Ленюк М.Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора (конторовича-лєбєдєва) – ейлера – фур'є на сегменті полярної осі / Ленюк М., Шелестовська М. // Вісник ТНТУ. — 2010. — Том 15. — № 4. — С.121-130. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.52/524

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], канд. техн. наук

[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"
[2]Тернопільський національний економічний університет

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) – ЕЙЛЕРА – ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ $\left[R_0, R_3\right]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Резюме. *Методом порівняння розв'язку крайової задачі на сегменті полярної осі з двома точками спряження для сепаратної системи з диференціальних рівнянь Конторовича-Лєбєдєва, Ейлера та Фур'є для модифікованих функцій, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого – методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора (Конторовича-Лєбєдєва) – Ейлера – Фур'є.*

Ключові слова: *функціональні ряди, власні елементи, гібридний диференціальний оператор, інтегральні перетворення.*

M. Lenyuk, M. Shelestovska

SUMMARISING OF FUNCTIONAL SETS ACCORDING TO OWN ELEMENTS OF THE HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR (KOTOROVYCH-LEBEDEV) – EILER – FURIER ON THE POLAR AXIS SEGMENT $\left[R_0, R_3\right]$

The summary. *Using comparison method of solving the boundary problem on the polar axis segment with two junction points for the separate system consisting of Kontorovych-Lebedev, Eiler and Furier differential equations for the modified functions, built, on one side, by Caushier function method, and on the other side, by the definite hybrid integral transformation, polyparametric family of the functional sets according to the own elements of the hybrid differential operator (Kontorovych-Lebedev) – Eiler – Furier, have been summarised.*

Key words: *functional sets, own elements, hybrid differential operator, integral transformations.*

Вступ. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричними інтегралами, які можуть бути умовно збіжними навіть тоді, коли зображають аналітичну функцію. Звідси виникає доцільність заміни невласного інтеграла його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена дана стаття.

Постановка задачі. Побудуємо обмежений на множині

$$I_2 = \left\{ r : r \in \left[R_0, R_1\right) \cup \left(R_1, R_2\right) \cup \left(R_2, R_3\right], R_0 > 0, R_3 < \infty \right\}$$

розв’язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Конторовича-Лєбєдєва, Ейлера та Фур’є для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} &\left(B_{\alpha_1}-q_1^2\right)u_1(r)=-g_1(r), \quad r\in(R_0,\,R_1),\\ &\left(B^*_{\alpha_2}-q_2^2\right)u_2(r)=-g_2(r), \quad r\in(R_1,\,R_2),\\ &\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r), \quad r\in(R_2,\,R_3) \end{aligned} \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)u_1(r)\right|_{r=R_0}=g_0, \qquad \left.\left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)u_3(r)\right|_{r=R_3}=g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}; \quad j,\,k=1,2\,. \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $q_m>0$, $c_{1k}c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$; $\alpha_{11}^0\le 0$, $\beta_{11}^0\ge 0$, $\left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\ne 0$; $\alpha_{22}^3\ge 0$, $\beta_{22}^3\ge 0$, $\alpha_{22}^3+\beta_{22}^3\ne 0$; $\alpha_{ij}^k\ge 0$, $\beta_{ij}^k\ge 0$; $B_{\alpha_1}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_1^2-\lambda^2r^2$ – диференціальний оператор Конторовича-Лєбєдєва [1], $B^*_{\alpha_2}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)\frac{d}{dr}+\alpha_2^2$ – диференціальний оператор Ейлера [2]; $2\alpha_j+1>0$, $\lambda\in(0,\,\infty)$.

Результати досліджень. Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $\left(B_{\alpha_1}-q_1^2\right)\upsilon=0$ складають циліндричні функції уявного аргументу першого роду $I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)$ та другого роду $K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)$ [1]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B^*_{\alpha_2}-q_2^2\right)\upsilon=0$ складають функції $\upsilon_1=r^{-\alpha_2-q_2}$ та $\upsilon_2=r^{-\alpha_2+q_2}$ [2]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Фур’є $\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)\upsilon=0$ складають функції $\upsilon_1=chq_3r$ та $\upsilon_2=shq_3r$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв’язків дозволяє будувати розв’язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [2, 3]:

$$\begin{aligned} &u_1(r)=A_1I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)+B_1K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)+\int_{R_0}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,\\ &u_2(r)=A_2r^{-\alpha_2-q_2}+B_2r^{-\alpha_2+q_2}+\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\\ &u_3(r)=A_3chq_3r+B_3shq_3r+\int_{R_2}^{R_3}E_3(r,\rho)g_3(\rho)d\rho\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут $E_j(r,\rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$E_1(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}\begin{cases}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda\rho), & R_0<r<\rho<R_1\\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r), & R_0<\rho<r<R_1\end{cases}; \tag{5}$$

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r)\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho), & R_1<r<\rho<R_2 \\ \Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho)\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,r), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}; \tag{6}$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{1}{q_3\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}\begin{cases}\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3\rho), & R_2<r<\rho<R_3 \\ \Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r), & R_2<\rho<r<R_3\end{cases}. \tag{7}$$

У рівностях (5)-(7) беруть участь функції:

$$\Delta_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_0,\lambda R_1) = U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)U^{12}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1) - U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)U^{11}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1),\ \ j=1,2;$$

$$\Delta_{\alpha_2,jk}(q_2,R_1,R_2) = Z^{11}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)Z^{22}_{\alpha_2,k1}(q_2,R_2) - Z^{12}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)Z^{21}_{\alpha_2,k1}(q_2,R_2),\ \ j,k=1,2;$$

$$\Delta_{j2}(q_3R_2,q_3R_3) = V^{21}_{j2}(q_3R_2)V^{32}_{22}(q_3R_3) - V^{22}_{j2}(q_3R_2)V^{31}_{22}(q_3R_3).$$

Всі інші функції загальноприйняті [4].

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин $A_j, B_j\ \left(j=\overline{1,3}\right)$ дають неоднорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{gathered}
U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)A_1 + U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)B_1 = g_0 \\
U^{11}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1)A_1 + U^{12}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1)B_1 - Z^{11}_{\alpha_2;j2}(q_2,R_1)A_2 - Z^{12}_{\alpha_2;j2}(q_2,R_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12},\ \ j=1,2, \\
Z^{21}_{\alpha_2,j1}(q_2,R_2)A_2 + Z^{22}_{\alpha_2,j1}(q_2,R_2)B_2 - V^{21}_{j2}(q_3R_2)A_3 - V^{22}_{j2}(q_3R_2)B_3 = \omega_{j2} + \delta_{j2}G_{23}, \\
V^{31}_{22}(q_3R_3)A_3 + V^{32}_{22}(q_3R_3)B_3 = g_R.
\end{gathered} \tag{8}$$

У системі (8) беруть участь функції

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$G_{23} = -\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho + c_{22}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3\rho)}{\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}g_3(\rho)d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}\ \left(\delta_{12}=0,\ \delta_{22}=1\right)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\alpha);j}(q) = \Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Delta_{\alpha_2,2j}(q_2,R_1,R_2) - \Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Delta_{\alpha_2,1j}(q_2,R_1,R_2);\ \ j=1,2;$$

$$B_{\alpha_2;j}(q) = \Delta_{\alpha_2,j1}(q_2,R_1,R_2)\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3) - \Delta_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1,R_2)\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3),\ \ (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\theta_{(\alpha);1}(r,q) = \Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;22}(q_2,r) - \Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r),$$

$$\theta_{\alpha_2,2}(r,q) = \Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)\Psi^{2*}_{\alpha_2;21}(q_2,r) - \Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,r).$$

Припустимо, що виконана умова існування єдиного розв'язку крайової задачі (1)-(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8)

$$\begin{aligned}
\Delta_{(\alpha)}(q) &\equiv A_{(\alpha);1}(q)\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3) - A_{(\alpha);2}(q)\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3) = \\
&= \Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)B_{\alpha_2,2}(q) - \Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)B_{\alpha_2,1}(q) \neq 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);11}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\left[B_{\alpha_2,1}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda r) - B_{\alpha_2,2}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)\right],$$

$$W_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\cdot\theta_{\alpha_2,2}(r,q),$$

$$W_{(\alpha);13}\left(r,q\right)=-\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\cdot\Phi_{22}^{3}\left(q_3R_3,q_3r\right); \tag{10}$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);31}\left(r,q\right)=\frac{2c_{21}q_2c_{22}q_3}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)R_1^{2\alpha_2+1}}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,\lambda r\right),$$

$$W_{(\alpha);32}\left(r,q\right)=\frac{c_{22}q_3}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\theta_{(\alpha);1}\left(r,q\right), \tag{11}$$

$$W_{(\alpha);33}\left(r,q\right)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\left[-A_{(\alpha);1}\left(q\right)\Phi_{12}^{2}\left(q_3R_2,q_3r\right)+A_{(\alpha);2}\left(q\right)\Phi_{22}^{2}\left(q_3R_2,q_3r\right)\right];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{1}_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{B_{\alpha_2,2}\left(q\right)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),\qquad \mathcal{R}^{1}_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{B_{\alpha_2,1}\left(q\right)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^{1}_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{\Delta_{22}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^{1}_{(\alpha);22}(r,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{\Delta_{12}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r), \tag{12}$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\alpha);11}(r,q)=-\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;21}}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\theta_{\alpha_2;2}(r,q),\qquad \mathcal{R}^{2}_{(\alpha);21}(r,q)=\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\theta_{\alpha_2;2}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{\Delta_{22}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\theta_{(\alpha);1}(r,q),\qquad \mathcal{R}^{2}_{(\alpha);22}(r,q)=\frac{\Delta_{12}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\theta_{(\alpha);1}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);11}(r,q)=-\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;21}\left(\lambda R_0,\lambda R_1\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);21}(r,q)=\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_0,\lambda R_1\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{A_{(\alpha);2}\left(q\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r),\qquad \mathcal{R}^{3}_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{A_{(\alpha);1}\left(q\right)}{\Delta_{(\alpha)}\left(q\right)}\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r);$$

4) породженні неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{(\alpha);11}(r,\rho,q)=-\lambda^{2\alpha_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)W_{(\alpha);11}(\rho,q), & R_0<r<\rho<R_1\\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)W_{(\alpha);11}(r,q), & R_0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$H_{(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)\theta_{\alpha_2;2}(\rho,q),$$

$$H_{(\alpha);13}(r,\rho,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho),$$

$$H_{(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\theta_{\alpha_2;2}(r,q),$$

$$H_{(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_2\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{(\alpha);1}(r,q)\theta_{\alpha_2;2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2\\ \theta_{(\alpha);1}(\rho,q)\theta_{\alpha_2;2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$H_{(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);1}(r,q)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho), \tag{13}$$

$$H_{(\alpha);31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\cdot\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\cdot\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r),$$

$$H_{(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);1}(\rho,q)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r),$$

$$H_{(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_3}\begin{cases}W_{(\alpha);33}(r,q)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho), & R_2<r<\rho<R_3\\ W_{(\alpha);33}(r,q)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r), & R_2<\rho<r<R_3\end{cases}.$$

У результаті існування єдиного розв'язку алгебраїчної системи (8) й підстановки обчислених значень A_j, B_j в рівності (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=W_{(\alpha);1j}(r,q)g_0+\sum_{m,k=1}^{2}\mathcal{R}^{j}_{(\alpha);mk}(r,q)\omega_{mk}+W_{(\alpha);3j}(r,q)g_R+$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}H_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}H_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)d\rho,\quad j=\overline{1,3}. \tag{14}$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП), породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathrm{M}_{(\alpha)}=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_{\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B^*_{\alpha_2}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\frac{d^2}{dr^2}, \tag{15}$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

<u>Означення.</u> Областю визначення ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);\ g_2(r);\ g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r)=\{B_{\alpha_1}[g_1(r)];\ B^*_{\alpha_2}[g_2(r)];\ g_3''(r)\}$ неперервна на I_2;
2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0}=0,\qquad \left(\alpha_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{3}\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3}=0; \tag{16}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=0;\quad j,k=1,2. \tag{17}$$

Визначимо величини

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2(\alpha_2-\alpha_1)}}{R_2^{2\alpha_2+1}},\qquad \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{-(2\alpha_2+1)},\qquad \sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3$$

та скалярний добуток

$$\left(u(r),\upsilon(r)\right)=\int_{R_0}^{R_3}u(r)\upsilon(r)\sigma(r)dr\equiv\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)\upsilon_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)\upsilon_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)\upsilon_3(r)dr,\quad u\in G,\ \ \upsilon\in G\,. \tag{18}$$

Із того, що $u(r)$ та $\upsilon(r)$ задовольняють умови спряження (17), випливає базова тотожність

$$\left[u_k(r)\upsilon_k'(r)-u_k'(r)\upsilon_k(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}(r)\upsilon_{k+1}'(r)-u_{k+1}'(r)\upsilon_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}. \tag{19}$$

В міру того, що $u(r)$ та $\upsilon(r)$ задовольняють крайові умови (16) й має місце базова тотожність (19), отримуємо рівність

$$\left(\mathrm{M}_{(\alpha)}[u],\,\upsilon\right)=\left(u,\,\mathrm{M}_{(\alpha)}[\upsilon]\right). \tag{20}$$

Достатньо проінтегрувати два рази частинами під знаком інтегралів, скористатися базовою тотожністю (20) й структурою $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$.

Рівність (20) показує, що ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ самоспряжений. Це означає, що його спектр дійсний. Оскільки ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ на множині I_2 не має особливої точки, то його спектр дискретний.

<u>Висновок.</u> Спектр ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ дійсний, дискретний. Йому відповідає дійсна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\alpha),k}(r,\beta), \tag{21}$$

де β – спектральний параметр.

При цьому функції $V_{(\alpha),k}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}\left(B_{\alpha_1}+b_1^2\right)V_{(\alpha),1}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_0,R_1),\\ \left(B^*_{\alpha_2}+b_2^2\right)V_{(\alpha),2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)V_{(\alpha),3}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,R_3)\end{gathered} \tag{22}$$

крайові умови (16) та умови спряження (17); $b_j=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0$.

Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння $\left(B_{\alpha_1}+b_1^2\right)\upsilon=0$ складають функції $\upsilon_1=C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ та $\upsilon_2=D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ [1]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння $\left(B^*_{\alpha_2}+b_2^2\right)\upsilon=0$ складають функції $\upsilon_1=r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)$ та $\upsilon_2=r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r)$ [2]; для диференціального рівняння $\left(\dfrac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)\upsilon=0$ фундаментальну систему розв’язків складають тригонометричні функції $\cos b_3 r$ та $\sin b_3 r$ [2].

Якщо покласти

$$\begin{gathered}V_{(\alpha);1}(r,\beta)=A_1C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)+B_1D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1),\\ V_{(\alpha);2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r),\\ V_{(\alpha);3}(r,\beta)=A_3\cos b_3r+B_3\sin b_3r\,,\end{gathered} \tag{23}$$

то крайові умови (16) й умови спряження (17) дають для визначення величин $A_j, B_j \left(j=\overline{1,3} \right)$ однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$X^{01}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0, b_1\right) A_1 + X^{02}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0, b_1\right) B_1 = 0\,,$$
$$X^{11}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_1, b_1\right) A_1 + X^{12}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_1, b_1\right) B_1 - Y^{11}_{\alpha_2;j2}\left(b_2, R_1\right) A_2 - Y^{12}_{\alpha_2;j2}\left(b_2, R_1\right) B_2 = 0\,,$$
$$Y^{21}_{\alpha_2;j1}\left(b_2, R_2\right) A_2 + Y^{22}_{\alpha_2;j1}\left(b_2, R_2\right) B_2 - \upsilon^{21}_{j2}\left(b_3 R_2\right) A_3 - \upsilon^{22}_{j2}\left(b_3 R_2\right) B_3 = 0,\ \ j=1,2\,,$$
$$\upsilon^{31}_{22}\left(b_3 R_3\right) A_3 + \upsilon^{32}_{22}\left(b_3 R_3\right) B_3 = 0\,. \tag{24}$$

У системі (24) беруть участь функції:

$$X^{m1}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_m, b_1\right) = \left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^m_{j1}\right) C_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right)\Big|_{r=R_m}\,,$$
$$X^{m2}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_m, b_1\right) = \left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^m_{j1}\right) D_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right)\Big|_{r=R_m}\,,$$
$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}\left(b_2, R_m\right) = \left[\left(\beta^m_{jk} - \alpha^m_{jk} R_m^{-1}\alpha_2\right)\cos\left(b_2 \ln R_m\right) - b_2 R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\sin\left(b_2 \ln R_m\right)\right] R_m^{-\alpha_2}\,,$$
$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}\left(b_2, R_m\right) = \left[\left(\beta^m_{jk} - \alpha^m_{jk} R_m^{-1}\alpha_2\right)\sin\left(b_2 \ln R_m\right) + b_2 R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\cos\left(b_2 \ln R_m\right)\right] R_m^{-\alpha_2}\,,$$
$$\upsilon^{m1}_{j2}\left(b_3 R_m\right) = -\alpha^m_{j2} b_3 \sin b_3 R_m + \beta^m_{j2}\cos b_3 R_m; \qquad \upsilon^{m2}_{j2} = \alpha^m_{j2} b_3 \cos b_3 R_m + \beta^m_{j2}\sin b_3 R_m\,.$$

Для того, щоб алгебраїчна система (24) мала ненульові розв’язки, необхідно й досить, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\delta_{(\alpha)}\left(\beta\right) = a_{(\alpha);1}\left(\beta\right)\delta_{22}\left(b_3 R_2, b_3 R_3\right) - a_{(\alpha);2}\left(\beta\right)\delta_{12}\left(b_3 R_2, b_3 R_3\right) = 0\,. \tag{25}$$

Тут прийняті позначення

$$\delta_{\alpha_1;j1}\left(\beta\right) = X^{01}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0, b_1\right) X^{12}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_1, b_1\right) - X^{02}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0, b_1\right) X^{11}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_1, b_1\right),$$
$$\delta_{\alpha_2;jk}\left(\beta\right) = Y^{11}_{\alpha_2;j2}\left(b_2, R_1\right) Y^{22}_{\alpha_2;k1}\left(b_2, R_2\right) - Y^{12}_{\alpha_2;j2}\left(b_2, R_1\right) Y^{21}_{\alpha_2;k1}\left(b_2, R_2\right),$$
$$\delta_{j2}\left(b_3 R_2, b_3 R_3\right) = \upsilon^{21}_{j2}\left(b_3 R_2\right)\upsilon^{32}_{22}\left(b_3 R_3\right) - \upsilon^{22}_{j2}\left(b_3 R_2\right)\upsilon^{31}_{22}\left(b_3 R_3\right),$$
$$a_{(\alpha);j}\left(\beta\right) = \delta_{\alpha_1;11}\left(\beta\right)\delta_{\alpha_2;2j}\left(\beta\right) - \delta_{\alpha_1;21}\left(\beta\right)\delta_{\alpha_2;1j}\left(\beta\right);\ \ j,k=1,2\,.$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (25) утворюють дискретний спектр ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)};\ (\alpha) = (\alpha_1,\ \alpha_2)$.

Якщо підставити $\beta = \beta_n\ \left(b_j\left(\beta_n\right) = b_{jn}\right)$ у систему (24) й відкинути останнє рівняння, то одержимо сумісну алгебраїчну систему із п’яти рівнянь стосовно шести невідомих $A_j,\ B_j\ \left(j=\overline{1,3}\right)$. Розв’язавши її стандартним способом і підставивши одержані значення $A_j,\ B_j$ у рівності (23), маємо функції $V_{(\alpha);k}\left(r, \beta_n\right)$:

$$V_{(\alpha);1}\left(r,\beta_n\right) = \frac{c_{21} b_{2n}}{R_1^{2\alpha_2+1}} c_{22} b_{3n}\left[X^{01}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0, b_{1n}\right) D_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_{1n}\right) - X^{02}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_0, b_{1n}\right) C_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_{1n}\right)\right],$$
$$V_{(\alpha);2}\left(r,\beta_n\right) = c_{22} b_{3n}\left[\delta_{\alpha_1;11}\left(\beta_n\right)\Psi^1_{\alpha_2;22}\left(b_{2n}, r\right) - \delta_{\alpha_1;21}\left(\beta_n\right)\Psi^1_{\alpha_2;12}\left(b_{2n}, r\right)\right],$$
$$\Psi^1_{\alpha_2;j2}\left(b_{2n}, r\right) = Y^{12}_{\alpha_2;j2}\left(b_{2n}, R_1\right) r^{-\alpha_2}\cos\left(b_{2n}\ln r\right) - Y^{11}_{\alpha_2;j2}\left(b_{2n}, R_1\right) r^{-\alpha_2}\sin\left(b_{2n}\ln r\right),$$
$$V_{(\alpha);3}\left(r,\beta_n\right) = \omega_{(\alpha);2}\left(\beta_n\right)\cos b_{3n} r - \omega_{(\alpha);1}\left(\beta_n\right)\sin b_{3n} r\,, \tag{26}$$
$$\omega_{(\alpha);j}\left(\beta_n\right) = a_{(\alpha);2}\left(\beta_n\right)\upsilon^{2j}_{12}\left(b_{3n} R_2\right) - a_{(\alpha);1}\left(\beta_n\right)\upsilon^{2j}_{22}\left(b_{3n} R_2\right);\quad j=1,2\,.$$

Визначимо квадрат норми спектральної функції $V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)$ через скалярний добуток

$$\left\|V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2=\left(V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right),V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right)=\int_{R_0}^{R_3}\left[V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right]^2\sigma\left(r\right)dr\,. \quad (27)$$

Згідно з роботою [5] сформулюємо твердження.

Теорема 1 (про власні числа). Корені β_n трансцендентного рівняння (25) складають дискретний спектр ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$: дійсні, різні, симетричні відносно точки $\beta=0$ й на півпрямій $\beta>0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Теорема 2 (про власні функції). Система власних функцій $\left\{V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma\left(r\right)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g\left(r\right)\in G$ зображається за системою $\left\{V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g\left(r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3}g\left(\rho\right)V_{(\alpha)}\left(\rho,\beta_n\right)\sigma\left(\rho\right)d\rho\frac{V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)}{\left\|V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}\,. \quad (28)$$

Ряд Фур'є (28) визначає пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ скінченне ГІП типу (Конторовича-Лєбєдєва) – Ейлера – Фур'є, породжене на множині I_2 ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}\left[g\left(r\right)\right]=\int_{R_0}^{R_3}g\left(r\right)V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\sigma\left(r\right)dr\equiv\tilde{g}_n\,, \quad (29)$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}\left[\tilde{g}_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\left(\left\|V_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2\right)^{-1}\equiv g\left(r\right). \quad (30)$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f\left(r\right)=\left\{B_{\alpha_1}\left[g_1\left(r\right)\right];\;B_{\alpha_2}^{*}\left[g_2\left(r\right)\right];\;g_3''\left(r\right)\right\}$$

неперервна на множині I_2, а функції $g_j\left(r\right)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то справджується основна тотожність скінченного ГІП ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$

$$H_{(\alpha)}\left[\mathrm{M}_{(\alpha)}\left[g\left(r\right)\right]\right]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0+$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\sigma_3g_R+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}]. \quad (31)$$

У рівності (31) беруть участь величини та функції:

$$d_1=\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}:c_{11},\qquad d_2=\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}:c_{12};$$

$$\tilde{g}_{1n}=\int_{R_0}^{R_1}g_1\left(r\right)V_{(\alpha);1}\left(r,\beta_n\right)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr,\qquad \tilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2}g_2\left(r\right)V_{(\alpha);2}\left(r,\beta_n\right)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr,$$

$$\tilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3}g_3\left(r\right)V_{(\alpha);3}\left(r,\beta_n\right)\sigma_3dr\,;$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k\left(\beta_n\right)=\left(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k\right)V_{(\alpha);k+1}\left(r,\beta_n\right)\Big|_{r=R_k}\,,\quad i,k=1,2\,.$$

Формули (29)-(31) складають математичний апарат для розв'язання крайової задачі (1)-(3).

Побудований за відомою логічною схемою [4] єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) має таку структуру:

$$u_j(r)=\int_{R_0}^{R_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{R_3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_3(\rho)\sigma_3 d\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\cdot\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+q^2)\,\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}g_R+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\cdot\omega_{2k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\cdot\omega_{1k}\right],$$

$$q^2=\max\left\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\right\},\quad j=\overline{1,3}. \tag{32}$$

Порівнюючи розв'язки (14) та (32) в міру єдиності, одержуємо такі формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\left(\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\right)^{-1}W_{(\alpha);1j}(r,q);\quad j=\overline{1,3}, \tag{33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=W_{(\alpha);3j}(r,q);\quad j=\overline{1,3}, \tag{34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=d_k^{-1}\mathcal{R}_{(\alpha);2k}^j(r,q);\quad k=1,2,\ j=\overline{1,3}, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=-d_k^{-1}\mathcal{R}_{(\alpha);1k}^j(r,q);\quad k=1,2,\ j=\overline{1,3}, \tag{36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\sigma_k^{-1}H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q);\quad j,k=\overline{1,3}. \tag{37}$$

Зауваження 1. Якщо $q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\ge 0$, $(\beta_n^2+q^2)=(\beta_n^2+q_1^2)$. Якщо $q^2=q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\ge 0$ і $(\beta_n^2+q^2)=(\beta_n^2+q_2^2)$. Якщо $q^2=q_3^2$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\ge 0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$ і $(\beta_n^2+q^2)=(\beta_n^2+q_3^2)$.

Зауваження 2. Оскільки праві частини у формулах (33)-(37) не залежать від нерівностей $(q_j^2-q_m^2)\ge 0$, то за необхідності можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2=q_0^2>0$.

Результатом виконаного дослідження є твердження.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $g(r)$ задовольняє умови теореми про основну тотожність і виконується умова (9) існування єдиного розв'язку крайової задачі (1)-(3), то мають місце формули (33)-(37) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (15).

Висновок. Одержані формули (33)-(37) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі підсумовування функціональних рядів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

Література

1. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва /М.П. Ленюк, Г.І. Міхалевська. – Чернівці: Прут, 2002. – 280с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс /Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328с.
4. Ленюк М.П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів. Том VII /М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 424с.
5. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку /Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228с.

Отримано 10.09.2010 р.