

already in the initial state reached the lower limit of the regulated range for guarantee safe operation of the heat resistant steels.

Список використаної літератури

1. Student, O.Z. An accelerated method of hydrogen degradation of structural steels by thermocycling / O.Z. Student // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1998. – 34, № 4. – С. 45 – 52. (Student O.Z. Accelerated Method for Hydrogen Degradation of Structural Steel // Materials Science. – 1998. – 34, 4. – P. 497 – 507).
2. Студент, О.З. Вплив тривалої експлуатації сталі 12Х1МФ з різних зон гину парогону ТЕС на її механічні характеристики [Текст] / О.З. Студент, Л.М. Свірська, І.Р. Дзіоба // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012, – 48, № 2. – С. 111 – 118. (Influence of the long-term operation of 12Kh1M1F steel from different zones of a bend of steam pipeline of a thermal power plant on its mechanical characteristics / O.Z. Student, L.M. Svirs'ka, I.R. Dzioba // Materials Science – 2012. – 48, № 2. – P. 239 – 246).
3. Студент, О. Вплив теплостійкості під час експлуатації парогонів ТЕС на статичну тріщиностійкість сталі 15Х1М1Ф [Текст] / О. Студент, Г. Кречковська, Л. Бабій // Вісник ТНТУ. – Тернопіль. – 2013. – Том 72, № 4. – С 199 – 206.
4. Вплив газоподібного водню на інтенсивність процесу повзучості корпусної сталі реакторів гідрокрекінгу нафти [Текст] / Г.М. Никифорчин, О.З. Студент, А. Загурський, Л.О. Бабій, Г. Матисяк // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій; за заг. ред. Лучка Й.Й. – Львів: Каменяр, 2005. – Вип. 6. – С. 716 – 721.
5. Повзучість у водні експлуатованої сталі 2,25Cr-Mo [Текст] / Л.О. Бабій, О.З. Студент, А. Загурський, А.Д. Марков // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 5. – С. 91 – 96. (Babii L.O. Creep of degraded 2.25 Cr-Mo steel in hydrogen / L.O. Babii, O.Z. Student, A. Zagorski, A.D. Markov // Materials Science – 2007. – 43, 5. – P. 701 – 707).
6. Robertson, I.M. Hydrogen effects on plasticity / I.M. Robertson, H.K. Birnbaum, P. Sofronis // In: Dislocations in Solids / Eds. by J.P. Hirth, L. Kubin. – Oxford: Elsevier, 2009. – Vol. 15. – P. 249–294.
7. Власов, Н.М. Влияние атомов водорода на подвижность краевой дислокации [Текст] / Н.М. Власов, В.А. Зазноба // Физика твердого тела. – 1999. – 41. – вып. 3. – С. 451–453.
8. Студент, О.З. Особливості впливу водню на властивості і механізм руйнування металу зварних з'єднань паропроводів ТЕС [Текст] / О.З. Студент, А.Д. Марков, Г.М. Никифорчин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 4. – С. 26 – 35. (Specific features of the influence of hydrogen on the properties and mechanism of fracture of the metal of welded joints of steam pipelines at thermal power plants / O.Z. Student, A.D. Markov, H.M. Nykyforchyn // Materials Science – 2006. – 42, № 4. – P. 451 – 460).
9. Data sheets on the elevated temperature properties of quenched and tempered 2.25Cr-1Mo steel plates for pressure vessels (ASTM A542) // NIRM data sheet. – 1991. – 36 A.

Отримано 14.09.2015

УДК 539.3

Сергій Тинчук, канд. техн. наук

Національний університет водного господарства та природокористування

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВИХ ПОКРИТТІВ З ДЕФЕКТАМИ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Резюме. Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) багатошарових плит на жорсткій основі запропоновано структурно-континуальну уточнену модель безмоментного симетричного НДС. Розрахункова схема поперечно навантаженої плити утворюється симетричною добудовою плити відносно поверхні контакту з основою, а навантаження на таку плиту подвійної товщини прикладається з двох сторін, причому, симетрично щодо її серединної поверхні. НДС плити

стає симетричним (беззгинним). Чисельно модель реалізована варіаційно-різницевим методом (ВРМ). Розв'язано задачі з дискретною зміною жорсткості плити в її площині через виникнення поздовжніх плоских дефектів та при різних умовах контакту плити з основою.

Ключові слова: варіаційно-різницевий метод, уточнена модель, багатошарова плита, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення.

Sergiy Tynchuk

THE NUMERICAL ANALYSIS OF STRESSED STATE OF MULTILAYERED COVERINGS WITH DEFECTS ON AN RIGID FOUNDATION

Summary. Multilayered coverings can be considered as thick plates resting on a rigid substrate. For research of stress-strain state (SSS) of multilayered plates on an rigid foundation the refined structural-continual model of momentless symmetrical SSS is offered. The layers of the plate are both isotropic and transversely isotropic, with any but constant thickness with rigid interlaminar contact. The design diagram of a transversely loaded plate is formed by supplementing it with a symmetric one relatively the contact surface of the foundation. The load on a double thickness plate is applied bilaterally, being symmetrical to its median surface. The SSS of a plate becomes symmetrical (unflexural). Such a diagram models shear without friction on the contact surface of a plate with the foundation. The rigid contact of the initial plate with the foundation is modelled by introducing an additional thin practically nondeformable layer.

Numerically model is realized by the variational-difference method (VDM). To obtain the desing system of algebraic equations of VDM the Lagrange integration variational functional on a half step of digitization with simultaneous application of left and forward differences for the first derivative of functions of displacement, is applied. Calculations confirm the efficiency of such approach, which allows to obtain solutions qualitatively and quantitatively close to three-dimensional ones. The positive influence on SSS of two-layered plate by presence of a thin layer slippage in the hard layer plate is presented.

The problems with a discrete change in rigidity of the plate in its plane through the occurrence of longitudinal planar defects and under different conditions of contact of the plate with foundation is solved. On the border of the defect and change of the contact condition of the plate with foundation coupling conditions of displacements are applied on the upper surface of the plate in two neighboring grid nodes by using the undetermined Lagrange multipliers.

Key words: variational-difference method, refined model, multilayered plate, rigid foundation, transverse shear, transverse compression.

Вступ. У сучасних конструкціях застосовуються багатофункціональні покриття з різною жорсткістю і фізико-механічними характеристиками шарів. Причому жорсткість несучої конструкції, у багатьох випадках, істотно перевищує жорсткість покриття, що дозволяє плоскі покриття розглядати як багатошарові плити, які жорстко або із проковзуванням контактують з абсолютно жорсткою основою.

В [1, 2] розглянуті структурно-континуальні уточнені моделі НДС поперечно навантаженої багатошарової плити на жорсткій основі, у яких використана ідея [3] ітераційні моделювання НДС плити з довільною структурою шарів. Там же отримані аналітичні розв'язки тестових задач і дані оцінки точності цих моделей. Однак у задачах зі змішаними умовами контакту плити з основою або при дискретній зміні умов контакту між шарами і жорсткості в площині плити необхідне застосування чисельних методів. Також істотною проблемою є виконання умов спряження частин плити різної жорсткості. У даній роботі уточнену модель НДС [1, 2] змінено таким чином, що кінематичні гіпотези не містять заданих функцій навантаження. Чисельна реалізація моделі виконана варіаційно-різницевим методом [4, 5 та ін.], а тривимірні розв'язки отримувались за методикою [6]. Чисельно досліджено вплив на НДС плити суцільних і локальних міжшарових дефектів, які моделювалися тонкими прошарками.

Постановка задачі. Розглянемо багат шарову плиту на жорсткій основі (рис. 1 а). Шари – ізотропні або трансверсально-ізотропні різної товщини. У площині плити товщина шару однакова. На плиту діє поперечне навантаження $p(x)$.

Уточнений НДС плити моделюється аналогічно роботі [1], де деформації поперечного зсуву й деформації поперечного обтиснення апроксимуються по поперечній координаті з високою точністю. Однак, на відміну від [1], у кінематичній моделі НДС відсутня задана функція навантаження $p(x)$. Для зменшення кількості невідомих функцій у моделі НДС розрахункова схема плити (рис. 1 а) перетворюється на симетрично обтиснену плиту (рис. 1 б, в). Плита симетрично добудовується відносно поверхні контакту даної плити з основою й симетрично навантажується з двох сторін відносно її серединної поверхні. Тоді контакт основи з плитою відповідає умовам проковзування без тертя (рис. 1 б). Жорсткий контакт плити з основою пропонується моделювати введенням додаткового абсолютно жорсткого тонкого прошарку h_0 (рис. 1 в).

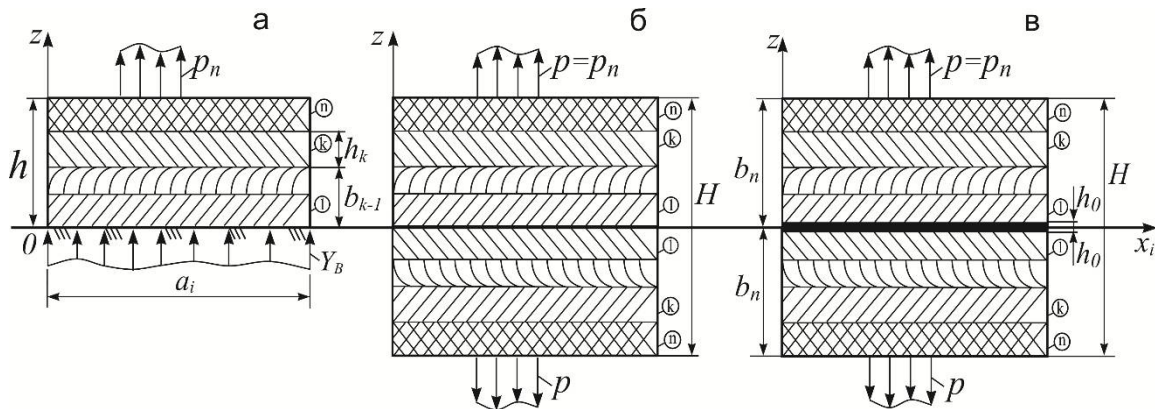


Рисунок 1. Розрахункові схеми плити

Figure 1. Design diagrams of a plate

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати розглянуту в [2] уточнену модель НДС плити, що складалася із двох якісно відмінних НДС – згинового та беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС у симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні НДС повністю описується симетричним (беззгиновим [1, 2]) НДС. Спрощується завдання апроксимацій НДС по поперечній координаті z , а кількість невідомих функцій i , відповідно, порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь у задачі істотно зменшується.

Континуальна модель НДС плити. У континуальній моделі компоненти вектора нормальних $u_3^{(k)}$ і тангенціальних $u_i^{(k)}$ зміщень представлені сумами добутків гіпотетично заданих [1] степеневих функцій $\psi_{3t}^{(k)}$, $\psi_{ir}^{(k)}$ поперечної координати z і шуканих функцій γ_t , β_{ir} , v_i координатної поверхні $x_1 0 x_2$ (рис. 1 б, в), яка збігається з поверхнею контакту плити з основою (рис. 1 а):

$$\begin{aligned}
 u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t; & t = \overline{1, 3}; & & i = \overline{1, 2}; \\
 u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; & r = \overline{1, 4}. & &
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Три функції γ_t дозволяють моделювати вплив поперечного обтиснення в другому ітераційному наближенні, а вісім функцій β_{ir} – вплив на зміщення деформацій поперечного зсуву в четвертому наближенні в напрямку кожної зі змінних x_i . Необхідна кількість шуканих функцій γ_t, β_{ir} у моделі (1) залежить від фізико-геометричних параметрів плити.

Тут і далі верхній індекс у дужках позначає номер шару, а нижній – напрям координатної осі. Диференціювання по x_α позначено нижніми індексами $\alpha = \overline{1, 3}$ після коми. Виконується також підсумовування по нижніх індексах, що повторюються. Сума інтегралів по z від функції з розривами буде позначатися одним інтегралом.

Якщо в (1) прийняти $\gamma_3(x_i) = p(x_i)$, то отримаємо модель [1]. Така модель зручна в тих задачах, де функція навантаження $p(x_i)$ не має розривів першого й другого роду й тим самим не суперечить принципу нерозривності зміщень $u_\alpha^{(k)}$ і принципу диференційованості функцій, а також при аналітичних методах розрахунку. Однак у ВРМ виявилось необхідним замінити $p(x_i)$ невідомою гладкою функцією обтиснення $\gamma_3(x_i)$.

Функції $\psi_{3t}^{(k)}, \psi_{ir}^{(k)}$, що моделюють в (1) розподіл зміщень по координаті z , мають вигляд [1 – 3]

$$\begin{aligned} \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_t^{(s)} dz; & \psi_{33,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; & t &= \overline{1, 2}; & r &= \overline{1, 4}; \\ \psi_{ir}^{(k)} &= -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; & \psi_l^{(k)} &= \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; & s &= \overline{1, k}; & l &= \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Відзначимо, що при $z = 0$, на поверхні контакту плити з основою $\psi_{3t,3}^{(1)}(0) = 0$, $\psi_{3t}^{(1)}(0) = 0$, $\psi_{ir}^{(1)}(0) = 0$. Тому на поверхні $z = 0$, якщо функція $v_i \neq 0$, виконуються умови проковзування без тертя між плитою і основою

$$\sigma_{i3} = 0, \quad u_i = v_i, \quad u_3 = 0 \quad (\text{при } z = 0). \quad (3)$$

Для моделювання жорсткого контакту плити з основою потрібно додати відносно тонкий ($h_0 \ll H$) досить жорсткий шар, а також прийняти в (1) $v_i = 0$.

У виразах (2) $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – коефіцієнти закону Гука $e_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}$; функції $F_t^{(k)}(z)$ апроксимують розподіл напруг поперечного обтиснення $\sigma_{33} = F_t \gamma_t + p$, а функції $f_{ir}^{(k)}(z)$ – напруг поперечного зсуву $\sigma_{i3} = f_{ir} \beta_{ir}$ по висоті плити, які описані в [3].

Чисельна реалізація моделі ВРМ. Систему розрахункових рівнянь моделі (1) у ВРМ, як звичайно [4, 5 та ін.], отримано безпосередньо з умови мінімуму варіації потенційної енергії деформування. Тут застосований варіаційний принцип Лагранжа

$$\delta U = \delta \Pi - \delta H = 0, \quad (4)$$

який у випадку, наприклад, плоскої деформації багат шарових плит має вигляд

$$\delta U = \sum_{j=1}^N \iint_{S_j} \left\{ \int_{-h}^h [\sigma_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{13} \cdot \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{33} \cdot \delta \varepsilon_{33}] dz - p(2\bar{\psi}_{3t,3}^{(n)}) \cdot \delta \gamma_t \right\} dS_j = 0, \quad (5)$$

де $\bar{\psi}_{3t,3}^{(n)}$ – значення функції $\psi_{3t,3}^{(n)}$ при $z = h$ (рис.1 б) або ж $z = h + 0,5h_0$ (рис.1 в) для точок на поверхні плити.

Використовуючи в (5) дискретне представлення через скінченні різниці відносних деформацій $\varepsilon_{\alpha\beta}$, отриманих з (1) по співвідношеннях Коші, і напруг $\sigma_{\alpha\beta}$, отриманих за законом Гука, отримаємо систему розрахункових алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень невідомих функцій v_i , γ_t , β_{ir} моделі (1).

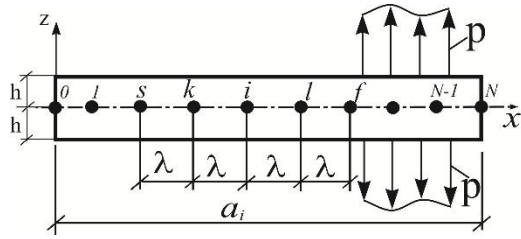


Рисунок 2. Дискретна розрахункова схема плити в задачах ВРМ

Figure 2. Discrete design diagram of plate in problems VDM

Тут реалізується підхід, в якому інтегрування варіації функціонала повної енергії (5) виконується на кроці $\lambda/2$ (рис. 2) з одночасним використанням як лівих (ліворуч від вузла), так і правих (праворуч від вузла) різниць [4] для перших похідних від шуканих функцій. Такий підхід виявився ефективнішим, ніж представлений у [5].

Використання запропонованого підходу з лівими і правими різницями до функцій v_i і β_{ir} моделі (1) у функціоналі (5), для задачі плоскої деформації плити дозволило отримати розрахункові рівняння ВРМ для вузла i в наступному вигляді (якщо дотримуватися нумерації вузлів із рис. 2):

а) для множників при варіації v_{il} у вузлі i функції зсуву v_i в площині координатної поверхні $x_1 0 x_2$:

$$B_0(-v_k + 2v_i - v_l)_1 / \lambda - B_{3t}(0,5\gamma_s - \gamma_k + \gamma_l - 0,5\gamma_f)_t / \lambda^2 - B_{1r}(-\beta_k + 2\beta_i - \beta_l)_r / \lambda + P_t(\gamma_k - \gamma_l)_t / 2 = 0; \quad (6)$$

б) для множників при варіації γ_{it} функції поперечного обтиснення γ_t у вузлі i :

$$\begin{aligned} & -B_{3t}(0,5v_s - v_k + v_l - 0,5v_f)_1 / \lambda^2 + D_{qt}^{33}(\gamma_s - 4\gamma_k + 6\gamma_i - 4\gamma_l + \gamma_f)_t / \lambda^3 - H_{qt}^3(\gamma_k - 2\gamma_i + \gamma_l)_t / \lambda + \\ & + D_{rt}^{13}(0,5\beta_s - \beta_k + \beta_l - 0,5\beta_f)_{1r} / \lambda^2 + P_t(v_k - v_l)_1 / 2 - J_{rt}^1(\beta_k - \beta_l)_{1r} / 2 - J_{qt}^3(\gamma_k - 2\gamma_i + \gamma_l)_t / \lambda + \\ & + R_{qt}\gamma_{it}\lambda - p_i(2\bar{\psi}_{3t,3}^{(n)})\gamma_{it}\lambda = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

в) для множників при варіації β_{ir} функції поперечного зсуву β_{ir} у вузлі i :

$$-B_{1r}(-v_k + 2v_i - v_l)_1 / \lambda + D_{tr}^{31}(0,5\gamma_s - \gamma_k + \gamma_l - 0,5\gamma_f)_t / \lambda^2 + D_{gr}^{11}(-\beta_k + 2\beta_i - \beta_l)_{1r} / \lambda - \quad (8)$$

$$-H_{rr}^1(\gamma_k - \gamma_l)_t / 2 + T_{gr} \beta_{1lr} \lambda = 0. \quad)$$

Постійні коефіцієнти в системі розрахункових рівнянь (6) – (8) є узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються аналогічно коефіцієнтам розрахункової системи диференціальних рівнянь із [1] у такий спосіб:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; & B_{\varphi_s} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\varphi_s} dz; & P_t &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} dz; & D_{fs}^{\varphi,\mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\varphi_f} \psi_{\mu_s} dz; \\
 J_{ft}^{\varphi} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\varphi_f} \psi_{3t,33} dz; & H_{ts}^{\varphi} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} \psi_{\varphi_s} dz; & \varphi, \mu &= \overline{1, 3}; & s, f &= \overline{1, 4}; & (9) \\
 R_{tq} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t,33} \psi_{3q,33} dz; & T_{rg} &= \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{1r,3} \psi_{1g,3} dz; & t, q &= \overline{1, 3}; & r, g &= \overline{1, 4},
 \end{aligned}$$

де $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – коефіцієнти закону Гука $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}$; G' – модуль поперечного зсуву в шарі; b_n – координата z верхньої поверхні плити ($b_n = H/2$).

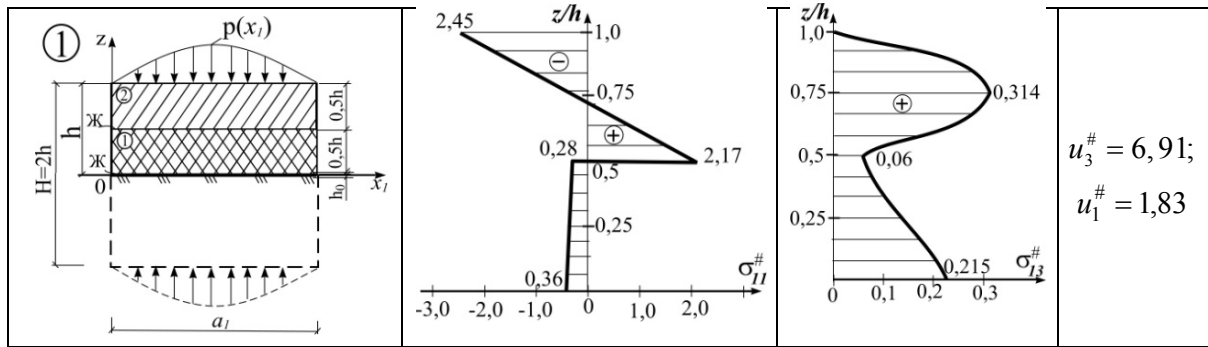
Чисельне дослідження НДС плити. Для аналізу НДС плити виконаний із застосуванням (6) – (8) розрахунок ВРМ кількох задач плоскої деформації досить товстої плити довжиною $a_1 = a$ й $a_2 = \infty$. У всіх далі наведених прикладах на торцях плити виконуються граничні умови типу Нав'є ($\gamma_t = 0, \sigma_{11} = 0$ при $x_1 = 0, a$). На плиту діє поперечне синусоїдальне навантаження $p = p_0 \sin(\pi x_1/a)$. Через симетрію навантаження p розглядалася половина плити ($a/2 \leq x_1 \leq a$). Товщина плити h , а у розрахунковій схемі (рис.1 б, в) $H = 2h$ або $H = 2(h + h_0)$.

Розглянуто задачу плоскої деформації двошарової плити з $a/h = 3$ на жорсткій основі з розшаруванням одного шару при дії синусоїдального навантаження (табл. 1). Шари плити – ізотропні, однакової товщини $h_1 = h_2 = 0,5h$ із $E^{(1)} = 1 \cdot 10^4$ МПа; $E^{(2)} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu^{(1)} = 0,3$; $\nu^{(2)} = 0,3$. Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування, а на поверхні контакту плити з основою моделюється ковзкий контакт (3). Для моделювання абсолютно жорсткого контакту з основою вводиться тонкий ізотропний шар ($-0,005h \leq z \leq 0,005h$) товщиною $h_0 = h/100$ із $E_0 = 10^9$ МПа, $\nu_0 = 0$. Дефект розшарування між шарами ($0,5h \leq z \leq 0,505h$) моделюється введенням тонкого трансверсально-ізотропного шару $h_d^{(2)} = h/200$ з $E'_d = E^{(1)}$; $E_d = E^{(1)}/10^3$; $\nu_d = \nu'_d = 0$, $G_d = G'_d = E_d/2$.

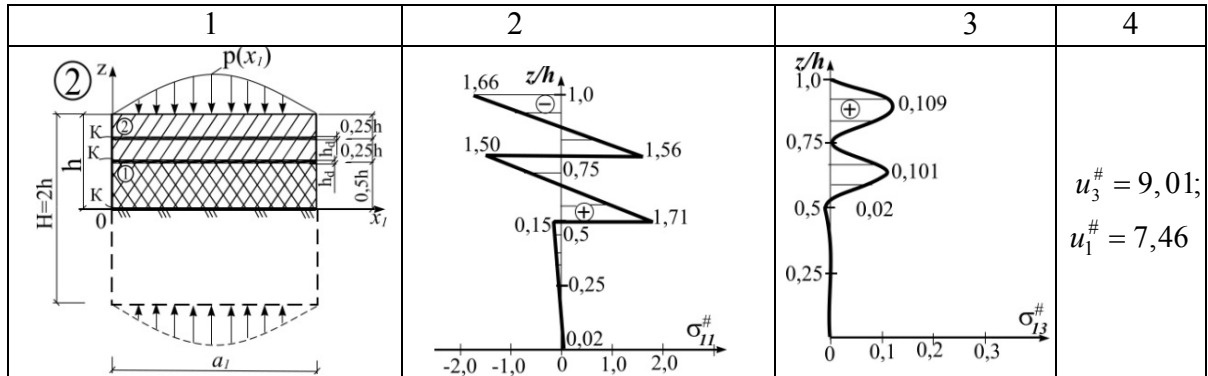
Таблиця 1

Вплив дефектів розшарування на НДС двошарової плити (епюри при $0 \leq z/h \leq 1$)

Схема плити	Епюра $\sigma_{11}^{\#}$	Епюра $\sigma_{13}^{\#}$	Зміщення
1	2	3	4



Продовження таблиці 1



Показано, що наявність тонкого шару проковзування посередині жорсткого верхнього шару плити (схема 2 плити, у табл. 1) і ковзкий контакт з основою майже у два рази зменшує нормальні напруження $\sigma_{11}^{\#} = \sigma_{11} / p_0$, а дотичні напруження $\sigma_{13}^{\#} = \sigma_{13} / p_0$ зменшуються в три рази в порівнянні зі схемою 1 (табл. 1). При цьому трохи зменшується жорсткість плити (максимальні зміщення $u_{\alpha}^{\#} = u_{\alpha}^{\max} E^{(2)} / p_0 h$ збільшуються).

Відповідно, у плитах на жорсткій основі для зменшення напружень і підвищення надійності плит можна у жорстких шарах застосовувати конструктивно тонкі шари «проковзування» (як у схемі 2). Відзначимо також, що наявність проковзування між плитою й жорсткою основою зменшує поперечну жорсткість плити на 15 – 20%.

Показано вплив на НДС плити змішаних умов контакту з основою на прикладі розрахунку однорідної ізотропної плити з характеристиками пружності E й $\nu = 0,25$ при $a/h = 4$ ($a/H = 2$). На поверхні контакту плити з основою моделюється жорсткий, ковзкий та змішаний (в центрі плити – жорсткий, довжиною $a/2$, а на краях – ковзкий) контакти. Жорсткий контакт, як і в попередньому прикладі, моделюється тонким ізотропним шаром. При змішаному контакті плити з основою, на границі зміни жорсткого та ковзкого контактів (у точках i та $i+1$), застосовано умови спряження зміщень на верхній поверхні плити $u_{\alpha(i)}^h = u_{\alpha(i+1)}^h$ у двох сусідніх вузлах сітки i та $i+1$ за допомогою невизначених множників Лагранжа у варіаційному рівнянні Лагранжа

$$\delta U + \delta \Pi_{\lambda} = 0,$$

де

$$\delta \Pi_{\lambda} = \delta \lambda_{1r} (\psi_{3t,3}^{h(1)} \cdot \gamma_t^{(1)} - \psi_{3t,3}^{h(2)} \cdot \gamma_t^{(2)}) + \delta \lambda_{2r} (\psi_{ir}^{h(1)} \cdot \beta_{ir}^{(1)} - \psi_{ir}^{h(2)} \cdot \beta_{ir}^{(2)}) + \delta \lambda_{3t} (\psi_{3t}^{h(1)} \cdot \gamma_{t,1}^{(1)} - \psi_{3t,3}^{h(2)} \cdot \gamma_{t,1}^{(2)}), \quad (10)$$

що дозволило виконати кінематичні умови сполучення в усіх точках поперечного перерізу $x_1 = \pm a/4$ в однорідній по товщині плиті. Тут $\psi_{\alpha s}^h = \psi_{\alpha s}^n (z = h)$.

Умови (10) означають введення в кінематичні умови, у поперечному перерізі спряження частин плити, коефіцієнтів пропорційності між шуканими функціями кінематичної моделі

$$\gamma_t^{(2)} = \left[\psi_{3t,3}^{h(1)} / \psi_{3t,3}^{h(2)} \right] \gamma_t^{(1)}; \quad \beta_{ir}^{(2)} = \left[\psi_{ir}^{h(1)} / \psi_{ir}^{h(2)} \right] \beta_{ir}^{(1)}; \quad \gamma_{t,\alpha}^{(2)} = \left[\psi_{3t}^{h(1)} / \psi_{3t}^{h(2)} \right] \gamma_{t,\alpha}^{(1)}, \quad (11)$$

що відрізняє ці умови від кінематичних граничних умов, отриманих варіаційним методом для плит з однорідним контактом та однорідними шарами по всій площині плити. Відзначимо, що у ВРМ необхідне виконання тільки кінематичних граничних умов.

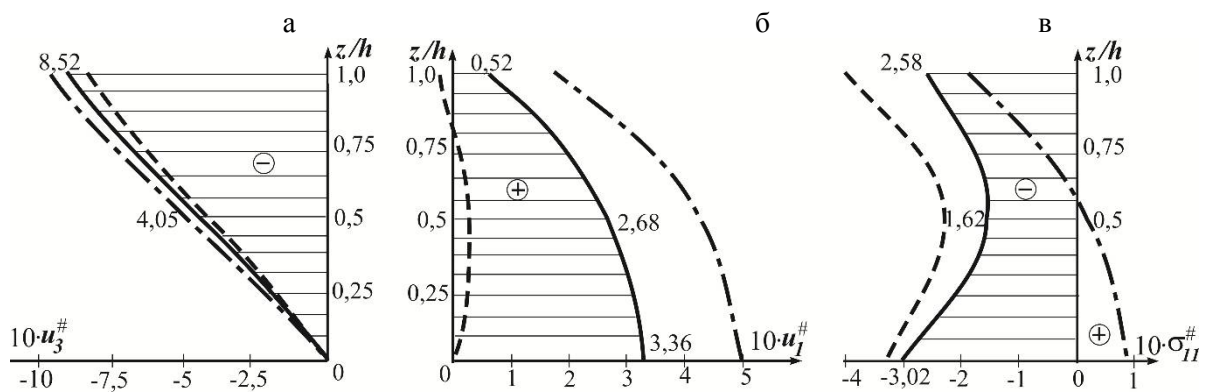


Рисунок 3. Розподіл максимальних зміщень і напружень у плиті при різних умовах контакту з основою

Figure 3. The distribution of maximum displacements and stresses in the plate under different conditions of contact with the foundation

Характер зміни НДС плити при різних умовах контакту з основою показано на рис. 3. Дано числові значення відносних зміщень $u_{\alpha}^{\#}$ і напружень $\sigma_{11}^{\#}$ при змішаному контакті плити з основою (суцільна лінія), а також показано розподіл при жорсткому (штрихова лінія) та ковзкому (штрих-пунктирна лінія) контактах плити з основою. Причому, характер зміщень $u_3^{\#}$ (рис. 3 а) і напруг $\sigma_{11}^{\#}$ (рис. 3 в) показано в перерізі посередині плити ($x_1 = 0$), а зміщень $u_1^{\#}$ – у перерізі $x_1 = a/2$ (рис. 3 б).

Величина і характер нормальних поперечних зміщень $u_3^{\#}$ незначно змінюються при різних умовах контакту плити з основою (рис. 3 а), тоді як величина і характер зміщень $u_1^{\#}$ (рис. 3 б) та напружень $\sigma_{11}^{\#}$ (рис. 3 в) істотно залежать від умов контакту.

Показано вплив на НДС плити локальних плоских включень у плиту на прикладі плоскої деформації ізотропної плити із пружними характеристиками E та $\nu = 0,25$ при $a/h = 4$ ($a/H = 2$). Включення посередині висоти плити ($z = 0,5h$) моделюється тонким шаром товщиною $h_d = h/200$, довжиною $a/2$ з ізотропного матеріалу ($E_d = E/10$ і $\nu = 0,25$). Контакт плити з основою ковзкий. На границі

включення (у точках i та $i+1$) записуються умови спряження (10) із невизначеними множниками Лагранжа. Розподіл напружень $\sigma_{11}^{\#}$ по висоті плити посередині плити та біля границі включення показано на рис. 4.

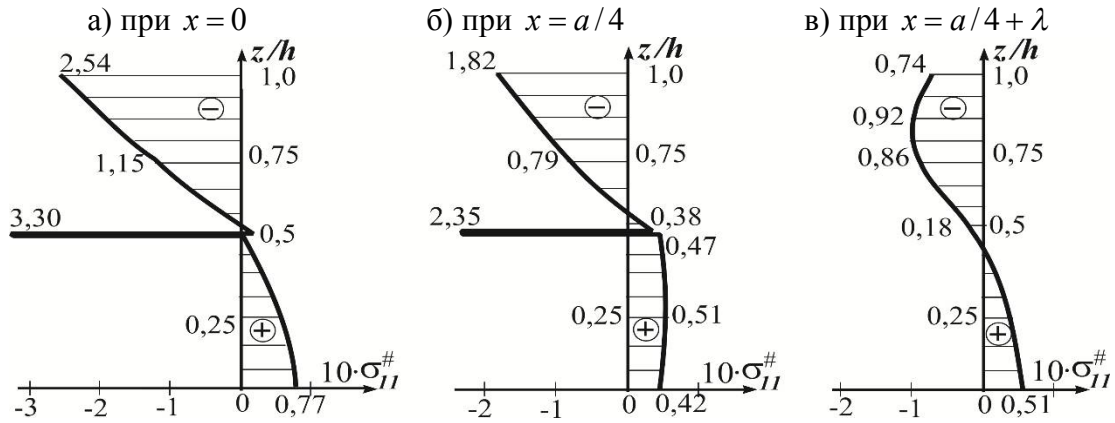


Рисунок 4. Нормальні напруження в поперечних перерізах плити із плоским включенням

Figure 4. Normal stresses in cross-sections of plate with flat inclusion

Наявність такого плоского включення в плиті трохи збільшує максимальні відносні поперечні зміщення $u_3^{\#} = u_3^{\max} E / p_0 h$ з 0,9305 до 0,9675, порівняно з однорідною плитою, а зміщення $u_1^{\#} = u_1^{\max} E / p_0 h$ – з 0,4987 до 0,5031. Однак напружений стан якісно змінюється (рис. 4), а максимальні напруження в плиті збільшуються на 30%.

Висновки. Аналіз впливу на НДС плити дефектів часткового розшарування дозволяє повніше досліджувати стан плити в процесі її експлуатації. Розрахункова система алгебраїчних рівнянь (6) – (8) моделі (1) дозволяє отримувати за ВРМ результати, які близькі до аналітичних і тривимірних розв'язків навіть при незначній густоті сітки дискретизації. Чисельна реалізація моделі (1) ВРМ дозволяє розглядати задачі про НДС багатошарових плит з урахуванням дефектів, які викликані розшаруваннями, що дискретно змінюють жорсткість плити, а також під дією різного виду навантажень. Використання невизначених множників Лагранжа дозволило записати умови спряження зміщень на верхній поверхні плити на границі дефекту та зміни умов контакту плити з основою.

Conclusions. Thus, the analysis of partially stratification defects on the plate SSS allows to explore more fully the state of the plate during its operation. The calculation system of algebraic equations (6) – (8) of model (1) enables to obtain results by VDM, that are close to three-dimensional and analytical solutions and even with small density grid of digitization. The numerical realization of model (1) by VDM allows to consider the problems of multilayer plates SSS, taking into account defects caused by stratification that change of rigidity of plate discretely and under different types of loads. Use of undetermined Lagrange multipliers allowed to add conditions of interface of displacements on the upper surface of the plate on the border of defect and change the conditions of contact of the plate with foundation.

Список використаної літератури

1. Гуртовий, А.Г. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании [Текст] / А.Г. Гуртовий, С.А. Тынчук // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 643 – 654.

2. Гуртовий, О.Г. Задача поперечного деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою [Текст] / О.Г. Гуртовий, С.О. Тинчук // Зб. наук. праць – Вісник УДУВГП – Рівне: УДУВГП. – 2004. – Випуск 2 (26). – С. 222 – 229.

3. Гуртовий, А.Г. Континуальные аппроксимации перемещений в толстых слоистых пластинах при разделении термомеханических нагрузок на двухсторонние симметрические и кососимметрические составляющие [Текст] / А.Г. Гуртовий // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 743 – 756.

4. Варвак, П.М. Новые методы решения задач сопротивления материалов [Текст] / П.М. Варвак. – К.: Выща школа, 1977. – 160 с.

5. Гуртовий, О.Г. Особливості застосування варіаційно-різницевого методу в одновимірних задачах теорії пружності [Текст] / О.Г. Гуртовий // В зб.: Вісник НУВГП. – Рівне: НУВГП. – 2006. – Вип. 2 (34), част. 1. – С. 116 – 121.

6. Пискунов, В.Г. Решение задачи статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке [Текст] / В.Г. Пискунов, В.С. Сипетов, Ш.Ш. Туйметов // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 41 – 52.

Отримано 25.11.2015

УДК 539.3

Віктор Січко, канд. фіз.-мат. наук

Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ТОВСТОСТІННОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ

***Резюме.** Дано постановку просторової задачі про вимушені резонансні коливання й дисипативний розігрів в'язкопружної товстостінної циліндричної панелі з шарнірно обпертими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні й теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Задача розв'язується методом Фур'є і зводиться до крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язування цих систем запропоновано використовувати ефективний метод дискретної ортогоналізації. Дано порівняння результатів розрахунків із використанням просторової постановки й класичної та уточненої теорій оболонок.*

***Ключові слова:** резонансні коливання, циліндрична панель, саморозігрів.*

Victor Sichko

THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THICK-WALLED VISCOELASTIC CYLINDRICAL PANEL

***Summary.** The statement of three-dimensional problem on the forced resonance vibrations and dissipative heating of the viscoelastic thick-walled cylinder panel with simply supported edges is presented. The nonelastic material behavior is described by conception of complex characteristics. It is supposed that mechanical and thermophysical material properties do not depend on temperature. The problem is solved by the method of variable separation and is reduced to the boundary-value problems for the systems of ordinary differential equations. These systems are solved by the method of discrete orthogonalization. The comparison of calculation results taking advantage of three-dimensional and classical shell theories is presented.*

To describe non-elastic mechanical behavior the concept of complex characteristics is used. Panel edges are considered to be pressed by the hinge. It makes possible to reduce the problem to the system of general differential equations of high order using the method of variables distribution, for solving of which the effective numerical method of discrete orthogonalisation is proposed to be used, which provides high enough accuracy.