

УДК 539.3

А. Сяський, докт. техн. наук; Н. Шевцова, канд. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СИЛ ДЛЯ СТАТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ ЗАМКНЕНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ СТРИЖНІВ

Резюме. Розглянуто задачу розрахунку напружено-деформованого стану замкненого криволінійного пружного стрижня, який перебуває в умовах симетричного відносно осі бічного розподіленого навантаження. З використанням методу сил побудовано уточнений варіант повної системи рівнянь одновимірної теорії таких стрижнів. Розв'язок задачі реалізовано методом скінченних тригонометричних рядів.

Ключові слова: ребро жорсткості, криволінійний стрижень, внутрішні зусилля, основна схема стрижня, нормальні напруження, пружна лінія.

A. Syaski, N. Shevtsova

FORCE METHOD APPLICATION FOR STATIC CALCULATION OF CLOSED CURVED BAR

Summary. Within geometrical linear theory of deformations using of the hypotheses of normal plane section refined version of the complete system of equations of one-dimensional theory of closed thin elastic bars of rectangular cross section is constructed. They are modeled by the locked curved rods. The bars are in a plane stress created by external force applied to lateral surfaces of the bar.

Considering that the main axis of the cross section coincide with the direction of axes of natural trihedron of a fixed fiber of a bar and neglecting the deplanation of cross sections the formula to determine the internal longitudinal and lateral forces and bending moments, referred to the axis of the bar, are deduced. These formulas are equivalent to the differential equilibrium conditions of an element of bar. To determine the reactions of redundant constraint of static uncertainty closed bar in the conditions of a symmetric stress the force method is used.

Physical relations between the longitudinal forces and bending moments and certain deformations of fixed fiber of a bar are built on the basis of consideration of deformation of its infinitesimal areas.

Neglecting the influence of cross-axis forces and deformation of the cross section of the bar the conditions of compatibility between displacement points of random fiber and its deformation are recorded. These conditions allowed to express components of the displacement vector of the point of the bar through two one-valued functions, which depend on the external load.

The special cases of problems for the bar, modeled by elastic line with tension (compressive) and bending stiffness or flexible elastic line are examined. Expressing symmetrical external load by finite trigonometric sums the method of calculation of mode of deformation of the bar with smooth contour without angular points is developed.

Key words: reinforcing rib, curved bar, internal force, basic circuit of bar, normal stress, elastic curve.

Вступ. Тонкостінні пластини з технологічними чи конструктивними отворами, контури яких підсилені пружними елементами у вигляді тонких ребер жорсткості, широко використовуються в різних галузях інженерної практики. Підсилювальні ребра складаючи, як правило, порівняно невелику частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на її міцність та жорсткість. Будучи розсіювачами концентрації напружень на контурі отвору, ці ребра дозволяють передавати через них до пластинки розподілене або зосереджене навантаження.

Задача розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) пластинки з підсилювальним ребром відноситься до мішаних контактних задач теорії пружності. Її

розв'язок суттєво залежить від вибору математичної моделі, яка описує НДС ребра. Найпоширенішими в науковій літературі є три варіанти моделей замкненого підсилювального ребра:

- пружна лінія, наділена змінною або сталою жорсткістю на розтяг (стиск) [1];
- пружна лінія, наділена змінними або сталими жорсткостями на розтяг (стиск) і згин у площині підсилення [2, 3];
- криволінійний брус сталого поперечного перерізу, лінія фактичного сполучення якого з пластинкою не співпадає з його геометричною віссю [4, 5].

Використовуючи ці моделі в роботах [4-6] досліджено НДС пластинок з криволінійними отворами, контури яких підсилені тонкими пружними ребрами сталої або змінної жорсткості.

У даній роботі запропоновано уточнений варіант повної системи рівнянь одновимірної теорії замкнених криволінійних статично невизначених стрижнів для розрахунку НДС. При цьому реакції зайвих зв'язків для еквівалентного статично визначеного стрижня визначаються методом сил [7].

Постановка задачі. Розглянемо замкнений криволінійний стрижень сталого прямокутного поперечного перерізу заввишки $2h_0$, серединна площина якого віднесена до прямокутної системи координат Oxy з початком у центрі стрижня. Переріз стрижня серединною площиною визначає плоску кільцеву область, обмежену гладкими, симетричними відносно осі Ox контурами L і L_1 . Не порушуючи загальності, вважаємо, що L – зовнішній контур.

Припустимо, що до одного з контурів прикладене неперервно розподілене й зрівноважене (симетричне відносно осі Ox) зовнішнє силове навантаження середньої інтенсивності T_p , $S_{p\lambda}$ (рис. 1). Тут $2h_0T_p$, $2h_0S_{p\lambda}$ інтенсивність, віднесена до одиниці довжини бічної поверхні стрижня.

Розв'язання задачі передбачає побудову повної системи залежностей, що містить: диференціальні рівняння рівноваги (статичні рівняння); фізичні залежності; геометричні залежності (умови неперервності деформацій та зміщень).

Основні рівняння задачі. Стрижень будемо моделювати замкненим криволінійним брусом, який перебуває в умовах плоского напруженого стану. Вважаємо, що головні осі поперечного перерізу за напрямками співпадають з осями натурального тригранника осьового волокна стрижня. Для визначення внутрішніх силових факторів N , Q , L_b , які виникають у довільному поперечному перерізі та віднесені до осі стрижня L_0 , розглянемо рівновагу його частини між нормальними перерізами $\theta = 0$ і $\theta = \theta$ (рис. 2). На рисунку введено такі позначення: N_0 , Q_0 , L_b^0 ; N , Q , L_b – поздовжна і поперечна сили та згинальний момент у перерізах $\theta = 0$ і $\theta = \theta$ відповідно; θ – кут нахилу розглядуваного поперечного перерізу стрижня до осі Ox ; s , s_1 – дуга на тому контурі, до якого прикладене зовнішнє навантаження.

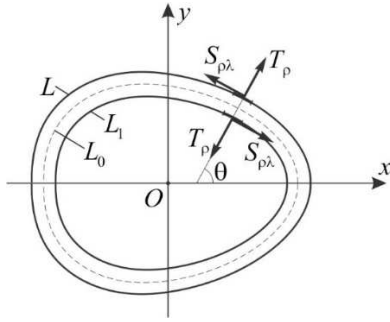


Рисунок 1. Схема навантаження стрижня

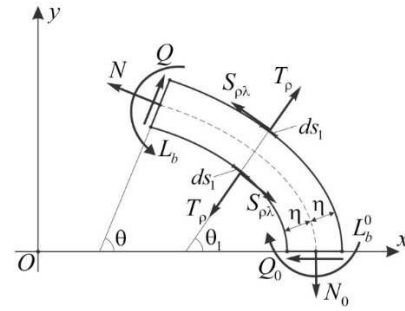


Рисунок 2. Рівновага виділеної частини стрижня

Figure 1. Loading system of bar

Figure 2. Equilibrium of separated part of bar

Записуючи умови рівноваги плоскої системи сил для виділеної частини стрижня, знаходимо

$$N - iQ = N_0 e^{-i\theta} + i \int_0^s (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{i(\theta_1 - \theta)} ds_1;$$

$$L_b = L_b^0 + N_0 (x_0 \mp \eta - x \pm \eta \cos \theta) + \int_0^s [x \mp \eta \cos \theta - x_1] [T_\rho(\theta_1) \sin \theta_1 + S_{\rho\lambda}(\theta_1) \cos \theta_1] ds_1 -$$

$$- \int_0^s [y \mp \eta \sin \theta - y_1] [T_\rho(\theta_1) \cos \theta_1 - S_{\rho\lambda}(\theta_1) \sin \theta_1] ds_1, \quad (1)$$

де (x, y) – координати точки перетину перерізу $\theta = \theta$ з контуром $L(L_1)$; $(x_0, 0)$ – те ж саме для перерізу $\theta = 0$; (x_1, y_1) – те ж саме для перерізу $\theta = \theta_1$; b_0 – ширина стрижня; $\eta = b_0 / 2$ – відстань від центру ваги перерізу до відповідної точки контуру $L(L_1)$; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Тут i надалі верхній знак відповідає навантаженню зовнішнього контуру, а нижній – внутрішнього.

Введенням заміни

$$f_1 + if_2 = \pm i \int_0^s (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta_1} ds_1 \quad (2)$$

співвідношення (1) можна перетворити до вигляду

$$N = N_0 \cos \theta + f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta; \quad Q = N_0 \sin \theta + f_1 \sin \theta - f_2 \cos \theta;$$

$$L_b = L_b^0 + (x_0 \mp \eta - x) N_0 \pm \eta N - \int_0^s (f_1 dx_1 + f_2 dy_1). \quad (3)$$

Функції $f_1(s)$, $-f_2(s)$ визначають проекції зовнішнього силового навантаження, прикладеного до ділянки $[0; s]$, на координатні осі Oy і Ox відповідно. У випадку зрівноваженого навантаження ці функції однозначні.

Залежності (1), (3) еквівалентні диференціальним рівнянням рівноваги елемента стрижня. У них враховано, що при симетричному відносно осі Ox зовнішньому навантаженні $Q_0 = 0$.

Для замкненого стрижня задача встановлення внутрішніх силових факторів N , Q , L_b статично невизначена, тому величини N_0 і L_b^0 будемо визначати методом сил [7]. З цією метою обираємо основну розрахункову схему стрижня (статично визначену та геометрично незмінну) усуненням зайвих зв'язків і заміною їх невідомими реакціями

N_0, L_b^0 (рис. 3).

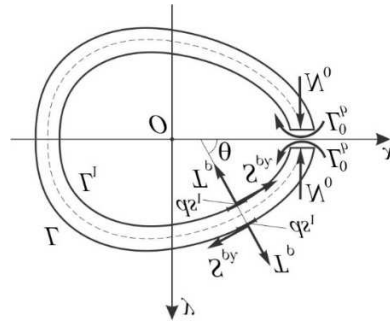


Рисунок 3. Основна розрахункова схема стрижня

Figure 3. Basic loading system for bar

Розглянемо одночасну дію на основну схему стрижня зовнішнього навантаження і невідомих реакцій. Почергово завантажуючи основну схему одиничною силою $N_0 = 1$, одиничною парою сил з моментом $L_0 = 1$ та зовнішнім навантаженням, записуємо вирази для відповідних внутрішніх силових факторів у довільному перерізі

$$\bar{L}_1 = 1; \quad \bar{N}_1 = 0; \quad \bar{Q}_1 = 0 \quad \text{при } L_b^0 = 1; \quad (4)$$

$$\bar{L}_2 = (x_0 \mp \eta - x \pm \eta \cos \theta); \quad \bar{N}_2 = \cos \theta; \quad \bar{Q}_2 = \sin \theta \quad \text{при } N_0 = 1; \quad (5)$$

$$\bar{L}_p = \pm \eta \bar{N}_p - \int_0^s (f_1 dx_1 + f_2 dy_1); \quad \bar{N}_p = f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta; \quad \bar{Q}_p = f_1 \sin \theta - f_2 \cos \theta. \quad (6)$$

Система канонічних рівнянь методу сил [7] для визначення сталих N_0, L_b^0 має вигляд

$$\delta_{11} L_b^0 + \delta_{12} N_0 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{21} L_b^0 + \delta_{22} N_0 + \Delta_{2p} = 0, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \oint_{\Gamma} L_1 \left(\frac{L_p}{EJ} + \frac{N_p}{EFR} \right) ds_0 + \oint_{\Gamma} N_1 \left(\frac{N_p}{EF} + \frac{L_p}{EFR} \right) ds_0 + \mu \oint_{\Gamma} \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_p}{GF} ds_0; \\ \delta_{ij} &= \oint_{\Gamma} L_i \left(\frac{L_j}{EJ} + \frac{N_j}{EFR} \right) ds_0 + \oint_{\Gamma} N_i \left(\frac{N_j}{EF} + \frac{L_j}{EFR} \right) ds_0 + \mu \oint_{\Gamma} \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} ds_0; \end{aligned} \quad (8)$$

$i, j = 1, 2.$

EF – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); EJ – жорсткість на згин; GF – жорсткість на зсув; $ds_0 = R d\theta$ – елемент дуги осі стрижня; μ – стала (для прямокутного перерізу $\mu = 1.2$); R – радіус кривини осі стрижня; E, G – модулі матеріалу стрижня на розтяг (стиск) і зсув.

З урахуванням співвідношень (4)-(6) залежності (8) можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta_{2\sigma} &= \int_{L_0}^L (x_0 \mp \eta - x \pm \eta \cos \theta) \left(\frac{L_\sigma}{EJ} + \frac{N_\sigma}{EFR} \right) dx_0 + \int_{L_0}^L \cos \theta \left(\frac{N_\sigma}{EF} + \frac{L_\sigma}{EFR} \right) dx_0 + \mu \int_{L_0}^L \sin \theta \frac{Q_\sigma}{GF} dx_0; \\ \Delta_{1\sigma} &= \int_{L_0}^L \left(\frac{L_\sigma}{EJ} + \frac{N_\sigma}{EFR} \right) dx_0; \quad \delta_{11} = \frac{s_0}{EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_{L_0}^L \left(\frac{x_0 \mp \eta - x \pm \eta \cos \theta}{EJ} + \frac{\cos \theta}{EFR} \right) dx_0; \\ \delta_{22} &= \int_{L_0}^L \left[\frac{(x_0 \mp \eta - x \pm \eta \cos \theta)^2}{EJ} + \frac{2(x_0 \mp \eta - x \pm \eta \cos \theta) \cos \theta}{EFR} + \frac{\cos^2 \theta}{EF} \right] dx_0 + \mu \int_{L_0}^L \frac{\sin^2 \theta}{FG} dx_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо розв'язок системи (7) стане відомим, то величини N , Q , L_b в перерізах стрижня, як функції зовнішнього навантаження, визначаються зі співвідношень (1) або (3).

Компоненти тензора деформації довільного волокна стрижня, радіус кривини якого ρ з урахуванням гіпотези плоских перерізів на підставі розгляду деформації елемента стрижня з довжиною осі ds_0 відповідно до [8] визначаються за формулами

$$\frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{RL_b}{g_2} + \frac{N}{g_4}; \quad \varepsilon_\lambda^{(c)} = \frac{N}{g_4} + \frac{\rho - r_0}{\rho} \frac{RL_b}{g_2}, \quad (10)$$

які еквівалентні фізичним співвідношенням Кірхгофа [5]. Тут $g_4 = EF$; $g_2 = EJ$; $\varepsilon_\lambda^{(c)}$ – відносне видовження волокна з радіусом кривини ρ ; θ_b – кут повороту нормального перерізу стрижня; r_0 – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна стрижня.

Зауважимо, що при виведенні формул (10) не враховано вплив поперечних сил.

На підставі (3) величини $\frac{d\theta_b}{d\theta}$ і $\varepsilon_\lambda^{(c)}$ можна виразити через функції $f_1(s)$, $f_2(s)$.

За малих деформацій стрижня та припущення про те, що кожне його волокно перебуває в стані простого розтягу (стиску), нормальні напруження σ визначаються за законом Гука в найпростішій одновимірній формі

$$\sigma = E\varepsilon_\lambda^{(c)}. \quad (11)$$

У разі врахування поперечних сил дотичні напруження можна визначити за формулою Журавського [8].

Умови сумісності відносної деформації довільного волокна стрижня, яке еквідистантне його осі, та зміщення відповідної точки цього волокна запишемо у векторному вигляді [9]

$$\frac{d\vec{\theta}_b}{ds} = \vec{\kappa}; \quad \frac{d\vec{u}}{ds} + [\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}_b] - \vec{\varepsilon}_\lambda^{(c)} = \vec{0}, \quad (12)$$

де $\vec{\theta}_b = \theta_b \vec{k}$; $\vec{\varepsilon}_\lambda^{(c)} = \varepsilon_\lambda^{(c)} \vec{\tau}$; $\vec{\kappa} = \frac{d\theta_b}{ds} \vec{k}$; $\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j})$ – радіус-вектор точки довільного волокна стрижня; $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ – одиничний вектор дотичної в цій точці; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – базисні вектори нерухомої системи відліку; $u = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$; u_1 , u_2 – проекції вектора зміщення точки на координатні осі Ox , Oy відповідно; κ – приріст кривини розглядуваного волокна внаслідок деформації.

Інтегруючи другу залежність (12) з урахуванням першої, знаходимо після певних перетворень

$$\begin{aligned}
u_1(s) &= u_1(0) - \int_0^s (y(s) - y(t)) d\theta_b + \int_0^s \varepsilon_\lambda^{(c)}(t) dx; \\
u_2(s) &= \int_0^s (x(s) - x(t)) d\theta_b + \int_0^s \varepsilon_\lambda^{(c)}(t) dy.
\end{aligned} \tag{13}$$

Тут $u_1(0)$ – зміщення стрижня як жорсткого цілого в напрямку осі Ox . Для його визначення необхідно зафіксувати одну точку стрижня.

Співвідношення (3), (10), (13) визначають повну систему рівнянь одновимірної теорії замкнених криволінійних стрижнів при їх симетричній деформації.

Розглянемо часткові випадки цієї системи:

- при $\eta = 0$ криволінійний стрижень вироджується в пружну лінію, наділену жорсткостями на розтяг (стиск) і згин в осьовій площині [2, 3];
- якщо в (3), (10), (13) прийняти $\eta = 0$; $g_2 = 0$, то отримаємо відповідну систему рівнянь для стрижня, що моделюється гнучкою пружною лінією [1].

Методика розрахунку НДС стрижня. Припустимо, що контур $L(L_1)$ визначається функцією

$$x + iy = \omega(\sigma) = R_0^* \left(\sigma + \frac{\varepsilon_1}{\sigma} + \frac{\varepsilon_2}{\sigma^2} + \dots + \frac{\varepsilon_N}{\sigma^N} \right) \tag{14}$$

де $\sigma = e^{i\lambda}$; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ – дійсні сталі, причому $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + \dots + N|\varepsilon_N| < 1$; $\lambda \in [0; 2\pi]$; R_0^* – характерний розмір контуру $L(L_1)$.

Функція $\omega(\sigma)$ здійснює однозначне відображення точок кола одиничного радіуса на контур $L(L_1)$.

Використовуючи властивості конформних відображень [10]

$$e^{i\theta} = e^{i\lambda} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; \quad ds = \rho d\theta = |\omega'(\sigma)| d\lambda, \tag{15}$$

визначаємо на контурі $L(L_1)$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 1 + \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[1 + \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha^2 + \beta^2} \right]. \tag{16}$$

Тут $\alpha + i\beta = \omega'(\sigma)$.

Розглянемо функції

$$T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma). \tag{17}$$

З урахуванням симетричності контуру $L(L_1)$ і зовнішнього навантаження відносно осі Ox , їх можна подати такими тригонометричними сумами:

$$T_\rho^* = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N_0} A_n \cos n\lambda; \quad S_{\rho\lambda}^* = \sum_{n=1}^{N_0} B_n \sin n\lambda. \tag{18}$$

При зрівноваженому навантаженні на стрижень виконується умова $A_1 = B_1$.

На підставі співвідношень (15) з урахуванням (18) із формули (2) визначаємо

$$\begin{aligned}
 f_1'(\lambda) = & -\frac{A_0}{2} \sin \lambda - \frac{1}{2}(A_1 + B_1) \sin 2\lambda - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n + B_n) \sin(n+1)\lambda + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n - B_n) \sin(n-1)\lambda; \quad f_2'(\lambda) = \frac{A_0}{2} \cos \lambda + \frac{1}{2}(A_1 + B_1) \cos 2\lambda + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n + B_n) \cos(n+1)\lambda + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n - B_n) \cos(n-1)\lambda.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Інтегруючи залежності (19) по λ , знаходимо

$$\begin{aligned}
 f_1(\lambda) = & \frac{A_0}{2} \cos \lambda + \frac{1}{4}(A_1 + B_1) \cos 2\lambda + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n + B_n) \frac{\cos(n+1)\lambda}{n+1} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n - B_n) \frac{\cos(n-1)\lambda}{n-1} + f_1^0; \quad f_2(\lambda) = \frac{A_0}{2} \sin \lambda + \frac{1}{4}(A_1 + B_1) \sin 2\lambda + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n + B_n) \frac{\sin(n+1)\lambda}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_0} (A_n - B_n) \frac{\sin(n-1)\lambda}{n-1},
 \end{aligned} \tag{20}$$

де f_1^0 – стала інтегрування.

Підставляючи (20) у формули (3), отримаємо вирази для величин N , Q , L_b , як функції змінної λ та сталих L_b^0 , N_0 . Якщо ці функції стануть відомі, то за формулами (9) можна обчислити коефіцієнти системи (7), з якої визначити сталі L_b^0 , N_0 , а за формулами (3), (10), (11) і (13) – компоненти НДС стрижня.

Висновки. З урахуванням (3), (10) залежності (13) можна виразити інтегральними співвідношеннями від функцій $f_1(s)$, $f_2(s)$. Аналогічними співвідношеннями з ядрами Гільберта або логарифмічними ядрами виражаються компоненти вектора зміщення контурних точок у нескінченній пластинці з криволінійним отвором [10].

Використання цих співвідношень дає змогу сформулювати задачу про контактну взаємодію замкненого криволінійного стрижня з контуром відповідного отвору в ізотропній чи ортотропній пластинці у вигляді системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно функцій $f_1(s)$, $f_2(s)$. Методика розв'язання таких систем наведена в роботі [10].

Conclusions. In consideration of (3), (10) the dependencies (13) as integral relations of functions $f_1(s)$, $f_2(s)$ can be expressed. An analogical relations with Hilbert kernels or logarithmic kernels of the components of the displacement vector of contour points in an infinite plate with curved hole are expressed [10].

Application of these relations to the problem of contact interaction of closed curved bar with contour corresponding hole in isotropic or orthotropic plate through the system of two singular integral equations for functions $f_1(s)$, $f_2(s)$ makes it possible to formulate. Methodology of solving such systems is given in [10].

Список використаної літератури

1. Савин, Г.Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости [Текст] / Г.Н. Савин, Н.П. Флейшман. – К.: Наукова думка, 1964. – 384 с.
2. Шереметьев, М.П. Пластинки с подкрепленным краем [Текст] / М.П. Шереметьев. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с.

3. Пелех, Б.Л. Концентрация напряжений возле отверстий в анизотропных оболочках, податливых на сдвиг [Текст] / Б.Л. Пелех, А.А. Сяський. – К.: Наукова думка, 1975. – 198 с.
4. Мартынович, Т.Л. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки [Текст] / Т.Л. Мартынович, М.К. Зварич // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, Вып. 9. – С. 46 – 52.
5. Божидарнік, В.В. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервноармованих композитів [Текст] / В.В. Божидарнік, О.Є. Андрейків, Г.Т. Сулим. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – Т. 2. – 422 с.
6. Мартынович, Т.Л. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами [Текст] / Т.Л. Мартынович, В.Е. Юринец. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
7. Иванов, Г.М. Статика сооружений [Текст] / Г.М. Иванов, Р.И. Вейц. – Л.: Стройиздат, 1968. – 206 с.
8. Писаренко, Г.С. Опір матеріалів [Текст] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
9. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем [Текст] / А.П. Филин, О.Д. Тананайко, И.М. Чернева, М.А. Шварц. – Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
10. Сяський, А.О. Математичне моделювання плоских контактних задач: навчальний посібник [Текст] / А.О. Сяський. – Рівне: Ред. – видав. відділ РДГУ, 2014. – 112 с.

Отримано 01.08.2015