панелі з шарнірно обпертими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні й теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Задача розв'язується методом Фур'є і зводиться до крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язування цих систем запропоновано використовувати ефективний метод дискретної ортогоналізації. Дано порівняння результатів розрахунків із використанням просторової постановки й класичної та уточненої теорій оболонок.*

***Ключові слова:** резонансні коливання, циліндрична панель, саморозігрів.*

Victor Sichko

THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THICK-WALLED VISCOELASTIC CYLINDRICAL PANEL

***Summary.** The statement of three-dimensional problem on the forced resonance vibrations and dissipative heating of the viscoelastic thick-walled cylinder panel with simply supported edges is presented. The nonelastic material behavior is described by conception of complex characteristics. It is supposed that mechanical and thermophysical material properties do not depend on temperature. The problem is solved by the method of variable separation and is reduced to the boundary-value problems for the systems of ordinary differential equations. These systems are solved by the method of discrete orthogonalization. The comparison of calculation results taking advantage of three-dimensional and classical shell theories is presented.*

To describe non-elastic mechanical behavior the concept of complex characteristics is used. Panel edges are considered to be pressed by the hinge. It makes possible to reduce the problem to the system of general differential equations of high order using the method of variables distribution, for solving of which the effective numerical method of discrete orthogonalisation is proposed to be used, which provides high enough accuracy.

The characteristics of the viscoelastic material are accepted not to be dependent by temperature. Then the problem is divided into some separate problems: 1) the problem on the induced resonance vibrations of the viscoelastic cylindrical panel; 2) the problem on calculation of the dissipation; 3) the problem on calculation the temperature field with known heat source. Thus, for independent on the temperature properties of materials the problem was reduced to the solving of boundary problems for the system of general differential equations, which describes mechanical vibrations of the cylindrical panel and solving of boundary problems for general differential equations, which describe heat conduction.

To obtain accurate analytical solutions of given boundary problems is, in fact, impossible. Thus, to solve them the numerical method of discrete orthogonalisation has been proposed. As the example the problem on vibration of the cylindrical panel, made of polyethylene, has been analyzed.

To estimate the shear strain effect the problem on the vibration of the cylindrical shell using the theory of more precise definition has been analyzed. Amplitude – frequency characteristics calculated taking advantage of the discrete orthogonalisation method, have been presented.

Key words: resonant vibrations, cylindrical panel, self-heating.

Постановка проблеми. У сучасній техніці широке застосування мають товстостінні циліндричні оболонки, для розрахунку динамічного стану яких виникає необхідність у використанні просторової постановки задач механіки деформівного твердого тіла. Крім того, розв'язання задач у такій постановці надає можливість оцінити границі застосування наближених теорій, які базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява й уточнених гіпотезах, типу Тимошенка. При виготовленні та розрахунку таких елементів конструкцій із полімерних матеріалів необхідно врахувати їх в'язкопружні властивості.

При гармонічному навантаженні з частотою, близькою до резонансної, в елементах конструкцій може спостерігатися підвищення температури дисипативного розігріву, яка виникає у результаті гістерезисних втрат у матеріалі. Все це необхідно врахувати при розрахунку відповідних інженерних конструкцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [1 – 5] розглянуто основні досягнення з термомеханіки зв'язаних полів у тілах із непружних матеріалів, які знаходяться під дією моногармонійного механічного навантаження. Практично важливі результати отримані в монографії [1] стосовно опису непружної механічної поведінки за допомогою концепції комплексних характеристик.

У роботі 6 запропоновано чисельний метод дискретної ортогоналізації, який ми використовуємо у подальших викладках. Крім того, цікавим для практичного застосування є результати, отримані у монографії [7]. Для розв'язання сформульованих вище задач інженерної практики, як правило, використовують чисельні методи.

У літературних джерелах відсутні точні розв'язки задач, пов'язаних із коливанням та дисипативному розігріві тіл просторової конфігурації.

Це пов'язано зі значними математичними труднощами, які виникають при аналітичному розв'язуванні такого класу задач.

Мета роботи – розв'язати просторову задачу про вимушені резонансні коливання й дисипативний розігрів товстостінної циліндричної панелі з шарнірно опертими торцями.

Постановка завдання. Застосувати метод Фур'є зі зведенням до крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь для розв'язання задачі про резонансні коливання та дисипативний розігрів товстостінної циліндричної панелі при її навантаженні гармонійним у часі повневим тиском з частотою, близькою до резонансної.

Результати досліджень. Для дослідження вимушених коливань в'язкопружної циліндричної панелі використовуємо рівняння, наведені у монографії [7]. У ці рівняння необхідно включити сили інерції. Процедура розділення змінних детально викладена у роботі [7]. Вибираємо у якості базових функцій набір змінних $\tilde{\sigma}'_r, \tilde{\sigma}''_r, \tilde{\sigma}'_{rz}, \tilde{\sigma}''_{rz}, \tilde{\sigma}'_{r\theta}, \tilde{\sigma}''_{r\theta}$

$\tilde{U}'_r, \tilde{U}''_r, U'_z, \tilde{U}'_z, \tilde{U}''_z, \tilde{U}'_\theta, \tilde{U}''_\theta$, для панелі, виготовленої з ізотропного в'язкопружного матеріалу можна отримати наступну систему (1) звичайних диференціальних рівнянь у дійсній формі.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}'_r}{d\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \tilde{\sigma}'_r + \lambda_n R_2 \tilde{\sigma}'_{rz} + \mu_k \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}'_{r\theta} + \frac{1}{R_2 \rho^2} \frac{h}{1-\nu^2} \left(\tilde{U}'_r - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_r \right) - \frac{1}{\rho} \nu \lambda_n \frac{h}{1-\nu^2} \left(\tilde{U}'_z - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_z \right) - \\ &- \frac{1}{1-\nu^2} \frac{h}{R_2 \rho^2} \left(\tilde{U}'_\theta - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_\theta \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \tilde{U}'_r; \\ \frac{d\tilde{\sigma}''_r}{d\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \tilde{\sigma}''_r + \lambda_n R_2 \tilde{\sigma}''_{rz} + \mu_k \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}''_{r\theta} + \frac{1}{R_2 \rho^2} \frac{h}{1-\nu^2} \left(\tilde{U}''_r + \frac{E''}{E'} \tilde{U}'_r \right) - \frac{1}{\rho} \nu \lambda_n \frac{h}{1-\nu^2} \left(\tilde{U}''_z - \frac{E''}{E'} \tilde{U}'_z \right) - \\ &- \frac{1}{1-\nu^2} \frac{h}{R_2 \rho^2} \left(\tilde{U}''_\theta + \frac{E''}{E'} \tilde{U}'_\theta \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \tilde{U}''_r; \\ \frac{d\tilde{\sigma}'_{rz}}{d\rho} &= -\lambda_n \frac{\nu}{1-\nu} R_2 \tilde{\sigma}'_r - \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}'_{rz} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \lambda_n h \frac{1}{\rho} \left(\tilde{U}'_r - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_r \right) + \left(\frac{\mu_k^2}{2(1+\nu)} \frac{h}{\rho^2 R_2} + \frac{R_2 h \lambda_n^2}{1-\nu^2} \right) \left(\tilde{U}'_z - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_z \right) + \\ &+ \lambda_n \mu_k h \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \right) \left(\tilde{U}'_\theta - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_\theta \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \tilde{U}'_z; \\ \frac{d\tilde{\sigma}''_{rz}}{d\rho} &= -\lambda_n \frac{\nu}{1-\nu} R_2 \tilde{\sigma}''_r - \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}''_{rz} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \lambda_n h \frac{1}{\rho} \left(\frac{E''}{E'} \tilde{U}'_r + \tilde{U}''_r \right) + \left(\frac{\mu_k^2}{2(1+\nu)} \frac{h}{\rho^2 R_2} + \frac{R_2 h \lambda_n^2}{1-\nu^2} \right) \left(\frac{E''}{E'} \tilde{U}'_z + \tilde{U}''_z \right) + \\ &+ \lambda_n \mu_k h \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \right) \left(\frac{E''}{E'} \tilde{U}'_\theta + \tilde{U}''_\theta \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \tilde{U}''_z; \\ \frac{d\tilde{\sigma}'_{r\theta}}{d\rho} &= -\mu_k \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}'_r - \frac{2}{\rho} \tilde{\sigma}'_{r\theta} - \mu_k \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{h}{R_2 \rho^2} \left(\tilde{U}'_r - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_r \right) + h \lambda_n \frac{\mu_k}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \right) \left(\tilde{U}'_z - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_z \right) + \\ &+ \left[\frac{1}{1-\nu^2} \mu_k^2 \frac{h}{R_2 \rho^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} R_2 h \lambda_n^2 \right] \left(\tilde{U}'_\theta - \frac{E''}{E'} \tilde{U}''_\theta \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \tilde{U}'_\theta; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\sigma}_{r\theta}''}{d\rho} &= -\mu_k \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}_r'' - \frac{2}{\rho} \tilde{\sigma}_{r\theta}'' - \mu_k \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{h}{R_2 \rho^2} \left(\tilde{U}_r'' + \frac{E''}{E'} \tilde{U}_r' \right) + h \lambda_n \frac{\mu_k}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \right) \\
 &\left(\tilde{U}_z'' + \frac{E''}{E'} \tilde{U}_z' \right) + \left[\frac{1}{1-\nu^2} \mu_k^2 \frac{h}{R_2 \rho^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} R_2 h \lambda_n^2 \right] \left(\tilde{U}_\theta'' + \frac{E''}{E'} \tilde{U}_\theta' \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \tilde{U}_\theta''; \\
 \frac{d\tilde{U}_r'}{d\rho} &= \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{R_2}{h} \frac{(E')^2}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_r' + \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{R_2}{h} \frac{E'E''}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_r'' - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\rho} \tilde{U}_r' + \\
 &+ \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n R_2 \tilde{U}_z' - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\mu_k}{\rho} \tilde{U}_\theta'; \\
 \frac{d\tilde{U}_r''}{d\rho} &= \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{R_2}{h} \frac{(E')^2}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_r'' - \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{R_2}{h} \frac{E'E''}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_r' - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\rho} \tilde{U}_r'' + \\
 &+ \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n R_2 \tilde{U}_z'' - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\mu_k}{\rho} \tilde{U}_\theta''; \\
 \frac{d\tilde{U}_z'}{d\rho} &= 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{(E')^2}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{rz}' + 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{E'E''}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{rz}'' - \lambda_n R_2 \tilde{U}_r'; \\
 \frac{d\tilde{U}_z''}{d\rho} &= 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{(E')^2}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{rz}'' - 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{E'E''}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{rz}' - \lambda_n R_2 \tilde{U}_r''; \\
 \frac{d\tilde{U}_\theta'}{d\rho} &= 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{(E')^2}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{r\theta}' + 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{E'E''}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{r\theta}'' - \mu_k \frac{1}{\rho} \tilde{U}_r' + \frac{1}{\rho} \tilde{U}_\theta'; \\
 \frac{d\tilde{U}_\theta''}{d\rho} &= 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{(E')^2}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{r\theta}'' - 2(1+\nu) \frac{R_2}{h} \frac{E'E''}{(E')^2 + (E'')^2} \tilde{\sigma}_{r\theta}' - \mu_k \frac{1}{\rho} \tilde{U}_r'' + \frac{1}{\rho} \tilde{U}_\theta'';
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Для в'язкопружного матеріалу порядок системи збільшується вдвічі порівняно з пружним матеріалом. Коефіцієнт Пуассона вважається дійсним.

Задача розв'язується при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned}
 \sigma_z = U_r = U_\theta = 0 \quad (z = 0, \quad z = l) \\
 \sigma_\theta = U_r = U_z = 0 \quad (\theta = \pm\alpha)
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rr} = -P_{kn} \quad (r=R), \quad P_{kn} = P_0 \sin \mu_{k\theta} \sin \lambda_{nz}; \\
 \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rr} = 0 \quad (r=r_0).
 \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо панель є багатошаровою, для кожного з шарів записуються рівняння типу (1), до яких, крім умов (2)-(3), додаються звичайні умови спряження на поверхнях розділу шарів.

Для розрахунку температури дисипативного розігріву скористаємося тим фактом, що при резонансних коливаннях у відповідних рядах Фур'є необхідно залишити тільки один член, який відповідає тій чи іншій формі коливань. Тоді дисипативна функція для цієї форми набуде вигляду

$$D = \frac{\omega}{2}(\sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij}) = \frac{\omega}{2}(\sigma''_{rr} \varepsilon'_{rr} - \sigma'_{rr} \varepsilon''_{rr}) + (\sigma''_{\theta\theta} \varepsilon'_{\theta\theta} - \sigma'_{\theta\theta} \varepsilon''_{\theta\theta}) + (\sigma''_{zz} \varepsilon'_{zz} - \sigma'_{zz} \varepsilon''_{zz}) + 2(\sigma''_{r\theta} \varepsilon'_{r\theta} - \sigma'_{r\theta} \varepsilon''_{r\theta}) + 2(\sigma''_{rz} \varepsilon'_{rz} - \sigma'_{rz} \varepsilon''_{rz}) + 2(\sigma''_{\theta z} \varepsilon'_{\theta z} - \sigma'_{\theta z} \varepsilon''_{\theta z}) \quad (4)$$

При цьому рівняння енергії для ізотропного матеріалу запишемо у формулі

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \right] + R_2^2 D = 0 \quad (5)$$

Вибираємо граничні умови

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0 & \quad \left(\zeta = 0, \frac{L}{R_2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 & \quad (\theta = \pm \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial \rho} + \alpha R_2 (T - T_c) = 0 & \quad (\rho = 1), \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial \rho} - \alpha R_2 (T - T_c) = 0 & \quad \left(\rho = \frac{R_1}{R_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В околі резонансу дисипативна функція набуде вигляду

$$D = \frac{\omega}{2} [D_0(\rho) + D_1(\rho) \cos(2\mu_k \theta) + D_2(\rho) \cos(2\lambda_n R_2 \zeta) + D_{12}(\rho) \cos(2\mu_k \theta) \cos(2\lambda_n R_2 \zeta)].$$

Тоді температуру представимо у вигляді

$$T = [T_0(\rho) + T_1(\rho) \cos(2\mu_k \theta) + T_2(\rho) \cos(2\lambda_n R_2 \zeta) + T_{12}(\rho) \cos(2\mu_k \theta) \cos(2\lambda_n R_2 \zeta)]. \quad (8)$$

Після розділення змінних, рівняння енергії призводить до

$$\lambda \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_0}{d\rho} \right) + \frac{\omega R_2^2}{2} D_0(\rho) = 0, \quad (9)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_1}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_1 \right] + \frac{\omega R_2^2}{2} D_1(\rho) = 0, \quad (10)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_2}{d\rho} \right) - (2\lambda_n)^2 T_2 \right] + \frac{\omega R_2^2}{2} D_2(\rho) = 0, \quad (11)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{12}}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_{12} - (2\lambda_n R_2)^2 T_{12} \right] + \frac{\omega R_2^2}{2} D_{12}(\rho) = 0 \quad (12)$$

Для кожного із наведених рівнянь граничні умови набудуть такої форми:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_0}{d\rho} + \alpha R_2 (T_0 - T_c) &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_0}{d\rho} - \alpha R_2 (T_0 - T_c) &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_1}{d\rho} + \alpha R_2 T_1 &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_1}{d\rho} - \alpha R_2 T_1 &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_2}{d\rho} + \alpha R_2 T_2 &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_2}{d\rho} - \alpha R_2 T_2 &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}); \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_{12}}{d\rho} + \alpha R_2 T_{12} &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_{12}}{d\rho} - \alpha R_2 T_{12} &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}); \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Введемо позначення $\lambda \rho \frac{dT_0}{d\rho} = q_0$, $\lambda \rho \frac{dT_1}{d\rho} = q_1$, $\lambda \rho \frac{dT_2}{d\rho} = q_2$, $\lambda \rho \frac{dT_{12}}{d\rho} = q_3$, та запишемо рівняння енергії у формі

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_0) + \frac{\omega R_2^2}{2} D_0(\rho) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_1) - \lambda \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_1 + \frac{\omega}{2} D_1(\rho) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_2) - (2\lambda_n R_2)^2 T_2 + \frac{\omega R_2^2}{2} D_2(\rho) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_3) - \lambda \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_{12} - \lambda (2\lambda_n R_2)^2 T_{12} + \frac{\omega R_2^2}{2} D_{12}(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Теплові граничні умови (13) – (16) можна представити через q_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

Таким чином, задача зведена до розв'язування крайових задач для системи звичайних диференціальних рівнянь (2), (3), які описують механічні коливання циліндричної панелі та розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь (9) – (16), які описують теплопровідність.

Для розв'язування даних рівнянь використано метод дискретної ортогоналізації [6], який дає досить точні результати.

В якості прикладу розглянуто задачу про коливання циліндричної панелі, виготовленої з поліетилену, механічні властивості якого наведено у монографії [8], а коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,18 \text{ Вт} / \text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$. Панель має такі розміри: $R_1 = 0,09 \text{ м}$, $R_2 = 0,11 \text{ м}$, $L = 0,1 \text{ м}$, $\beta = \pi / 3$. На поверхнях панелі має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температурою $T = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$, коефіцієнт теплообміну $\alpha = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{град}}$.

Для оцінювання впливу деформацій зсуву розглянуто задачу про коливання циліндричної оболонки з використанням уточнюючої теорії, наведеної у монографії [9]. Для ізотропної оболонки власні частоти визначаються за формулою

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \frac{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{1 + h^* L^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{E}{\rho R^2} \frac{\lambda_n^4}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}, \quad (18)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $h^* = \frac{1}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{L^2}$

Підкреслений член враховує вплив деформацій зсуву. Розрахунок власної частоти за цією формулою дає $\omega_r = 17900 \text{ (1/s)}$

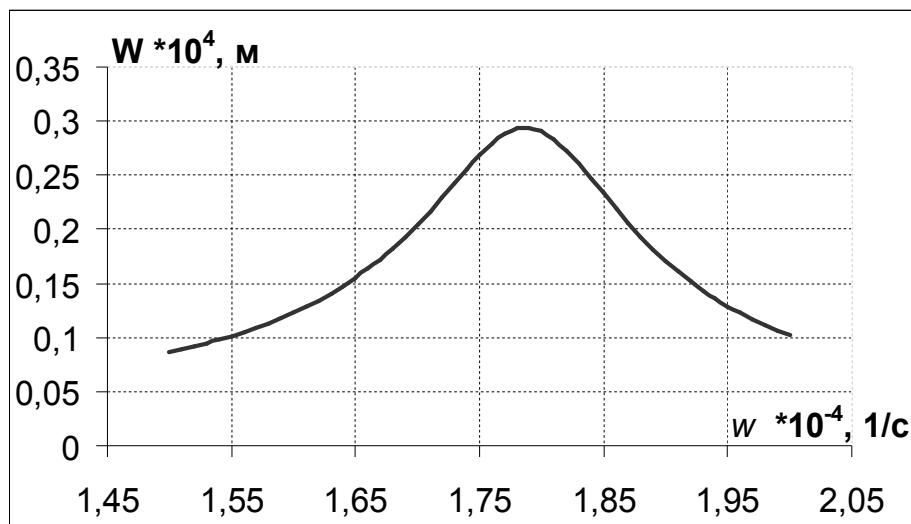


Рисунок 1. Амплітудно-частотна характеристика

Figure 1. Amplitude-frequency characteristics

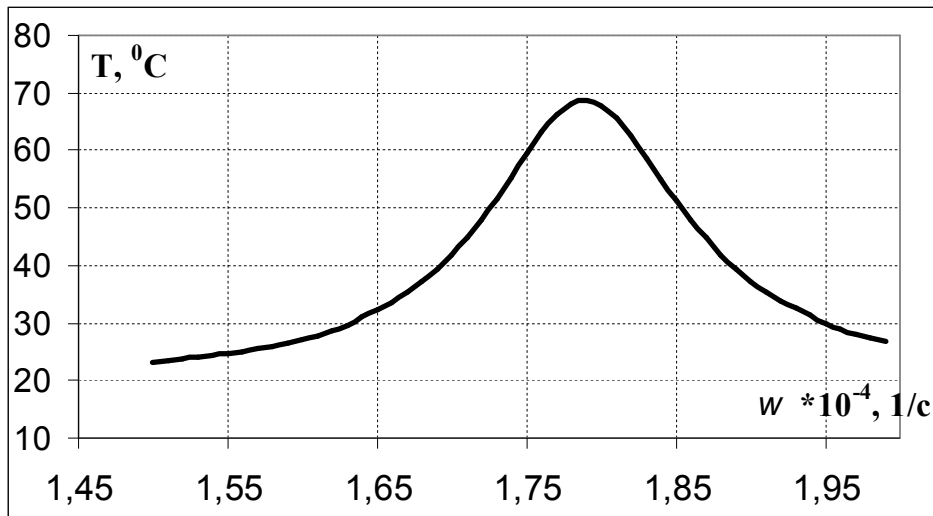


Рисунок 2. Температурно-частотна характеристика

Figure 2. Temperature-frequency characteristics

Для розрахунку власної частоти з використанням просторової постановки задачі використовувався розв’язок стосовно вимушених коливань.

На рис. 1 наведено амплітудно-частотну характеристику, розраховану на основі методу дискретної ортогоналізації. Він дає величину частоти власних коливань, яка дорівнює $\omega_r = 17900$ (1/c).

Вважаючи $G = G' + iG''$ и $\frac{G''}{G'} \ll 1$, з формули (18) випливає наступна формула

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^0 (1 + i\eta), \tag{19}$$

де

$$\omega_{mn}^0 = \sqrt{\frac{2(1 + \nu)G'}{\rho R^2} \left[\frac{h^2 R^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{1 + h^* L^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)} \frac{1}{12(1 - \nu^2)} + \frac{\lambda_n^4}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right]} \eta = \frac{1}{2} \frac{G''}{G'}. \tag{20}$$

Із (20) бачимо, що коефіцієнт демпфування G''/G' не залежить від номера моди коливань геометричних та механічних параметрів оболонки.

На рис. 2 наведено температурно-частотну характеристику.

Висновки. Для дослідження вимушених коливань в’язкопружної циліндричної панелі використано метод дискретної ортогоналізації, який дозволив отримати розв’язок з достатньою для інженерної практики точністю. Оцінено вплив деформацій зсуву на власну частоту коливань циліндричної оболонки.

Показано, що коефіцієнт демпфування визначається тангенсом кута втрат і не залежить від номера моди коливань, геометричних і механічних параметрів оболонки.

Conclusions. The method of discrete orthogonalisation, which made possible to obtain high accuracy solution for engineering, have been used to investigate the induced vibrations of the viscoelastic cylindrical panel. The effect of shear strain on the own vibration frequency of the cylindrical shell was estimated.

It was shown, that damping factor is found by the losses angle tangent and does not depend on the number of the vibration made, geometric and mechanical parameters of the shell.

Список використаної літератури

1. Карнаухов, В.Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении [Текст] / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
2. Карнаухов, В.Г. Обобщенные модели термомеханического поведения материалов с учетом взаимодействия механических и тепловых полей [Текст] / В.Г. Карнаухов, И.К. Сенченко // В книге: Успехи механики: в 6-ти томах; под редакцией А.Н. Гузя. – Том 1. – Киев: А.С.К., 2005. – С. 45 – 68.
3. Карнаухов, В.Г. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов [Текст] / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок // В книге: Успехи механики: в 6-ти томах; под редакцией А.Н. Гузя. – Том 1. – Киев: А.С.К., 2005. – С. 130 – 197.
4. Карнаухов, В.Г. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом [Текст] / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок, В.И. Козлов // В книге: Успехи механики в 6-ти томах; под редакцией А.Н. Гузя. – Том 2. – Киев: А.С.К., 2006. – С. 185 – 217.
5. Karnaukhov, V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations// Journal of thermal stresses. – 2005. – 28, N 6 – 7. – P. 783 – 815.
6. Григоренко, Я.М. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости [Текст] / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
7. Григоренко, Я.М. Статика анизотропных толстостенных оболочек [Текст] / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова. – Киев: Выща школа, 1985. – 190 с.
8. Свойства полимеров и нелинейная акустика. Физическая акустика [Текст]; под редакцией У. Мезона. – Т. 2, Ч. Б. – М.: Мир, 1969. – 420 с.
9. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек [Текст] / С.А. Амбарцумян. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.

Отримано 07.11.2015