

Сулим Г. Т. Двобічний згин пластини рейсснера зі співвісними наскрізними щілиною та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / Георгій Теодорович Сулим, Віктор Констянтинович Опанасович, Ігор Миколайович Яцик // Вісник ТНТУ, — Т. : ТНТУ, 2015. — Том 79. — № 3. — С. 7-18. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Г. Сулим, докт. фіз.-мат. наук; В. Опанасович, докт. фіз.-мат. наук;
І. Яцик

Львівський національний університет імені Івана Франка

ДВОБІЧНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА ЗІ СПІВВІСНИМИ НАСКРІЗНИМИ ЩІЛИНОЮ ТА ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Резюме. Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з прямолінійними співвісними наскрізними щілиною та тріщиною за двобічного згину розподіленими моментами на нескінченності. Береги дефектів до прикладання зовнішнього навантаження були вільними від нього, а під дією згинальних моментів на нескінченності береги тріщини прийшли у гладкий контакт уздовж області сталої ширини поблизу однієї з основ пластини. На основі методів теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та теорії згину пластин за Рейсснером розв'язок задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на тріщині, так і на щілині, яку розв'язано числово за допомогою методу механічних квадратур. Побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів за різних параметрів задачі.

Ключові слова: пластини Рейсснера, щілина, тріщина, двобічний згин, контакт берегів тріщини, плоский напружений стан, комплексні потенціали, контактні зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

H. Sulym, V. Opanasovych, I. Yatsyk

REISSNER'S PLATE BILATERAL BENDING CONTAINING COAXIAL THROUGH-THE-THICKNESS SLIT AND CRACK TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF ITS FACES

Summary. Construction of the cracked plate bending problems solutions forms an important and actual in terms of theory development and practical applications scientific direction. They make it possible to determine stress and displacement distribution near the defects tips, as well as make recommendations for selecting optimal geometrical, physical and mechanical characteristics of plates depending on operating conditions in order to prevent destruction of engineering constructions. In this paper the stress-strain state of boundless isotropic plate with coaxial through-the-thickness slit and crack, the faces of which are free from the external loading is investigated. The plate is under the action of the uniformly distributed in a remote part bending moments, which vectors are parallel and perpendicular to the axe of the defects. It is assumed that under external loading the crack faces come in a smooth contact on all crack length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the crack faces contact the solution of problem is presented in the form of two related problems solutions: the theory of elasticity plane problem and the problem of plates bending based on the equations of Reissner theory. On the basis of complex variable function theory methods and complex potentials the system of singular integral equations is obtained which is reduced by the mechanical quadratures method to the infinite system of linear algebraic equations. This system is solved numerically by the method of reduction using Gauss with a choice of main entry. The numerical analysis of problem at some parameters values is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of crack, force and moment intensity factors are constructed. In particular cases known in the scientific literature results for Reissner's plate bending problems with one crack considering the contact zone width of its faces, with two coaxial slits as well as for appropriate problems solved using equations of the classical theory of plates bending are obtained.

Key words: Reissner's plate, slit, crack, bilateral bending, contact of crack faces, plane stress, complex potentials, contact forces, intensity factors.

Вступ. Як конструктивний елемент пластини широко застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Їхній запас міцності істотно залежить від наявності в них тріщиноподібних дефектів, які є потужними концентраторами напружень та істотно знижують допустиме навантаження, що може бути прикладено до пластини. Щоби визначити граничне навантаження, а також ресурс експлуатації пластинчастих елементів, важливо опрацювати методи оцінювання впливу таких дефектів на перерозподіл полів напружень і деформацій.

Найчастіше пластини перебувають під дією згинального навантаження. Тому вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів не втрачає своєї актуальності. З дослідженнями задач згину пластин з тріщинами та пошуком ефективних методів їхнього розв'язування можна ознайомитися в монографіях [1–3] і статтях [4–7], де контакт берегів тріщин не враховували, вважаючи тріщину щілиною із достатньо широко розведеними берегами, щоб вони не дотикалися. Однак зрозуміло, що у більшості випадків, незважаючи на істотне ускладнення формулювання задач згину пластини із тріщинами та розв'язування відповідних математичних задач, це все ж треба робити. У працях [8–21] вивчені різноманітні задачі, де у різний спосіб враховано контакт берегів тріщиноподібних дефектів за згину пластини, проте відсутні дослідження, пов'язані зі згином пластини із щілиною, береги якої не можуть контактувати, і тріщиною, береги якої контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Рейсснера. Зазначимо, що в роботі [22] досліджено однобічний згин пластини Кірхгофа розподіленими згинальними моментами на нескінченності за наявності тріщини та щілини, при цьому вектори розподілених моментів паралельні до тріщини, береги якої відповідно до найпростішої моделі, яка все ж враховує контакт берегів, приходять у гладкий контакт уздовж лінії поблизу однієї з основ пластини, при довільному розміщенні щілини.

Мета роботи – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з прямолінійними співвісними наскрізними щілиною та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. Обчислення здійснені для вибраних значень параметрів задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ зі співвісними щілиною ($k=1$) та тріщиною завдовжки $2l_k$, $k=1,2$. Відстань між внутрішніми вершинами щілини та тріщини дорівнює $2c$. Вважаємо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт поблизу верхньої основи пластини уздовж усієї довжини тріщини, причому ширина області контакту є сталою та дорівнює h_1 .

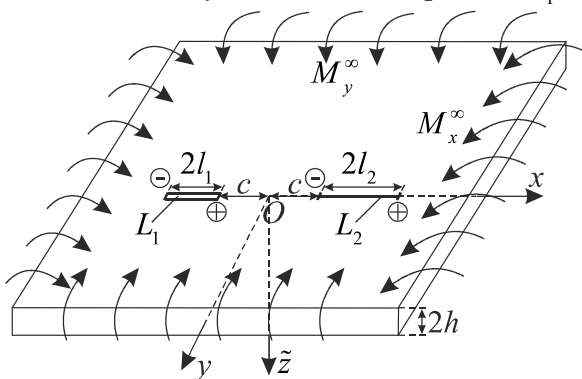


Рисунок 1. Схема навантаження пластини та

розміщення щілини та тріщини

Виберемо декартову систему

Figure 1. Plate loading and placing slit and crack scheme

координат $Oxy\tilde{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині

пластини, початок O якої розташований посередині відрізка, що з'єднує геометричні центри щілини та тріщини; вісь Ox спрямовано вздовж них. Відрізки $x \in [-2l_1 - c, -c]$, $x \in [c, c + 2l_2]$ дійсної осі Ox позначимо відповідно через L_1 , L_2 ($L = L_1 \cup L_2$). Береги щілини та тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Пластина перебуває під дією розподіленого згинального навантаження на нескінченності M_x^∞ і M_y^∞ (рис. 1).

Надалі дотримуватимемося таких позначень: μ – модуль зсуву; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

З урахуванням контакту берегів тріщини розв'язування задачі розбиваємо на дві взаємозв'язані задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно з формулюванням задачі на берегах щілини та тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -(k-1)N/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad k=1,2; \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = (k-1)\beta h N, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad x \in L_k, \quad k=1,2; \quad (2)$$

$$\partial_x [v_p] - \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad x \in L_2, \quad (3)$$

де σ_{xy} , σ_{yy} та v_p – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь Oy у плоскій задачі; N – контактне зусилля між берегами тріщини, причому $N > 0$; φ_y – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединній площини пластини у задачі згину [23]; M_y – згинальний момент; Q_y і H_{xy} – поперечна сила і крутний момент відповідно; $\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; символами «+» і «-» позначені відповідно граничні значення функції при прямуванні точки площини при $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = \{1 + (1 - \gamma)^2\}/2$, $\beta = 1 - \gamma/3$, а $\gamma = h_1/h$ – зведена ширина області контакту [8].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При дослідженні плоского напруженого стану пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_p(z)$ і $\Omega_p(z)$, які зникають на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини скористаємося залежностями [24]

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_p(z) + \Omega_p(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_p'(z)}, \\ 2\mu\partial_x(u_p + iv_p) &= \kappa\Phi_p(z) - \Omega_p(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_p'(z)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Крайові умови (1) подамо у вигляді

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L,$$

звідки після врахування (4) отримаємо

$$\{\Phi_p(x) - \Omega_p(x)\}^+ - \{\Phi_p(x) - \Omega_p(x)\}^- = 0, \quad x \in L. \quad (5)$$

Розв'язком задачі лінійного спряження (5) є

$$\Phi_p(z) = \Omega_p(z). \quad (6)$$

Беручи до уваги (4) і (6), з крайової умови

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = -(k-1)N/h, \quad x \in L_k,$$

одержимо

$$(k-1)N = -2h\{\Phi_p^+(x) + \Phi_p^-(x)\}, \quad x \in L_k. \quad (7)$$

Комплексний потенціал $\Phi_p(z)$ візьмемо у вигляді [25]:

$$\Phi_p(z) = 1/(2\pi i) \int_L \tilde{g}'(t)/(t-z) dt, \quad (8)$$

де

$$\tilde{g}'_1(x) + i\tilde{g}'_2(x) = \tilde{g}'(x) = 2\mu \partial_x [u_p + iv_p]/(1+\kappa), \quad x \in L. \quad (9)$$

Застосування формули Сохоцького-Племелі до (8) на основі залежності (7) дає

$$-(k-1)N/(2h) = 1/\pi \int_L \tilde{g}'_2(t)/(t-x) dt, \quad x \in L_k; \quad (10)$$

$$\int_L \tilde{g}'_1(t)/(t-x) dt = 0, \quad x \in L. \quad (11)$$

Розв'язком сингулярного інтегрального рівняння (11) за умови $\int_{L_k} \tilde{g}'_1(t) dt = 0$ є

$$\tilde{g}'_1(t) = 0, \quad t \in L.$$

Для побудови розв'язку задачі згину введемо у системі координат Oxy комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ та функцію $\Omega_*(z, \bar{z})$, для яких справджуються залежності [26]

$$M_y + iH_{xy} = m\{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\} + n\{z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\} + \rho\{2\overline{\Phi''(z)} + i\partial_{zz}^2 \Omega_*(z, \bar{z})\},$$

$$Q_x - iQ_y = -2D\{2\Phi'(z) - i\partial_z \Omega_*(z, \bar{z})\}, \quad (12)$$

де $m = -D(1+\nu)$, $n = D(1-\nu)$, $\rho = 4D/k_*^2$, $D = 2Eh^3/\{3(1-\nu^2)\}$, $k_*^2 = 5/(2h^2)$, $\partial_z = 0,5(\partial_x - i\partial_y)$; функція $\Omega_*(z, \bar{z})$ – розв'язок рівняння Гельмгольца $4\partial_{zz}^2 \Omega_*(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega_*(z, \bar{z})$; $\partial_{\bar{z}} = 0,5(\partial_x + i\partial_y) = \overline{\partial_z}$.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ запишемо у вигляді [2]:

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + (M_x^\infty + M_y^\infty)/(4m), \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + (M_y^\infty - M_x^\infty)/(2n). \quad (13)$$

Тут $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – голоморфні функції, які зникають на нескінченності.

На основі результатів робіт [27, 28] функції $\Phi_*(z)$ і $\Omega_*(z, \bar{z})$ шукатимемо у вигляді

$$\Phi_*(z) = 1/(2\pi i) \int_L g(t)/(t-z) dt; \quad (14)$$

$$\Omega_*(z, \bar{z}) = k_*/\pi \operatorname{Im} \left\{ \int_L r K_1(k_* r)/(t-z) \omega(t) dt \right\}, \quad (15)$$

де $r = |t-z|$; $g(t) = g_1(t) + i g_2(t)$, $\omega(t) = \omega_1(t) + i \omega_2(t)$; $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – шукані дійсні функції; $K_j(x)$ – функції Макдональда j -го порядку, властивості яких описано, наприклад, у [29].

Похідні від функції $\Omega_*(z, \bar{z})$, які входять у вирази (12), після підстановки у них (15) запишемо у вигляді

$$\partial_z \Omega_*(z, \bar{z}) = \Omega_1(z, \bar{z}) - i/(2\pi) \int_L \omega(t)/(t-z)^2 dt; \quad (16)$$

$$\partial_{zz}^2 \Omega_*(z, \bar{z}) = \Omega_2(z, \bar{z}) - i/\pi \int_L \omega(t)/(t-z)^3 dt, \quad (17)$$

причому функції $\Omega_1(z, \bar{z})$ і $\Omega_2(z, \bar{z})$ визначаються відповідно за формулами

$$\Omega_1(z, \bar{z}) = ik_*^2/(2\pi) \int_L \left\{ r^2 \tilde{K}'_1(k_* r)/(t-z)^2 \omega(t) + (t-\bar{z}) K_0(k_* r)/r^2 \operatorname{Re}\{(t-\bar{z})\omega(t)\} \right\} dt; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(z, \bar{z}) = k_*^2/(2\pi) \left\{ 1/i \int_L r^2 \tilde{K}_2(k_* r)/(t-z)^3 \omega(t) dt - k_*/2 \operatorname{Im} \left\{ \int_L r K_1(k_* r)/(t-z) \omega(t) dt \right\} + \right. \\ \left. + k_* \int_L (t-x)/r^3 K_1(k_* r)(t-\bar{z}) \operatorname{Im}\{(t-\bar{z})\omega(t)\} dt \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

де $\tilde{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x$, $\tilde{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2$.

Врахувавши формули (13)–(19) та ввівши до розгляду функцію

$$V(z) = q\bar{\Phi}_*(z) + z\bar{\Phi}'_*(z) + \bar{\Psi}_*(z) + m_1/(k_*^2\pi i) \int_L \overline{\delta(t)}/(t-z)^3 dt, \quad (20)$$

на основі (12) можемо записати

$$M_y + iH_{xy} = n \left\{ q\Phi_*(z) + V(\bar{z}) + (z-\bar{z})\overline{\Phi'_*(z)} + im_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_2(z, \bar{z})} \right\} + M_y^\infty; \quad (21)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ P(z) + i\Omega_1(z, \bar{z}) \}, \quad (22)$$

де $q = m/n$, $m_1 = 4D/n$; $P(z) = -1/(2\pi i) \int_L \delta(t)/(t-z)^2 dt$; $\delta(t) \equiv \delta_1(t) + i\delta_2(t) = -2g(t) + i\omega(t)$, $\delta_1(t)$ і $\delta_2(t)$ – дійсні функції.

Скориставшись виразами (15), (18), (19) і властивостями функцій Макдональда, переконуємося, що функція $\Omega_1(z, \bar{z})$ при переході через вісь Ox неперервна, а для функцій $\Omega_*(z, \bar{z})$ і $\Omega_2(z, \bar{z})$ виконуються залежності

$$\Omega_*^+(x, x) - \Omega_*^-(x, x) = \begin{cases} 2\omega_1(x), & x \in L, \\ 0, & x \notin L, \end{cases}$$

$$\overline{\Omega_2^+(x, x)} - \overline{\Omega_2^-(x, x)} = \begin{cases} -k_*^2 \omega_1(x)/2, & x \in L, \\ 0, & x \notin L. \end{cases} \quad (23)$$

Надалі вважатимемо також, що виконуються умови

$$\delta(-c - 2l_1) = \delta(-c) = \delta(c) = \delta(c + 2l_2) = 0. \quad (24)$$

Тоді вираз для функції $P(z)$ можна подати так:

$$P(z) = -1/(2\pi i) \int_L \delta'(t)/(t-z) dt,$$

звідки, скориставшись формулами Сохоцького-Племелі [30], можемо записати

$$P^+(x) - P^-(x) = -\delta'(x), \quad x \in L. \quad (25)$$

Задовольнивши за допомогою формули (22) третю крайову умову (2) та врахувавши співвідношення (25), отримаємо

$$\delta_2'(x) = 0. \quad (26)$$

Якщо взяти до відома (24), то з (26) випливає, що $\delta_2(x) = 0$, а тому виконуватимуться залежності

$$\omega_1(x) = 2g_2(x), \quad \omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x). \quad (27)$$

Врахування (21) і (23) дає можливість з першої і другої крайових умов (2) одержати задачу лінійного спряження для знаходження функції $V(z)$:

$$V^+(x) - V^-(x) = \begin{cases} qg_1(x) - im_2g_2(x), & x \in L, \\ 0, & x \notin L, \end{cases} \quad m_2 = \frac{5+\nu}{1-\nu}, \quad (28)$$

розв'язок якої

$$V(z) = 1/(2\pi i) \int_L \{qg_1(t) - im_2g_2(t)\}/(t-z) dt. \quad (29)$$

Якщо скористатися залежністю

$$\partial_x(\varphi_x + i\varphi_y) = -\left\{ \Phi_*(z) + \frac{m_1}{2} \overline{\Phi_*(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_*'(z)} + V(\bar{z}) + im_1 \left(\frac{\overline{\Omega_2(z, \bar{z})}}{k_*^2} + \frac{\Omega_*(z, \bar{z})}{4} \right) \right\},$$

то матимемо

$$\partial_x[\varphi_x + i\varphi_y] = -m_1g(x), \quad x \in L, \quad (30)$$

звідки

$$\partial_x[\varphi_x] = -m_1g_1(x), \quad \partial_x[\varphi_y] = -m_1g_2(x). \quad (31)$$

Врахування (9) і (31) дає на основі другої крайової умови (3) вираз

$$\tilde{g}_2'(t) = \rho_1g_2(t), \quad t \in L_2. \quad (32)$$

Тому (10) вдається переписати так:

$$(k-1)N(x) = -\frac{2h}{\pi} \left\{ \int_{L_1} \tilde{g}'_2(t)/(t-x) dt + \rho_1 \int_{L_2} g_2(t)/(t-x) dt \right\}, \quad x \in L_k, \quad (33)$$

де $\rho_1 = -2\alpha h m_1 \mu / (1 + \kappa)$.

Беручи до уваги (13), (21), (22), (27), (29), (33), з крайових умов (2) і (3) отримаємо систему інтегральних рівнянь, яка розпадається на дві незалежні: для визначення невідомих функцій $g_1(x)$ і $\delta_1(x)$, з якої знаходимо, що

$$g_1(x) = \delta_1(x) = 0,$$

та невідомих функцій $\tilde{g}'_2(x)$ і $g_2(x)$, яка після зведення інтегрування до проміжку $[-1;1]$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{3\alpha\eta(1+\nu)/\{\eta(T+1)-X+\xi+1\} g_{22}^*(T) - 2/(T-X) g_{23}^*(T)\} / \sqrt{1-T^2} dT = 0, \\ & \int_{-1}^1 \{R_1(T-X) g_{21}^*(T) + \eta R_1(\eta(T+1)-X+\xi+1) g_{22}^*(T)\} / \sqrt{1-T^2} dT = \pi, \\ & \int_{-1}^1 \{R_1(T-\eta(X+1)-\xi-1) g_{21}^*(T) + \eta R_2(\eta(T-X)) g_{22}^*(T) - 2\beta/\{T-\eta(X+1)-\xi-1\} \times \\ & \quad \times g_{23}^*(T)\} / \sqrt{1-T^2} dT = \pi, \end{aligned} \quad (34)$$

де $X \in [-1;1]$, $\eta = l_2/l_1$, $\lambda = 1/(k_* l_1) = \sqrt{2/5} h/l_1$, $\xi = 2c/l_1$, $g_{2k}^*(T) = D\sqrt{1-T^2}/M_y^\infty \times g_2(l_k T + (-1)^k(c+l_k))$, $g_{23}^*(T) = h^2\sqrt{1-T^2}/M_y^\infty \tilde{g}'_2(l_1 T - c - l_1)$, $R_k(x) = \{3 + \nu + 3\alpha\beta \times (k-1)(1+\nu) + 4\tilde{K}_2(|x|/\lambda)\}/x$.

Систему (34) доповнимо умовами

$$\int_{-1}^1 g_{2j}^*(T) / \sqrt{1-T^2} dT = 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad (35)$$

які відображають однозначність усередненого кута повороту нормалі φ_y і переміщення v_p при обході навколо контурів щілини та тріщини.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль K_{1k}^\pm та моментів K_{Mk}^\pm скористаємося відповідними залежностями відповідно із монографій [26] та [3], які з урахуванням (32) після деяких перетворень набудуть вигляду

$$K_{11}^\pm = \mp \frac{2}{h} M_y^\infty \sqrt{l_1} g_{23}^*(\pm 1), \quad K_{12}^\pm = \pm \frac{2}{n} \alpha E h^2 M_y^\infty \sqrt{l_2} g_{22}^*(\pm 1), \quad K_{Mk}^\pm = \mp \frac{m}{D} M_y^\infty \sqrt{l_k} g_{2k}^*(\pm 1). \quad (36)$$

Тут верхній знак відповідає вершині $-c$ або $c+2l_2$, а нижній $-c-2l_1$ або c .

Як випливає з формул (36), коефіцієнти K_{12}^\pm і K_{M2}^\pm зв'язані залежністю

$$K_{12}^\pm = 3\alpha K_{M2}^\pm / h.$$

З урахуванням формул (36) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль (ЗКІЗ) $\tilde{K}_{1k}^\pm = hK_{1k}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l_k})$ та моментів (ЗКІМ) $\tilde{K}_{Mk}^\pm = K_{Mk}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l_k})$ можна записати так:

$$\tilde{K}_{11}^\pm = \mp 2g_{23}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{12}^\pm = 3\alpha \tilde{K}_{M2}^\pm, \quad \tilde{K}_{Mk}^\pm = \mp m/D g_{2k}^*(\pm 1). \quad (37)$$

Систему рівнянь (34) і (35) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [25]. У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень $g_{2j}^*(T_s)$ ($j = \overline{1,3}$), де $T_s = \cos\{\pi(2s-1)/(2S)\}$; S – кількість вузлів у методі механічних квадратур.

З (37) для обчислення коефіцієнтів інтенсивності отримуються прості залежності

$$\tilde{K}_{11}^\pm = \mp 2g_{23}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{12}^\pm = 3\alpha\tilde{K}_{M2}^\pm, \quad \tilde{K}_{Mk}^\pm = \pm(1+\nu)g_{2k}^*(\pm 1), \quad (38)$$

де

$$g_{2j}^*(\pm 1) = \mp 1/S \sum_{s=1}^S (-1)^{s+(1\mp 1)S/2} g_{2j}^*(T_s) \operatorname{tg}^{\mp 1}\{\pi(2s-1)/(4S)\}.$$

Числовий аналіз задачі. Обчислення здійснено для випадку $\nu = 0,3$ і $l_1 = l_2$. На рис. 2 і рис. 3 криві 1 побудовані при відносній відстані між внутрішніми вершинами щілини та тріщини $\xi = 2c/l_1 = 0,5$, а криві 2 – при $\xi = 1,5$. Причому, суцільні лінії побудовано у разі нульової ширини області контакту ($\gamma = h_1/h = 0$), що відповідає контакту берегів тріщини уздовж лінії; штрихові – при $\gamma = 0,13$, а пунктирні – при $\gamma = 0,3$.

На рис. 2 зображено розподіл зведеного контактної зусилля $\tilde{N} = hN/M_y^\infty$ уздовж берегів тріщини при $\tilde{h} = h/l_1 = 0,1$, а на рис. 3 а)–д) – графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності відповідно зусиль \tilde{K}_{11}^- , \tilde{K}_{11}^+ і моментів \tilde{K}_{M1}^- , \tilde{K}_{M1}^+ , \tilde{K}_{M2}^- , \tilde{K}_{M2}^+ для вершин $X = \pm 1$ дефектів.

Графіки для коефіцієнта інтенсивності зусиль \tilde{K}_{12}^\pm не наведено, оскільки він пов'язаний з \tilde{K}_{M2}^\pm другим співвідношенням (38).

З рис. 2 бачимо, що контактне зусилля досягає максимальних значень у безпосередній близькості до вершини тріщини, що розташована ближче до щілини, причому майже на половині її довжини його значення можна вважати сталим. Крім того, можемо зробити висновок, що збільшення відстані між внутрішніми вершинами щілини та тріщини ξ зменшує \tilde{N} посередині тріщини та у її кінцях, а зростання значення ширини області контакту берегів тріщини γ спричиняє зменшення контактної зусилля у центральній частині тріщини, майже не впливаючи на його значення у її вершинах.

Вплив параметра \tilde{h} та відстані ξ між внутрішніми вершинами щілини та тріщини на напружений стан пластини якісно такий самий, як і у випадку нехтування контактом берегів тріщини [31–33] (рис. 3). Разом із тим урахування контакту хоча й істотно зменшує розрахункові значення коефіцієнтів інтенсивності моментів, проте спричиняє появу коефіцієнтів інтенсивності зусиль (унаслідок додаткового впливу розв'язку плоскої задачі теорії пружності). Крім того, збільшення ширини області контакту берегів тріщин γ зменшує ЗКІЗ і збільшує ЗКІМ. Зазначимо також, що зміна

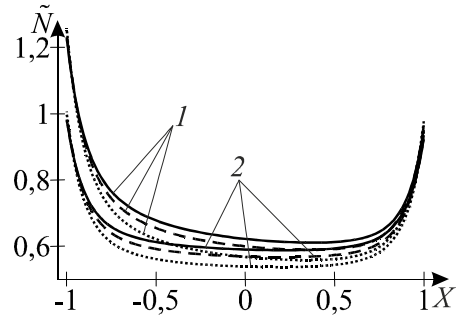


Рисунок 2. Графічні залежності зведеного контактної зусилля \tilde{N} уздовж тріщини

Figure 2. The graphic dependences of the reduced contact force \tilde{N} along the crack

параметра γ найбільше впливає на зміну ЗКІМ для тріщини, мало впливаючи на значення ЗКІМ для щілини.

У часткових випадках, коли $\xi \rightarrow \infty$, числові результати збігаються з відповідними даними для однієї щілини й однієї тріщини з урахуванням ширини області контакту її берегів [10], а коли вважати ще $\gamma = 0$ – з урахуванням контакту берегів тріщини уздовж лінії [9]. Якщо при цьому перейти до границі $\tilde{h} \rightarrow 0$, то стане помітною узгодженість з відповідними даними, отриманими за рівняннями класичної теорії згину пластин [22].

Порівнявши отримані числові результати з даними, одержаними при розв'язуванні аналогічної задачі з двома співвісними тріщинами [34], спостерігаємо збільшення значень контактної сили та ЗКІМ для тріщини.

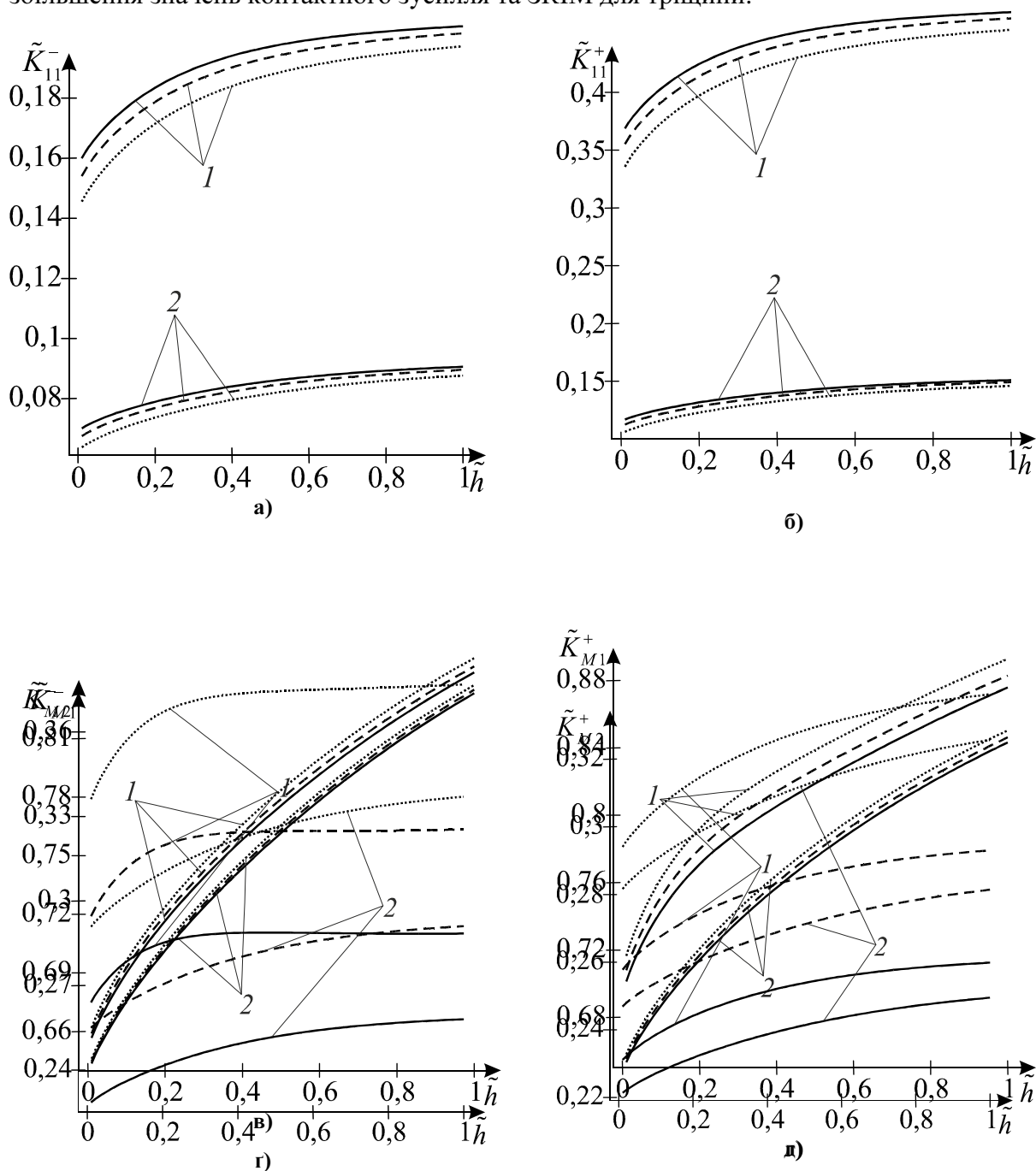


Рисунок 3. Графічні залежності ЗКІЗ і ЗКІМ від \tilde{h} :

a) \tilde{K}_{11}^- ; б) \tilde{K}_{11}^+ ; в) \tilde{K}_{M1}^- ; г) \tilde{K}_{M1}^+ ; р) \tilde{K}_{M2}^- ; д) \tilde{K}_{M2}^+

Figure 3. The graphic dependences of the reduced force and moment intensity factors on \tilde{h} :

a) \tilde{K}_{11}^- ; б) \tilde{K}_{11}^+ ; в) \tilde{K}_{M1}^- ; д) \tilde{K}_{M1}^+ ; е) \tilde{K}_{M2}^- ; ф) \tilde{K}_{M2}^+

Висновки. Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з прямолінійними співвісними наскрізними щілиною та тріщиною, береги якої під дією згинальних моментів на нескінченності приходять у гладкий контакт уздовж області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини.

З'ясовано, що збільшення ширини області контакту берегів тріщини призводить до зменшення контактної зусилля та рівночасного компенсаційного збільшення значень коефіцієнтів інтенсивності моментів K_M у порівнянні з аналогічною задачею, у якій контакт берегів відбувається лише уздовж лінії. Окрім того, урахування ширини області контакту берегів тріщини спричиняє появу коефіцієнтів інтенсивності зусиль K_1 біля обидвох дефектів, які зумовлюють зменшення коефіцієнтів інтенсивності моментів K_M (порівняно з цією ж задачею, коли контакт берегів тріщини взагалі не враховувався). Присутність щілини збільшує контактне зусилля між берегами тріщини та ЗКІМ у порівнянні з аналогічною задачею з двома співвісними тріщинами.

Аналітично доведено, що між КІЗ K_1 і КІМ K_M існує залежність $K_1/K_M = 3\alpha/h$.

Conclusions. The stress-strain state of a boundless isotropic plate with a straight coaxial through-the-thickness slit and a crack, the faces of which under the action of the bending moments at infinity come in a smooth contact along the area of constant width near the one of plate basis.

It is found that an increase in the width of the crack faces contact domain leads to decreasing in the contact force and at the same time to compensation increasing in the moment intensity factors K_M values in comparison with the same problem of taking account the crack faces contact only along a line. In addition, taking account of the crack faces contact leads to appearance the force intensity factors K_1 at both defects which cause the decreasing in moment intensity factors K_M (compared with the same problem when the crack faces contact is ignored at all). The presence of slit increases the contact force between crack faces and the reduced moment intensity factors compared with the same problem with two coaxial cracks.

It is analytically proved that force intensity factors K_1 and the bending moment intensity factors K_M are connected by the relation $K_1/K_M = 3\alpha/h$.

Список використаної літератури

1. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Прусов, И.А. Метод сопряжения в теории плит [Текст] / И.А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
3. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Alwar, R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis [Text] / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Eng. Fracture Mech. – 1983. – 17, No. 4. – P.323 – 333.

5. Heming, F.S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate [Text] / F.S. Jr. Heming // *Int. J. Fracture*. – 1980. – 16, No. 4. – P.289 – 304.
6. Jones, D.P. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate [Text] / D.P. Jones, J.L. Swedlow // *Int. J. Fracture*. – 1975. – 11, No. 6. – P. 897 – 914.
7. Williams, M.L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack [Text] / M.L. Williams // *Trans ASME. J. Appl. Mech.* – 1961. – 28. – P.78 – 82.
8. Опанасович, В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь [Текст] / В.К. Опанасович // *Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту.* – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123 – 127.
9. Опанасович, В.К. Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини [Текст] / В.К. Опанасович, В.П. Новосад, Р.Г. Селіверстов // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Зб. наук. праць.* – Вип. 5. – Львів: Каменяр, 2002. – С.148 – 153.
10. Опанасович, В. Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів [Текст] / В. Опанасович, І. Яцик // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2008. – Вип. 69. – С. 125–135.
11. Шацький, І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами [Текст] / І.П. Шацький // *Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки.* – 1988. – № 7. – С. 49 – 51.
12. Шацький, І.П. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами [Текст] / І.П. Шацький, В.В. Перепічка // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1992. – 28, № 2. – С. 54 – 58.
13. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [Текст] / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // *Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2 т.* – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51 – 54.
14. Benedetti, I. A fast 3D dual boundary element method based on hierarchical matrices [Text] / I. Benedetti, M.H. Aliabadi, G. Davi // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – 45, No. 7 – 8. – P.2355 – 2376.
15. Dempsey, J.P. Closure of a through crack in a plate under bending [Text] / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.I. Slepyan // *Int. J. Solids Struct.* – 1998. – 35, No. 31 – 32. – P.4077 – 4089.
16. Dirgantara, T. Stress intensity factors for cracks in thin plates [Text] / T. Dirgantara, M.H. Aliabadi // *Eng. Fracture Mech.* – 2002. – 69. – P. 1465 – 1486.
17. Guimaraes, S. The method of fundamental solutions for fracture mechanics – Reissner's plate application [Text] / S. Guimaraes, J.C.F. Telles // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2009. – 33, No. 10. – P.1152 – 1160.
18. Kwon, Y.W. Finite element analysis of crack closure in plate bending [Text] / Y.W. Kwon // *Comput. Struct.* – 1989. – 32, No. 6. – P.1439 – 1445.
19. Litewka, B. Application of the fundamental solutions by Ganowicz in a static analysis of Reissner's plates by the boundary element method [Text] / B. Litewka, R. Sygulski // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2010. – 34, No. 12. – P. 1072 – 1081.
20. Wen, P.H. A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method [Text] / P.H. Wen, M.H. Aliabadi // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – 48, No. 7 – 8. – P. 1171 – 1179.
21. Young, M.J. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution [Text] / M.J. Young, C.T. Sun // *Int. J. Fracture*. – 1992. – 55. – P. 81 – 93.
22. Даляк, Т. Про взаємодію тріщин з щілинами при згині пластинки [Текст] / Т. Даляк // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / за заг. ред. Панасюка В.В: в 3 т. – Вип. 2. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів.* – Львів: Каменяр, 1999. – С. 269 – 272.
23. Тимошенко, С.П. Пластини и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновски-Кригер. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
24. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
25. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацишин. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
26. Мазурак, Л.П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницький. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
27. Опанасович, В.К. Сингулярні інтегральні рівняння задачі згину пластини з тріщиною за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович // *Праці НТШ.* – Том VI: Матеріалознавство і механіка матеріалів. – Львів, 2001. – С. 120 – 125.
28. Опанасович, В.К. Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович, М.В. Деляський, А. Подхорецькі // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / під заг. ред. В.В. Панасюка: в 3 т. – Вип. 2. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів.* – Львів: Каменяр, 1999. – С. 186 – 189.

29. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами [Текст]; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
30. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
31. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений [Текст]; под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1, Т. 2. – 1016 с.
32. Опанасович, В.К. Напружений стан плити з двома прямолінійними колінеарними тріщинами за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович, Р.Г. Селіверстов // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 124 – 127.
33. Опанасович, В.К. Згин плити з двома рівними прямолінійними колінеарними тріщинами за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович, Р.Г. Селіверстов // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 1. – С. 53 – 56.
34. Опанасович В. Згин пластини Рейсснера з двома співвісними наскрізними тріщинами різної довжини з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів [Текст] / В. Опанасович, І. Яцик // Машинознавство. – 2009. – Вип. № 4 (142). – С. 18 – 25.

Отримано 08.08.2015