

УДК. 539.3

І. Габрусєва; Б. Шелєстовський, канд.фіз.-мат.наук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВЗАЄМОДІЯ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ІЗ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИМ ШАРОМ У ВИПАДКУ ПОТЕНЦІАЛУ БАРТЄНЬЄВА-ХАЗАНОВІЧА

Резюме. Побудовано розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на попередньо напружений ізотропний шар із використанням лінеаризованої теорії пружності. Розглянуто числовий приклад побудови функції розподілу контактних напружень. Проаналізовано вплив товщини шару на розподіл контактних напружень під штампом.

Ключові слова: кільцевий штамп, попередні напруження, потенціал Бартєньєва-Хазановіча.

I. Gabruseva; B. Shelestovsky

INTERRELATION OF THE ANNULAR PUNCH WITH THE PRELIMINARY STRESSED LAYER IN THE CASE OF BARTENEV-KHAZANOVYCH POTENTIAL

The summary. The solving of tasks on the contact interaction of the annular punch and isotropic layer with residual deformations is built. Numerical example of searching components of contact strain under the punch, is consider. The effect of thickness of a layer on distributing contact stresses is analyzed.

Key words: annular punch, residual deformations, preliminary stresses, Bartenev-Khazanovych potential.

Підвищення надійності та довговічності конструкцій і механізмів є одним із найактуальніших завдань сучасного будівництва та машинобудування. Як відомо [1], в елементах конструкцій та деталях машин майже завжди наявні залишкові деформації. Природа їх виникнення може бути дуже різною: незворотні деформації (пластичність, повзучість), структурні перетворення в матеріалі, зміна агрегатного стану в окремих місцях конструкцій, механічні, хімічні та технологічні процеси тощо. Напруження, що при цьому виникають, так само як і будь-які інші, можуть викликати руйнування, прискорити певні фазові переходи, корозію. Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд дозволяє точніше оцінювати запас міцності матеріалу, отже суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів у цілому.

Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням на сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому.

Задачі про контактну взаємодію тіл із залишковими деформаціями розв'язували раніше багато вітчизняних та закордонних учених. Повний опис та огляд робіт, присвячених теорії контактної взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими штампами, можна знайти у статті [2]. Проте недостатньо вивченим залишається питання взаємодії кільцевих штампів складної

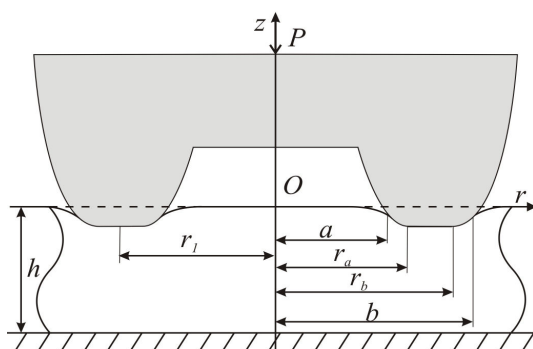


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

конфігурації з пружним півпростором та шаром, у якому наявні залишкові деформації.

Розглянемо осесиметричну задачу про тиск жорсткого кільцевого штампа на попередньо напружений ізотропний шар товщиною h , що лежить на жорсткій, абсолютно гладкій основі.

Розв'язуватимемо задачу у рамках лінеаризованої теорії пружності з використанням термінології та позначень монографії [3]. Вважатимемо, що пружні потенціали є неперервними, двічі диференційованими функціями алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [3]. Усі виклади проведено у координатах деформованого стану y_i , що пов'язані з лагранжовими координатами (які в початковому, не деформованому стані, співпадають із декартовими) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2, 3$), де λ_i – коефіцієнти видовження лінійного елемента, який направлений вздовж декартової осі x_i . Також вважатимемо, що дія штампа викликає у шарі малі збурення основного однорідного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}, \quad (1)$$

де S_0^{ii} – складові тензора початкових напружень.

Штамп втискується у шар поступально без обертання та тертя під дією постійної сили P . Його утворено обертанням навколо спільної осі двох віток парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання. Осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання, що співпадають із лінією дії сили P .

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (O, r, θ) співпадала з верхньою граничною площиною шару, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис. 1).

Граничні умови поставленої задачі такі:

$$\sigma_{rz}(r, 0) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, 0 \leq r \leq a, b \leq r; \quad (3)$$

$$u_z(r, 0) = w(r), a \leq r \leq b; \quad (4)$$

$$\sigma_{rz}(r, -h) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (5)$$

$$u_z(r, -h) = 0, 0 \leq r < \infty. \quad (6)$$

Функцію $w(r)$, що описує форму жорсткого штампа, зобразимо так:

$$w(r) = \begin{cases} w(a) + \frac{1}{2R_1} [(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2], & a \leq r < r_a; \\ w(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, & r_a \leq r < r_1; \\ w(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, & r_1 \leq r < r_b; \\ w(b) + \frac{1}{2R_2} [(r_b - r)^2 - (r_b - b)^2], & r_b \leq r \leq b; \end{cases} \quad (7)$$

де $r_1 = \frac{r_a + r_b}{2}$, R_1 та R_2 – радіуси кривини парабол, якими обмежено штамп.

Компоненти тензора контактних напружень та вектора переміщень у осесиметричному випадку за допомогою двох невідомих функцій $\varphi_1(r, z)$ та $\varphi_2(r, z)$ можна записати у вигляді [1]

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \varphi_2; \quad (8)$$

$$u_z = m_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) + s_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right];$$

$$\sigma_z = c_{33} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi_1 + s_0 \varphi_2) + z \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^3} \right]; \quad (9)$$

$$\sigma_r = c_{31} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}(\varphi_1 + s_0 \varphi_2) + z \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z^2} \right].$$

Функції $\varphi_1(r, z)$ та $\varphi_2(r, z)$ при цьому повинні задовольняти рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + n_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_i = 0; \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Співвідношення (8) – (9) записано у загальному вигляді для випадку теорії великих (скінчених) деформацій, а також різних варіантів теорії малих початкових деформацій, та враховують наявність пружного потенціалу довільної структури. Вони побудовані для стискуваних та нестискуваних тіл без будь-яких обмежень. Коефіцієнти c_{31} , c_{33} , m_1 , n_1 , s_0 та s_1 , у співвідношеннях (8) – (10), залежать від характеру пружного потенціалу, їх підбирають у кожному окремому випадку відповідно до [3].

Застосувавши до співвідношень (10) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, отримаємо

$$\left(n_i \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) \bar{\varphi}_i(\alpha, z) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

У співвідношеннях (11) $\bar{\varphi}_i(\alpha, z)$ – трансформанта Ганкеля нульового порядку

$$\bar{\varphi}_i(\alpha, z) = \int_0^\infty r \varphi_i(r, z) J_0(\alpha r) dr.$$

Функції $\bar{\varphi}_i(\alpha, z)$ ($i = 1, 2$) будемо вибирати у вигляді

$$\bar{\varphi}_i(\alpha, z) = A_i(\alpha) ch(\alpha z) + B_i(\alpha) sh(\alpha z). \quad (12)$$

Застосувавши до співвідношень (12) формулу інтегрального перетворення Ганкеля, врахувавши вирази (8) – (9), отримаємо

$$u_r(r, z) = - \int_0^\infty \alpha^2 \left\{ A_1 ch(\alpha z) + A_2 [ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + \right. \\ \left. + B_1 sh(\alpha z) + B_2 [sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \right\} J_1(\alpha r) d\alpha;$$

$$u_z(r, z) = m_1 \int_0^\infty \alpha^2 \left\{ A_1 sh(\alpha z) + A_2 [s_1 \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + \right. \\ \left. + B_1 ch(\alpha z) + B_2 [s_1 \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \right\} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (13)$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = -c_{31} \int_0^\infty \alpha^3 \left\{ A_1 sh(\alpha z) + A_2 [s_0 \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + \right. \\ \left. + B_1 ch(\alpha z) + B_2 [s_0 \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \right\} J_1(\alpha r) d\alpha;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z) = c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ & A_1 ch(\alpha z) + A_2 [s \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + \\ & + B_1 sh(\alpha z) + B_2 [s \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

На верхній граничній площині шару, при $z=0$, зі співвідношень (13) – (14), отримаємо

$$\sigma_{zz} = c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{A_1 + A_2 \cdot s\} J_0(\alpha r) d\alpha \quad (15)$$

$$\sigma_{rz} = -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{B_1 + B_2 \cdot s_0\} J_1(\alpha r) d\alpha \quad (16)$$

$$u_z = m_1 \int_0^{\infty} \alpha^2 \{B_1 + B_2 \cdot s_1\} J_0(\alpha r) d\alpha \quad (17)$$

На нижній граничній площині шару, при $z=-h$, використавши (13) – (14), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ & -A_1 sh(\alpha h) + A_2 [-s_0 \cdot sh(\alpha h) - \alpha h ch(\alpha h)] + \\ & + B_1 ch(\alpha h) + B_2 [s_0 ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)] \} J_1(\alpha r) d\alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_z = m_1 \int_0^{\infty} \alpha^2 \{ & -A_1 sh(\alpha h) + A_2 [-s_1 \cdot sh(\alpha h) - \alpha h ch(\alpha h)] + \\ & + B_1 ch(\alpha h) + B_2 [s_1 ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Вимагаючи виконання граничної умови (2), із рівності (16) отримаємо співвідношення між функціями B_1 та B_2

$$B_1 + B_2 \cdot s_0 = 0 \Rightarrow B_1 = -s_0 \cdot B_2. \quad (20)$$

Підставивши (20) у співвідношення (18) – (19) та задовольнивши граничні умови (5) – (6), отримаємо систему відносно невідомих A_1 та A_2

$$\begin{cases} A_1 sh(\alpha h) + A_2 [s_0 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] = B_2 \alpha h \cdot sh(\alpha h), \\ A_1 sh(\alpha h) + A_2 [s_1 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] = B_2 [(s_1 - s_0) ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)]. \end{cases} \quad (21)$$

Розв'язавши (21), отримаємо вирази для A_1 та A_2 через функцію B_2

$$A_1 = -\frac{\alpha h + s_0 \cdot sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h)}{sh^2(\alpha h)} \cdot B_2, \quad A_2 = \frac{sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h)}{sh^2(\alpha h)} \cdot B_2. \quad (22)$$

Із урахуванням співвідношень (20) та (22) вирази (15) та (17) набувають вигляду

$$\sigma_{zz} = c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \frac{(s - s_0) sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h) - \alpha h}{sh^2(\alpha h)} \cdot B_2 J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (23)$$

$$u_z = m_1 (s_1 - s_0) \int_0^{\infty} \alpha^2 B_2 J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (24)$$

Задовольнивши граничну умову (3), на основі (23) отримаємо

$$c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \frac{(s - s_0) sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h) - \alpha h}{sh^2(\alpha h)} \cdot B_2 J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad b \leq r \quad (25)$$

Введемо невідому функцію $x(r)$, $a \leq r \leq b$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (25) на проміжок $0 \leq r < \infty$

$$c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \frac{(s - s_0) sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h) - \alpha h}{sh^2(\alpha h)} \cdot B_2 J_0(\alpha r) d\alpha =$$

$$= x(r) \{U(r-a) - U(r-b)\}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (26)$$

де $U(r)$ – функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Врахувавши її неперервність, а також те, що вона дорівнює нулю на границі області контакту (при $r = a$ та $r = b$), представимо $x(r)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями $L_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)J_0(\gamma_n)$, де γ_n – додатні корені рівняння $J_0\left(\frac{b}{a}x\right)Y_0(x) - Y_0\left(\frac{b}{a}x\right)J_0(x) = 0$. Тобто у вигляді

$$x(r) = \sigma_{zz}(r, 0) = \sum_{n=1}^N a_n L_n(r), \quad (27)$$

де a_n – невідомі коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (26) та врахувавши представлення (27), отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \alpha^2 B_2 \frac{(s-s_0)sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h) - \alpha h}{sh^2(\alpha h)} &= \frac{1}{c_{33}} \int_a^b r \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n(r) \cdot J_0(\alpha r) dr = \\ &= \frac{1}{c_{33}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_a^b r \cdot L_n(r) J_0(\alpha r) dr. \end{aligned} \quad (28)$$

Ввівши позначення

$$\begin{aligned} \Phi_n(\alpha) &= \int_a^b r \cdot L_n(r) J_0(\alpha r) dr = \\ &= \frac{\gamma_n a^2}{\gamma_n^2 - (\alpha a)^2} \left\{ \frac{b}{a} \left[J_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right) Y_0(\gamma_n) - Y_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right) J_0(\gamma_n) \right] \times J_0(\alpha b) - \right. \\ &\quad \left. - \left[J_1(\gamma_n) Y_0(\gamma_n) - Y_1(\gamma_n) J_0(\gamma_n) \right] \times J_0(\alpha a) \right\}, \end{aligned}$$

зі співвідношень (28) отримаємо

$$\alpha^2 B_2 = \frac{sh^2(\alpha h)}{(s-s_0)sh(\alpha h) \cdot ch(\alpha h) - \alpha h} \frac{1}{c_{33}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \Phi_n(\alpha). \quad (29)$$

Підставивши співвідношення (29) у рівність (24), отримаємо

$$\begin{aligned} u_z(r) &= m_1 (s_1 - s_0) \int_0^{\infty} \alpha^2 B_2 J_0(\alpha r) d\alpha = \\ &= \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{c_{44} (1 + m_1) l_1 n_1} \cdot \int_0^{\infty} \frac{sh^2(\alpha h)}{(s-s_0)sh(\alpha h)ch(\alpha h) - \alpha h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(\alpha) \cdot J_0(\alpha r) d\alpha, \end{aligned}$$

або

$$u_z(r) = -w_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \cdot \Phi_n(\alpha) \cdot J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (30)$$

В останньому співвідношенні введено позначення

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{(s_0 - s_1) m_1}{c_{44} (1 + m_1) l_1 n_1}, \\ \Delta(\alpha) &= \frac{sh^2(\alpha h)}{(s-s_0)sh(\alpha h)ch(\alpha h) - \alpha h} = \frac{1 - 2e^{-2\alpha h} + e^{-4\alpha h}}{(s-s_0)[1 - e^{-4\alpha h}] - 4\alpha h e^{-2\alpha h}}. \end{aligned}$$

Вимагаючи виконання граничної умови (4) та підставивши у співвідношення (7) вирази для $w(a)$ і $w(b)$, отримані із (30), матимемо

$$-w_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)\} d\alpha = w_1^*(r), \quad (31)$$

$$-w_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha r) - J_0(\alpha b)\} d\alpha = w_2^*(r). \quad (32)$$

У співвідношеннях (31) та (32) використані такі позначення:

$$w_1^*(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2R_1} [(r_a - a)^2 - (r_a - r)^2], & a \leq r < r_a, \\ -\frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, & r_a \leq r < r_1, \end{cases}$$

$$w_2^*(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, & r_1 \leq r < r_b, \\ -\frac{1}{2R_2} [(r_b - b)^2 - (r_b - r)^2], & r_b \leq r \leq b. \end{cases}$$

Помноживши співвідношення (31) та (32) на $r \cdot L_q(r)$ та проінтегрувавши отримані вирази по r від a до b , матимемо

$$w_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{ \Phi_q(\alpha) - R_q^{(1)} J_0(\alpha a) - R_q^{(2)} J_0(\alpha b) \} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2R_1} \left\{ (r_a - a)^2 R_q^{(1)} - \int_a^{r_a} (r_a - r)^2 r L_q(r) dr \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2R_2} \left\{ (r_b - b)^2 R_q^{(2)} - \int_{r_b}^b (r_b - r)^2 r L_q(r) dr \right\}. \quad (33)$$

В останньому співвідношенні введено позначення

$$R_q^{(1)} = \int_a^{r_1} r \cdot L_q(r) dr, \quad R_q^{(2)} = \int_{r_1}^b r \cdot L_q(r) dr.$$

Використавши метод суперпозиції та ввівши позначення

$$a_n = \frac{1}{w_1} \left\{ \frac{1}{2R_1} a_n^{(1)} + \frac{1}{2R_2} a_n^{(2)} \right\}, \quad z_1 = \frac{1}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{1}{2R_2}, \quad (34)$$

із (33) отримаємо дві системи відносно невідомих $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$.

$$\sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \cdot K_q = (r_a - a)^2 R_q^{(1)} - \int_a^{r_a} (r_a - r)^2 r L_q(r) dr, \quad (35)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \cdot K_q = (r_b - b)^2 R_q^{(2)} - \int_{r_b}^b (r_b - r)^2 r L_q(r) dr, \quad q = \overline{1, N}, \quad (36)$$

$$K_q = \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{ \Phi_n(\alpha) - R_q^{(1)} J_0(\alpha a) - R_q^{(2)} J_0(\alpha b) \} d\alpha.$$

Величини z_i у співвідношеннях (34) знаходимо з умов рівноваги штампа

$$2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, 0) dr = -P \quad (37)$$

та рівності вертикальних переміщень верхньої граничної площини шару при $r = r_a$ та $r = r_b$

$$u_z(r_a) = u_z(r_b). \quad (38)$$

Із умови (37), співвідношень (34) та (27) отримаємо

$$\int_a^b r \cdot x(r) dr = \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b r L_n(r) dr = \frac{1}{w_1} \left\{ z_1 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} R_q + z_2 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} R_q \right\},$$

$$z_1 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} R_q + z_2 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} R_q = -\frac{P}{2\pi} \cdot w_1, \quad (39)$$

де $R_q = \int_a^b r \cdot L_q(r) dr$.

Із умови (38), співвідношень (7) та (30) отримаємо

$$w(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2 = w(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2,$$

$$z_1 (r_a - a)^2 - z_2 (r_b - b)^2 = w(a) - w(b) =$$

$$= w_1 \cdot \sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha a) - J_0(\alpha b)\} d\alpha =$$

$$= w_1 \cdot \sum_{n=1}^N a_n \cdot M_n = \sum_{n=1}^N \{z_1 a_n^{(1)} + z_2 a_n^{(2)}\} \cdot M_n = z_1 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \cdot M_n + z_2 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \cdot M_n,$$

де $M_n = \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha b) - J_0(\alpha a)\} d\alpha$.

Остаточно отримуємо рівняння відносно невідомих z_1 та z_2

$$z_1 \left\{ (r_a - a)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \cdot M_n \right\} + z_2 \left\{ -(r_b - b)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \cdot M_n \right\} = 0. \quad (40)$$

Зробивши у рівняннях (39) та (40) заміну,

$$z_i^* = z_i \cdot w_1 \cdot \frac{2\pi}{P}, \quad i = \overline{1, 2} \Rightarrow z_i = w_1 \cdot \frac{P}{2\pi} z_i^*, \quad (41)$$

приходимо до системи двох рівнянь відносно невідомих z_1^* та z_2^*

$$\begin{cases} z_1^* \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} R_q + z_2^* \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} R_q = -1, \\ z_1^* \left\{ (r_a - a)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \cdot M_n \right\} + z_2^* \left\{ -(r_b - b)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \cdot M_n \right\} = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Розв'язавши систему (42) із співвідношень (27), (34) та (41), отримуємо формулу для знаходження розподілу контактних напружень під штампом

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \frac{P}{2\pi} \left\{ z_1^* \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} L_n(r) + z_2^* \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} L_n(r) \right\}. \quad (43)$$

Розглянуто приклад, в якому досліджено вплив наявності залишкових деформацій, а також форми жорсткого штампа на розподіл контактних напружень під штампом.

На прикладі розв'язаної задачі дослідимо вплив товщини шару, а також наявності залишкових деформацій у шарі на характер розподілу контактних напружень.

Розглянуто три випадки: перший (рис. 2) – у шарі відсутні залишкові деформації, другий (рис. 3) – у шарі наявні стискуючі, а третій (рис. 4) – розтягуючі залишкові деформації для випадку пружного потенціалу Бартеньєва-Хазановіча. Параметри, що визначають конфігурацію штампа, у всіх випадках однакові: $a = 0.4$, $r_a = r_b = 0.7$, $b = 1$.

На кожному із рисунків 2–4 зображено графіки безрозмірної функції $\sigma_{zz}^* = \frac{2\pi}{P} \sigma_{zz}(r, 0)$ для таких чотирьох випадків: пунктирна крива відповідає функції розподілу контактних напружень у півпросторі, крива 1 – у шарі при $h = 0.5$, крива 2 – при $h = 1$, а крива 2 – при $h = 2$.

Висновок. У всіх розглянутих випадках, незалежно від наявності стискуючих чи розтягуючих залишкових деформацій, уже при товщині шару $h = 2$, напруження, що виникають при його контакті із жорстким кільцевим штампом, практично співпадають із напруженнями у півпросторі [4]. Отримані результати можуть бути використані при розрахунку несучої здатності основи з метою економії матеріалу, що використовується.

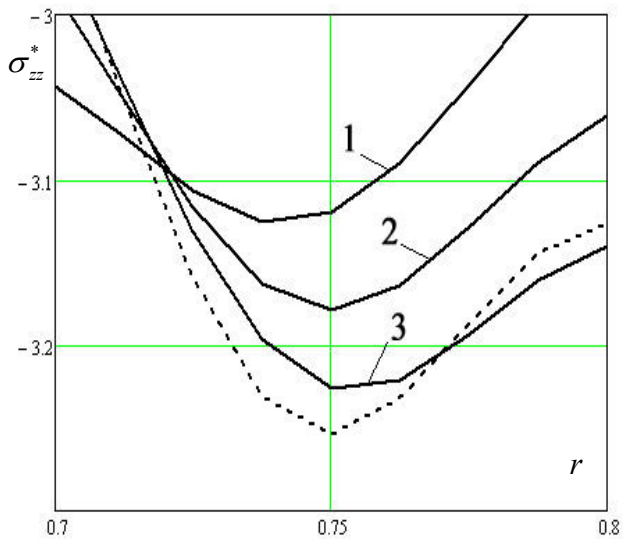


Рис. 2. Розподіл контактних напружень під штапом

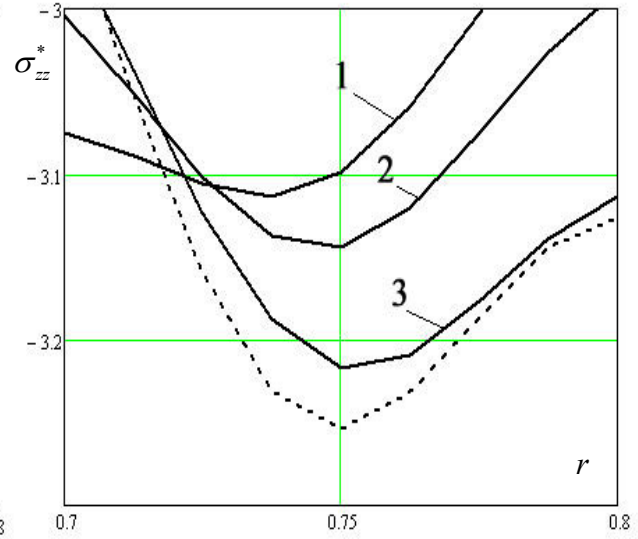


Рис. 3. Розподіл контактних напружень під штапом

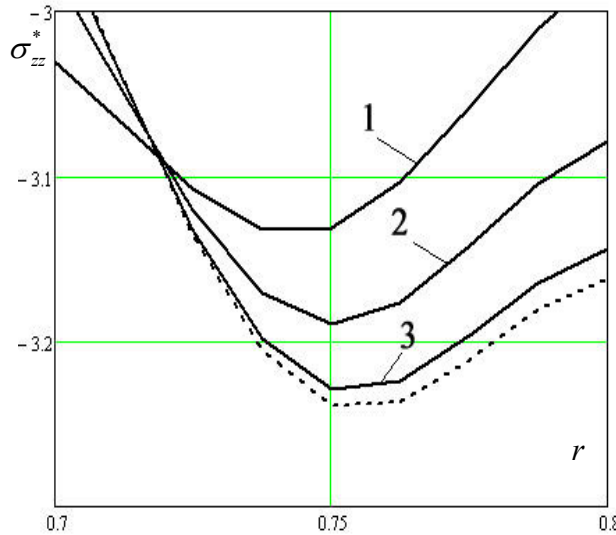


Рис. 4. Розподіл контактних напружень під штапом

Література

1. Гузь А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницкий, 2006. – 710 с.
2. Бабич С. Ю. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штапам / С. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69.
3. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / А. Н. Гузь. – Киев: Наукова думка, 1983. – 296 с.
4. Габрусева І. Ю. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором / І. Ю. Габрусева, Б. Г. Шелестовський // Вісник ТДТУ. – 2009 – №3.

Отримано 15.06.2010 р.