

УДК 536. 2

Б. Окрепкий¹, канд. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський², канд. фіз.-мат. наук

¹Тернопільський національний економічний університет

²Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМІ ТІЛ ЦИЛІНДР–ШАР

Резюме. Побудовано розв'язок асиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр–шар при неідеальному тепловому контакті з урахуванням тонкого проміжкового шару у випадку ізотропних матеріалів. Отримано формули для визначення температури при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях циліндра і шару. Досліджено вплив контактної провідності й коефіцієнтів теплопровідності, проміжкового шару на розподіл температурних полів у зоні контакту двох тіл.

Ключові слова: температура, проміжковий шар, коефіцієнт теплопровідності, контактна провідність, ізотропні матеріали.

B. Okrepkiy, B. Shelestovskiy

DETERMINATION OF THE TEMPERATURE FIELD FOR THE CYLINDER-LAYER SYSTEM

Summary. Solution of the axes-symmetric temperature task for the body system cylinder-layer under non – ideal heat contact taking into account thin intermediate layer in the case of isotropic materials has been built. Circular cylinder of the finite height with the flat basis, which is in the non – ideal heat contact through the intermediate layer with the layer, is being analysed. On the free end of the cylinder the temperature is constant and its side surface is heat – insulated. Heat exchange with the outside environment occurs from the side surface of the thin intermediate layer and on the free surfaces of the layer according to the Newton's law.

The temperature in the cylinders is found by the Furier's method, and in the layer with the help of the Hanckel's transformation to the Laplace's equation, written in the cylinder coordinates system.

Providing the boundary conditions for the temperature on the side surfaces and in the contact area body system cylinder – layer, the task is reduced to the system of intergal equations relatively unknown functions, due to which the temperature in the layer is found.

Taking advantage of the Hanckel's transformation and the Bessel's function we obtain non – finite system of the linear algebraic equations relatively constants, through which the temperature fields in the system of two bodies are expressed. While solving the system of the linear algebraic equations the reduction method was used. The graphs of the temperature distribution for the cylinder and the layer in the contact area have been built. The effect of the contact conductivity and heat exchange coefficient of the thin intermediate layer on the temperature distribution in the contact area have been investigated. It was shown, that these coefficients affect sufficiently the temperature field in the layer.

Decrease of the temperature in the contact area in the case of the intermediate layer as compared with the ideal heat contact is caused by the fact, that the heat exchange accurs through the side surface of the intermediate layer.

Key words: axes – symmetric temperature tasks, intermediate layer, isotropic materials, coefficient of conductivity, contact conductivity, non - ideal heat contact.

Постановка проблеми. Проблема визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних полів є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень. У працях [1–4] досліджено вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. Зокрема, в роботі [3] розв’язана задача теплопровідності для системи тіл циліндр – шар при неідеальному тепловому контакті у випадку ізотропних матеріалів. Проте недостатньо вивченими є задачі теплопровідності з урахуванням умов неідеального контакту двох тіл через тонкий проміжковий шар.

Мета роботи. Побудувати розв’язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр – шар при неідеальному тепловому контакті з урахуванням тонкого проміжкового шару у випадку ізотропних матеріалів. Знайти формули для визначення температурних полів у тілах, а також дослідити вплив коефіцієнтів теплопровідності й контактної провідності тонкого проміжкового шару на розподіл температури в зоні контакту.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндр радіусом R і довжиною L перебуває в неідеальному тепловому контакті з шаром скінченої товщини H . Матеріали тіл є ізотропними. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0 . Тепловий контакт між тілами здійснюється через тонкий проміжковий шар [5,6]. Бічна поверхня циліндра теплоізолювана. На вільних поверхнях шару відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона.

При заданих припущеннях необхідно визначити температурні поля в циліндрі й шарі.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z , центр якої лежить на поверхні шару, а вісь OZ спрямована вздовж циліндра по його осі симетрії.

Всі величини, які позначені індексом «1» відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури матимуть вигляд

$$T = T_0, \quad (0 \leq r \leq R, z = L). \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = R, 0 \leq z \leq L). \quad (2)$$

$$T^1 = 0, \quad (z = 0, R < r < \infty). \quad (3)$$

$$\lambda_0^* \Delta(T^1 + T) + 2 \left(\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_0^* \Delta(T^1 - T) - 6 \left(\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - 12h_0(T^1 - T) = 0, \quad (z = 0, 0 \leq r \leq R). \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(T^1 + T)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \left(\frac{T^1 + T}{2} - T_c \right) = 0;$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(T^1 - T)}{\partial r} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0^*} \left(\frac{T^1 - T}{2} - T_c^* \right) = 0, \quad (z = 0; r = R). \quad (6)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \quad (z = 0, R < r < \infty). \quad (7)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \quad (z = -H, 0 \leq r < \infty). \quad (8)$$

Тут $\lambda_z, \lambda_z^1, H_1^1, H_2^1$ – коефіцієнти теплопровідності й теплообміну; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа; $T_c = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} T_c^0 d\gamma$, $T_c^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma T_c^0 d\gamma$, 2δ – товщина проміжкового шару; $\lambda_0^* = 2\lambda_0\delta$; $h_0 = \lambda_0/2\delta$; $\alpha_0^* = 2\alpha_0\delta$; λ_0 ; α_0 – коефіцієнти теплопровідності й теплообміну проміжкового шару; h_0 – контактна провідність; T_c^0 – температура зовнішнього середовища.

Розв'язування крайової задачі для рівняння теплопровідності. Відомо [7], що в осесиметричному випадку температурне поле для ізотропного тіла визначається із рівняння

$$\Delta T = 0. \quad (9)$$

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r, z)$ нульового порядку

$$\bar{T}^1(\xi, z) = \int_0^{\infty} r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (10)$$

за допомогою якої знаходимо вираз для $T^1(\rho, \zeta)$ через дві довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$:

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} [\varphi_1(\eta) e^{\eta\zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta\zeta}] J_0(\eta\rho) d\eta, \quad (11)$$

де $J_0(\eta\rho)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $\rho = r/R$; $\zeta = z/R$; $\eta = \xi R$.

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок має вигляд

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\beta_{\kappa} r) (A_{\kappa} sh \beta_{\kappa} z + B_{\kappa} ch \beta_{\kappa} z) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} I_0(\gamma_{\kappa} r) (C_{\kappa} \sin \gamma_{\kappa} z + D_{\kappa} \cos \gamma_{\kappa} z), \quad (12)$$

де $A_{\kappa}, B_{\kappa}, C_{\kappa}, D_{\kappa} (\kappa = \overline{0, \infty})$ – довільні постійні; $I_0(\gamma_{\kappa} r)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; $\beta_{\kappa}, \gamma_{\kappa}$ – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Умова (2) буде задовольнятися, якщо покласти $D_0 = 0, C_{\kappa} = 0, D_{\kappa} = 0 (\kappa = \overline{1, \infty})$; $\beta_{\kappa} = \mu_{\kappa}/R$, де μ_{κ} корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

Гранична умова (1), з урахуванням властивостей ортогональності функцій Бесселя, призводить до таких співвідношень між постійними B_0, B_{κ} і $A_0, A_{\kappa} (\kappa = \overline{1, \infty})$.

$$B_0 = T_0 - A_0 R \ell, \quad B_{\kappa} = -A_{\kappa} th \mu_{\kappa} \ell, \quad \ell = L/R. \quad (13)$$

Задовольнивши граничні умови (7), (8), з урахуванням (11), отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно функцій $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$

$$\int_0^{\infty} [(K_2^1 + \eta)\varphi_1(\eta) + (K_2^1 - \eta)\varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1). \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} [(\eta - K_1^1)e^{-\eta h}\varphi_1(\eta) - (\eta + K_1^1)e^{\eta h}\varphi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0. \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (15)$$

де $h = H/R$; $K_1^1 = H_1^1 R$, $K_2^1 = H_2^1 R$. Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до рівняння (15) і ввівши позначення $\varphi(\eta) = (K_2^1 + \eta)\varphi_1(\eta) + (K_2^1 - \eta)\varphi_2(\eta)$, отримаємо систему рівнянь відносно функцій $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$, розв'язок яких має вигляд

$$\varphi_1(\eta) = \frac{1}{2}(\eta + K_1^1)e^{\eta h} \varphi(\eta) / Q(\eta), \quad \varphi_2(\eta) = \frac{1}{2}(\eta - K_1^1)e^{-\eta h} \varphi(\eta) / Q(\eta), \quad (16)$$

$$Q(\eta) = (\eta^2 + K_1^1 K_2^1) sh\eta h + \eta(K_1^1 + K_2^1) ch\eta h.$$

Рівняння (14) запишемо так:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1). \quad (17)$$

Для визначення функції $\varphi(\eta)$ продовжимо рівняння (17) на весь інтервал $(0 \leq \rho < \infty)$.

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = U(1 - \rho) X(\rho), \quad (0 \leq \rho < \infty). \quad (18)$$

Тут $U(x)$ – функція Хевісайда; $X(\rho)$ – невідома функція, яку представимо співвідношенням

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{\kappa=1}^N a_{\kappa} J_0(\mu_{\kappa} \rho), \quad (19)$$

де $a_{\kappa} (\kappa = \overline{0, N})$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; значення N вибирається із умови задоволення необхідної точності розв'язку задачі.

За теоремою обернення інтегрального перетворення Ганкеля, із (18) знайдемо функцію $\varphi(\eta)$ через невідомі коефіцієнти a_{κ}

$$\varphi(\eta) = a_0 J_1(\eta) + \eta^2 J_1(\eta) \sum_{\kappa=1}^N \frac{a_{\kappa} J_0(\mu_{\kappa})}{\eta^2 - \mu_{\kappa}^2}. \quad (20)$$

Застосувавши трансформанту Ганкеля до рівнянь (4) і (5), отримаємо:

$$\bar{T}(\xi) - \frac{4\lambda_z^1}{\lambda_0^*(\xi^2 + 0,5a^2)} \frac{\partial \bar{T}^1(\xi)}{\partial z} - \frac{2\lambda z}{\lambda_0^*(\xi^2 + 0,5a^2)} \frac{\partial \bar{T}(\xi)}{\partial z} - \frac{6h_0}{\lambda_0^*} \frac{\bar{T}^1(\xi)}{\xi^2 + 0,5a^2} = 0. \quad (21)$$

$$\bar{T}(\xi) - \bar{T}^1(\xi) - \frac{6\lambda_z^1}{\lambda_0^*(\xi^2 + a^2)} \frac{\partial \bar{T}^1(\xi, z)}{\partial z} - \frac{6\lambda z}{\lambda_0^*(\xi^2 + a^2)} \frac{\partial \bar{T}(\xi, z)}{\partial z} = 0. \quad (22)$$

де $a^2 = \frac{12h_0}{\lambda_0^*}$, $\bar{T}(\xi) = \bar{T}(\xi, 0)$, $\overline{T^1(\xi)} = \overline{T^1(\xi, 0)}$; $\bar{T}^1(\xi) = \int_0^\infty r J_0(\xi r) T^1(r) dr$,

$$T^1(r) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \bar{T}^1(\xi) d\xi, \quad \frac{\partial \bar{T}^1(\xi)}{\partial z} = \int_0^\infty r J_0(\xi r) \frac{\partial T^1}{\partial z} dr, \quad \frac{\partial T^1(r)}{\partial z} = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \frac{\partial \bar{T}^1(\xi)}{\partial z} d\xi,$$

$$\int_0^\infty r J_0(\xi r) \Delta T^1(r) dr = -\xi^2 \bar{T}^1(\xi), \quad \int_0^\infty r J_0(\xi r) \Delta T(r) dr = -\xi^2 \bar{T}(\xi), \quad (23)$$

$$T^1(\rho) = \int_0^\infty F_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad \frac{\partial T^1(\rho)}{\partial z} = \frac{1}{R} \int_0^\infty \eta F_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$F_1(\eta) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta), \quad F_2(\eta) = \varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta).$$

Використовуючи дельта-функцію Дірана $\delta(\alpha - \beta) = \alpha \int_0^\infty \xi J_m(\alpha \xi) J_m(\beta \xi) d\xi$,

отримаємо

$$\bar{T}^1(\xi) = \int_0^\infty r J_0(\xi r) T^1(r) dr = \int_0^\infty r J_0(\xi r) dr \int_0^\infty F_1(\eta) J_0\left(\eta \frac{r}{R}\right) d\eta = \frac{1}{\xi} \int_0^\infty F_1(\eta) \delta\left(\xi - \frac{\eta}{R}\right) d\eta,$$

$$\frac{\partial \bar{T}^1(\xi)}{\partial z} = \int_0^\infty F_2(\eta) \delta\left(\frac{\eta}{R} - \xi\right) d\eta, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = A_0 + \frac{1}{R} \sum_{\kappa=1}^\infty A_\kappa \mu_\kappa J_0\left(\mu_\kappa \frac{r}{R}\right),$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = A_0 \frac{1}{\xi} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\xi - \Delta) + \sum_{\kappa=1}^\infty A_\kappa \delta\left(\frac{\mu_\kappa}{R} - \xi\right).$$

Застосувавши формули обернення інтегрального перетворення Ганкеля до рівностей (21), (22), отримаємо

$$T(\rho) - \frac{4\lambda_z^1}{\lambda_0^*} R \int_0^\infty \frac{\eta F_2(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 + 0,5a^2 R^2} d\eta - \frac{2\lambda z}{\lambda_0^*} \left[\frac{2A_0}{a^2} + R \sum_{\kappa=1}^\infty \frac{J_0(\mu_\kappa \rho) \mu_\kappa}{\mu_\kappa^2 + 0,5a^2 R^2} A_\kappa \right] -$$

$$- \frac{6h_0}{\lambda_0^*} R^2 \int_0^\infty \frac{F_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 + 0,5a^2 R^2} d\eta - C_0 I_0\left(\frac{aR}{\sqrt{2}} \rho\right) = 0, \quad (\rho < 1). \quad (24)$$

$$T(\rho) - T^1(\rho) - \frac{6\lambda_z^1 R}{\lambda_0^*} \int_0^\infty \frac{\eta J_0(\eta \rho) F_2(\eta)}{\eta^2 + a^2 R^2} d\eta - \frac{6\lambda z}{\lambda_0^*} \left[\frac{A_0}{a^2} + R \sum_0^\infty \frac{A_\kappa \mu_\kappa J_0(\mu_\kappa \rho)}{\mu_\kappa^2 + a^2 R^2} \right] +$$

$$+ C_1 I_0(aR\rho) = 0, \quad (\rho < 1). \quad (25)$$

де C_0, C_1 – невідомі постійні; $I_0\left(\frac{aR}{\sqrt{2}} \rho\right)$; $I_0(aR\rho)$ – частинні розв'язки рівнянь (4), (5).

Додавши і віднявши дві рівності (6) з урахуванням формул (11), (12), (13), отримаємо

$$-\frac{1}{R} \int_0^{\infty} \eta F_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \int_0^{\infty} F_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} (T_c + T_c^*), \quad (\rho = 1), \quad (26)$$

$$\frac{1}{R} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa} J_1(\mu_{\kappa} \rho) th \mu_{\kappa} \ell A_{\kappa} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \left(A_0 R \ell + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\mu_{\kappa} \rho) + h \mu_{\kappa} \ell A_{\kappa} \right) = \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} (T_0 + T_c^* - T_c), \quad (\rho = 1).$$

Температурні поля в зоні контакту, з урахування (11–13), (16), (20) обчислюються за формулами:

а) для циліндра

$$T(\rho, 0) = T_0 - A_0 R \ell - \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\mu_{\kappa} \rho) \cdot th \mu_{\kappa} \ell A_{\kappa}, \quad (\rho < 1); \quad (27)$$

б) для шару

$$T^1(\rho, 0) = \sum_{\kappa=0}^N a_{\kappa} \beta_{\kappa}^{(1)}(\rho), \quad (\rho < 1), \quad (28)$$

$$\text{де } \beta_0(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{P_1(\eta) J_0(\eta) J_1(\eta \rho)}{Q(\eta)} d\eta, \quad \beta_{\kappa}(\rho) = J_0(\mu_{\kappa}) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 P_1(\eta) J_0(\eta \rho) J_1(\eta)}{(\eta^2 - \mu_{\kappa}^2) Q(\eta)} d\eta, \quad (29)$$

$$P_1(\eta) = \eta ch \eta h + K_1^1 sh \eta h.$$

Використовуючи формули (20), (27–29) і обчисливши невластні інтеграли згідно з [8], система рівнянь (24–26) набуде вигляду

$$\sum_{\kappa=0}^N \left[6h_0^{(1)} e_z \alpha_{\kappa}^{(1)}(\rho, b_1) + 4e_z^1 \alpha_{\kappa}^{(2)}(\rho, b_1) \right] a_{\kappa} + \left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right) A_0 R + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\mu_{\kappa} \rho) \Delta^{(1)}(\mu_{\kappa}, b_1) A_{\kappa} + C_0 I_0(b_1 \rho) = T_0, \quad (\rho < 1). \quad (30)$$

$$\sum_{\kappa=0}^N \left[\beta_{\kappa}^{(1)}(\rho) + 6e_z^{(1)} \alpha_{\kappa}^{(2)}(\rho, b_2) \right] a_{\kappa} + \left(\ell + \frac{1}{2h_0^1} \right) A_0 R + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\mu_{\kappa} \rho) \Delta^{(2)}(\mu_{\kappa}, b_2) A_{\kappa} - C_1 I_0(b_2 \rho) = T_0, \quad (\rho < 1). \quad (31)$$

$$\sum_{\kappa=0}^N \left[e_0^* \beta_{\kappa}^{(1)}(1) - \gamma_{\kappa}^{(1)}(1) \right] a_{\kappa} = e_0^* (T_c + T_c^*), \quad (32)$$

$$A_0 R \ell + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\mu_{\kappa}) th \mu_{\kappa} \ell A_{\kappa} = T_0 + T_c^* - T_c, \quad (33)$$

$$\text{Де } h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}, \quad e_0^* = \frac{\alpha_0^* R}{\lambda_0^*}, \quad e_z = \frac{\lambda_z R}{\lambda_0^*}, \quad e_z^1 = \frac{\lambda_z^1 R}{\lambda_0^*}, \quad b_1 = \sqrt{6h_0^1 e_z}, \quad b_2 = \sqrt{2} b_1.$$

$$\alpha_0^{(j)}(\rho, b_i) = \int_0^{\infty} \frac{P_j(\eta) J_0(\eta \rho) J_1(\eta)}{(\eta^2 + b_i^2) Q(\eta)} d\eta = g_0^{(j)} - \frac{P_j^*(b_i) I_0(b_i \rho) K_1(b_i)}{Q^*(b_i) b_i} +$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(b_i^2 - y_m^2)}, \quad (i=1,2; j=1,2).$$

$$\alpha_{\kappa}^j(\rho, b_i) = J_0(\mu_{\kappa}) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 P_j(\eta) J_0(\eta\rho) J_1(\eta)}{(\eta^2 + b_i^2)(\eta^2 - \mu_{\kappa}^2)} d\eta = \frac{P_j(\mu_{\kappa}) J_0(\mu_{\kappa}\rho)}{Q(\mu_{\kappa})(\mu_{\kappa}^2 + b_i^2)} -$$

$$- \frac{b_i P_j^*(b_i) I_0(b_i\rho) K_1(b_i)}{Q^*(\mu_{\kappa})(\mu_{\kappa}^2 + b_i^2)} J_0(\mu_{\kappa}) + 2J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P_j^*(y_m) I_0(y_m\rho) K_1(y_m)}{Q^1(iy_m)(b_i^2 - y_m^2)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)},$$

$$g_0^{(1)} = \frac{1 + K_1^1 h}{b_1^2 (K_1^1 K_2^1 h + K_1^1 K_2^1)}, \quad g_0^{(2)} = \frac{2K_1^1}{b_2^2 (K_1^1 K_2^1 h + K_1^1 + K_2^1)}.$$

$$\beta_0^{(1)}(\rho) = g_0^{(1)} b_1^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_1^*(y_m) I_0(y_m\rho) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)},$$

$$\beta_{\kappa}^{(1)}(\rho) = \frac{P_1(\mu_{\kappa})}{Q(\mu_{\kappa})} J_0(\mu_{\kappa}\rho) + 2J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P_1^*(y_m) K_1(y_m) I_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)},$$

$$\gamma_0^{(1)}(\rho) = \int_0^{\infty} \eta \frac{P_1(\eta) J_1(\eta) J_1(\eta\rho)}{Q(\eta)} = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m P_1^*(y_m) I_1(y_m\rho) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)},$$

$$\gamma_{\kappa}^{(1)}(\rho) = J_0(\mu_{\kappa}) \int_0^{\infty} \eta^3 \frac{P_1(\eta) J_1(\eta\rho) J_1(\eta)}{Q(\eta)(\eta^2 - \mu_{\kappa}^2)} d\eta = -\mu_{\kappa} \frac{P_1(\mu_{\kappa})}{Q(\mu_{\kappa})} J_1(\mu_{\kappa}\rho) +$$

$$+ 2J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^3 P_1^*(y_m) I_1(y_m\rho) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)},$$

$$P_1(\eta) = \eta ch\eta h + K_1^1 sh\eta h, \quad P_2(\eta) = \eta(\eta sh\eta + K_1^1 ch\eta h),$$

$Y_m (m = \overline{1, \infty})$ – корені рівняння $Q(iy_m) = 0$;

$$P_1^*(y_m) = y_m \cos y_m h + K_1^1 \sin y_m h, \quad P_2^*(y_m) = y_m (K_1^1 \cos y_m h - y_m \sin y_m h),$$

$$Q'(iy_m) = [(K_1^1 K_2^1 - y_m^2)h + K_1^1 + K_2^1] \cos y_m h - [2 + (K_1^1 + K_2^1)h] y_m \sin y_m h,$$

$$\Delta^{(1)}(\mu_{\kappa}, b_1) = th\mu_{\kappa} \ell + 2e_z \frac{\mu_{\kappa}}{b_1^2 + \mu_{\kappa}^2}, \quad \Delta^{(2)}(\mu_{\kappa}, b_2) = th\mu_{\kappa} \ell + 6e_z \frac{\mu_{\kappa}}{b_2^2 + \mu_{\kappa}^2}.$$

Помноживши рівності (30), (31) на $\rho, \rho J_0(\mu_{\eta}\rho)$ і проінтегрувавши їх по ρ у межах від 0 до 1, з урахуванням властивостей ортогональності функцій Бесселя і рівнянь (32, 33), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $X_{\kappa}^{(1)} (\kappa = \overline{0, N}), Y_0, Y_1$.

$$\sum_{\kappa=0}^N A_{n,\kappa}^{(1)} X_{\kappa}^{(1)} + B_{n,0}^{(1)} Y_0 + B_{n,1}^{(1)} Y_1 = D_n^{(1)}, \quad (n = \overline{0, N}), \quad \sum_{\kappa=0}^N A_{n,\kappa}^{(2)} X_{\kappa}^{(1)} + B_{n,0}^{(2)} Y_0 = D_n^{(2)}, \quad (n = 0, 1), \quad (34)$$

де $a_{\kappa} = X_{\kappa}^{(1)} T_0, (\kappa = \overline{0, N}), C_0 = Y_0 T_0, C_1 = Y_1 T_0$,

$$A_0 R = \left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1} T_0 \left[1 - 2 \sum_{\kappa=0}^N \varepsilon_{0,\kappa}^{(1)} X_{\kappa}^{(1)} - \frac{2}{b_1} I_1(b_1) Y_0^{(1)} \right], \quad (35)$$

$$A_n = -\frac{2T_0}{J_0^2(\mu_n)} \frac{1}{\Delta^{(2)}(\mu_n, b_1)} \left[\sum_{\kappa=0}^N \varepsilon_{n,\kappa}^{(1)} X_{\kappa}^{(1)} + \frac{b_1 J_0(\mu_n) I_1(b_1)}{\mu_n^2 + b_1^2} Y_0 \right].$$

$$A_{0,\kappa}^{(1)} = \delta_{0,\kappa}^{(1)} - r_0^{(1)} \varepsilon_{0,\kappa}^{(1)}, \quad (\kappa = \overline{0, N});$$

$$\varepsilon_{n,\kappa}^{(1)} = 6h_0^{(1)} e_z \alpha_{n,\kappa}^{(1)} + 4e_z^{(1)} \alpha_{n,\kappa}^{(2)}, \quad (\kappa = \overline{0, N}; n = \overline{0, N}),$$

$$\delta_{n,\kappa}^{(1)} = \beta_{n,\kappa}^{(1)} + 6e_z^1 \alpha_{n,\kappa}^{(2)}, \quad (\kappa = \overline{0, N}; n = \overline{0, N}).$$

$$r_0^{(1)} = \left(1 + \frac{1}{2h_0^1} \right) \left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1}, \quad B_{0,0}^{(1)} = -\frac{1}{b_1} r_0^{(1)} I_1(b_1), \quad B_{0,1}^{(1)} = \frac{1}{b_2} I_1(b_2), \quad D_0^{(1)} = \frac{1}{2} (1 - r_0^{(1)}).$$

$$A_{n,\kappa}^{(1)} = \delta_{n,\kappa}^{(1)} - \frac{\Delta^{(2)}(\mu_n, b_2)}{\Delta^{(1)}(\mu_n, b_1)} \varepsilon_{n,\kappa}^{(1)}, \quad (\kappa = \overline{0, N}; n = \overline{0, N}).$$

$$B_{n,1}^{(1)} = -\frac{J_0(\mu_n) b_2 I_1(b_2)}{\mu_n^2 + b_2^2}, \quad (n = \overline{1, N}); \quad B_{n,0}^{(1)} = -b_1 \frac{\Delta^{(2)}(\mu_n, b_2) I_1(b_1)}{\Delta^{(1)}(\mu_n, b_1) (\mu_n^2 + b_1^2)} J_0(\mu_n),$$

$$D_n^{(1)} = 0 \quad (n = \overline{1, N}).$$

$$A_{0,\kappa}^{(2)} = -2\ell \left(\ell + \frac{1}{3h_0^{(1)}} \right)^{-1} \varepsilon_{0,\kappa}^{(1)} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ih\mu m \ell \varepsilon_{m,\kappa}^{(1)}}{J_0(\mu_m) \Delta^2(\mu_m, b_1)}, \quad (\kappa = \overline{0, N}).$$

$$B_{0,0}^{(2)} = -2 \left[\left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1} \ell + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{ih\mu \kappa \ell}{J_0(\mu_\kappa) \Delta^{(2)}(\mu_\kappa, b_1) (\mu_\kappa^2 + b_1^2)} \right] b_1 I_1(b_1),$$

$$D_0^{(2)} = 1 + \frac{T_c^* - T_c}{T_0} - \ell \left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1},$$

$$A_{1,\kappa}^{(2)} = [\beta_{\kappa}^{(1)}(1) - \gamma_{\kappa}^{(1)}(1)] e_0^*, \quad (\kappa = 0, 1). \quad B_{1,0}^{(2)} = 0, \quad D_1^{(2)} = e_0^* \frac{T_c + T_c^*}{T_0}.$$

$$\alpha_{0,0}^{(j)} = \int_0^1 \rho \alpha_0^{(j)}(\rho, b_i) d\rho = \frac{1}{2} r_0^{(j)} - \frac{P_j^*(b_i) I_1(b_i) K_1(b_i)}{Q^*(b_i) b_i^2} J_0(\mu_\kappa) +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m) (b_i^2 - y_m^2) y_m},$$

$$\alpha_{0,\kappa}^{(j)} = \int_0^1 \rho \alpha_{\kappa}^{(j)}(\rho, b_i) d\rho = -\frac{P_j^*(b_i) I_1(b_i) K_1(b_i)}{Q^*(b_i) (\mu_\kappa^2 + b_i^2)} J_0(\mu_\kappa) +$$

$$+ 2 J_0(\mu_\kappa) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m) (b_i^2 - y_m^2) (y_m^2 + \mu_\kappa^2)}.$$

$$\alpha_{n,0}^{(j)} = \alpha_{0,n}^{(j)}, \quad (n = \overline{0, N}). \quad \alpha_{n,\kappa}^{(j)} = \begin{cases} \lambda_{n,\kappa}^{(j)}, & \kappa \neq n \\ \lambda_{n,\kappa}^{(j)} + \frac{1}{2} \frac{P_j(\mu_n)}{Q(\mu_n)} \frac{J_0^2(\mu_n)}{b_i^2 + \mu_n^2}, & \kappa = n. \end{cases}$$

$$\lambda_{n,\kappa}^{(j)} = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \alpha_{\kappa}^{(j)}(\rho, b_i) d\rho = -\frac{b_i^2 P_j^*(b_i) J_0(\mu_n) J_0(\mu_{\kappa})}{Q^*(b_i)} \frac{I_1(b_i) K_1(b_i)}{(\mu_{\kappa}^2 + b_i^2)(\mu_n^2 + b_i^2)} +$$

$$+ 2J_0(\mu_n) J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^3 P_j^*(Y_m) I_1(Y_m) K_1(Y_m)}{Q'(iY_m)(b_i^2 - Y_m^2)(Y_m^2 + \mu_n^2)(Y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)}.$$

$$\beta_{0,0}^{(1)} = \int_0^1 \rho \beta_0^{(1)}(\rho) d\rho = \frac{1}{2} \frac{1 + K_1^1 h}{K_1^1 K_2^1 h + K_1^1 + K_2^1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_1^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{Y_m Q'(iy_m)},$$

$$\beta_{0,\kappa}^{(1)} = \int_0^1 \rho \beta_{\kappa}^{(1)}(\rho) d\rho = 2J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m P_1^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)},$$

$$\beta_{n,0}^{(1)} = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \beta_0^{(1)}(\rho) d\rho = \beta_{0,n}^{(1)},$$

$$\beta_{n,\kappa}^{(1)} = \begin{cases} \beta_{n,\kappa}, & \kappa \neq n \\ \beta_{n,\kappa} + \frac{1}{2} \frac{P_1(\mu_n)}{Q(\mu_n)} J_0^2, & \kappa = n \end{cases}, \quad \beta_{n,\kappa}^{(1)} = \int_0^1 \rho \beta_{\kappa}^{(1)}(\rho) J_0(\mu_n \rho) d\rho,$$

$$\beta_{n,\kappa} = 2J_0(\mu_{\kappa}) J_0(\mu_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^3 P_1^*(y_m) K_1(y_m) I_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)(y_m^2 + \mu_n^2)},$$

$$\gamma_0^{(1)}(1) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m P_1^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)},$$

$$\gamma_{\kappa}^{(1)}(1) = 2J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^3 P_1^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)},$$

$$\beta_0^{(1)}(1) = g_0^{(1)} b_1^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_1^*(y_m) I_0(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)},$$

$$\beta_{\kappa}^{(1)}(1) = \frac{P_1(\mu_{\kappa})}{Q(\mu_{\kappa})} J_0(\mu_{\kappa}) + 2J_0(\mu_{\kappa}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P_1^*(y_m) I_0(y_m) K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2 + \mu_{\kappa}^2)}.$$

Температурне поле у двох тілах, враховуючи (11–13,16,20,35), знаходиться за формулами:

а) для циліндричної області

$$T(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ 1 + \left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1} (\zeta - \ell) - 2 \sum_{\kappa=0}^N X_{\kappa} \left[\left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1} \varepsilon_{0,\kappa}^{(1)} (\zeta - \ell) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \rho) \varepsilon_{m,\kappa}^{(1)} sh \mu_m (\zeta - \ell)}{J_0^2(\mu_m) \Delta^{(2)}(\mu_m, b_1) ch \mu_m \ell} \right] - 2I_1(b_1) Y_0 \left[\frac{1}{b_1} \left(\ell + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1} (\zeta - \ell) - \right. \right. \\ \left. \left. - b_1 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_{\kappa} \rho) sh \mu_{\kappa} (\zeta - \ell)}{J_0(\mu_{\kappa}) \Delta^{(2)}(\mu_{\kappa}, b_1) ch \mu_{\kappa} \ell (\mu_{\kappa}^2 + b_1^2)} \right] \right\} \begin{cases} (0 \leq \zeta \leq \ell) \\ (0 \leq \rho < 1) \end{cases} \quad (36)$$

б) для шару

$$T^1(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ G_0(\rho, \zeta) X_0^{(1)} + \sum_{\kappa=1}^N G_\kappa(\rho, \zeta) X_\kappa^{(1)} \right\}, (-h \leq \zeta \leq 0, 0 \leq \rho < \infty), \quad (37)$$

$$\text{де } G_0(\rho, \zeta) = \frac{1 + K_1^1(h + \zeta)}{K_1^1 K_2^1 h + K_1^1 + K_2^1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^*(y_m, \zeta) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{Q'(iy_m)}, \quad (\rho < 1);$$

$$G_\kappa(\rho, \zeta) = \frac{P(\mu_\kappa, \zeta) \mu_\kappa}{Q(\mu_\kappa)} J_0(\mu_\kappa \rho) + 2 \mu_\kappa J_0(\mu_\kappa) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P^*(y_m, \zeta) I_0(y_m \rho) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_\kappa^2) Q'(iy_m)}, \quad (\rho < 1).$$

$$G_0(\rho, \zeta) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^*(y_m, \zeta) K_0(y_m \rho) I_1(y_m)}{Q'(iy_m)}, \quad (\rho > 1);$$

$$G_\kappa(\rho, \zeta) = -2 \mu_\kappa J_0(\mu_\kappa) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P^*(y_m, \zeta) K_0(y_m \rho) I_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_\kappa^2) Q'(iy_m)}, \quad (\rho > 1);$$

$$P(\eta, \zeta) = \eta \operatorname{ch}(h + \zeta) \eta + K_1^1 \operatorname{sh}(h + \zeta) \eta, \quad P^*(Y_m, \zeta) = y_m \cos(h + \zeta) y_m + K_1^1 \operatorname{sh}(h + \zeta) y_m.$$

Якщо коефіцієнт проміжкового шару $\lambda_0^* = 0$, то отримаємо розв'язок задачі [3], а якщо товщина шару $h \rightarrow \infty$, то розв'язок задачі [9].

Розглянуто числовий приклад для знаходження температури в циліндрі й шарі. Згідно з формулами (36,37) при $\ell = 1$; $h = 2$; $\alpha_0^* = 0$; $T_c^0 = 0$; $K_1 = 0,5$; $K_2 = \infty$.

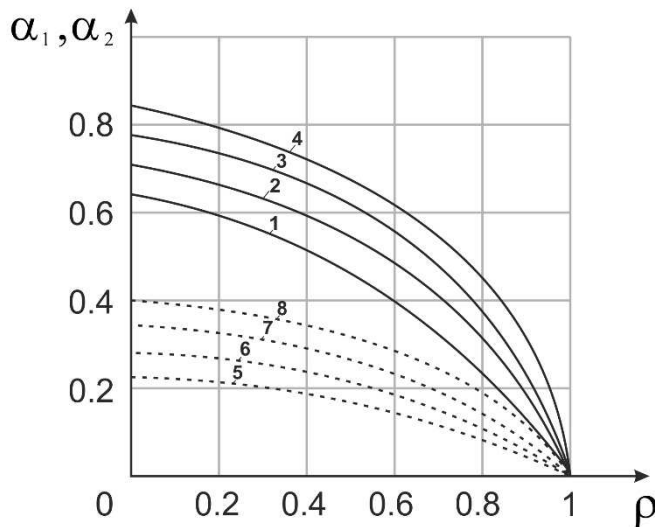


Рисунок 1. Розподіл температури для різних значень $\ell_z = \ell_z^1$ при фіксованому $h_0^1 = 1$.

Крива: 1 - $\ell_z = 0,5$; 2 - $\ell_z = 1$; 3 - $\ell_z = 5$;
4 - $\ell_z = \infty$; 5 - $\ell_z^1 = 0,5$; 6 - $\ell_z^1 = 1$;
7 - $\ell_z^1 = 5$; 8 - $\ell_z^1 = \infty$

Figure 1. Temperature distribution for Different parameters $\ell_z = \ell_z^1$ under fixed $h_0^1 = 1$.

Curve: 1 - $\ell_z = 0,5$; 2 - $\ell_z = 1$; 3 - $\ell_z = 5$;
4 - $\ell_z = \infty$; 5 - $\ell_z^1 = 0,5$; 6 - $\ell_z^1 = 1$;
7 - $\ell_z^1 = 5$; 8 - $\ell_z^1 = \infty$

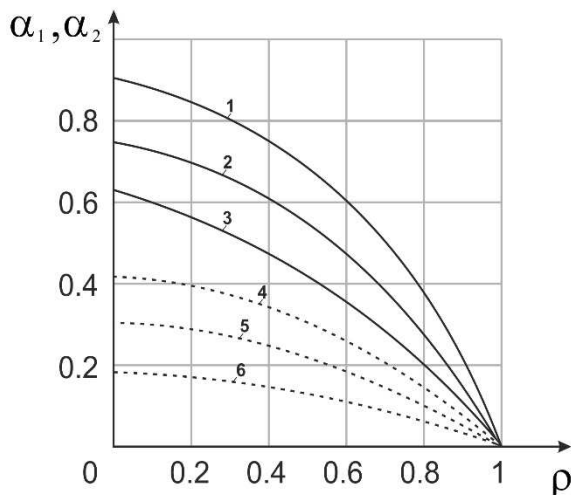


Рисунок 2. Розподіл температури для різних значень контактної провідності h_0^1 , при $\ell_z = \ell_z^1 = \infty$.

Крива: 1 - $h_0^1 = 1$, 2 - $h_0^1 = 5$, 3 - $h_0^1 = \infty$,
4 - $h_0^1 = 1$, 5 - $h_0^1 = 5$, 6 - $h_0^1 = \infty$

Figure 2. Temperature distribution for different value of contact conductivity h_0^1 , when $\ell_z = \ell_z^1 = \infty$.

Curve: 1 - $h_0^1 = 1$, 2 - $h_0^1 = 5$, 3 - $h_0^1 = \infty$,
4 - $h_0^1 = 1$, 5 - $h_0^1 = 5$, 6 - $h_0^1 = \infty$

Розв'язувалася система лінійних алгебраїчних рівнянь (34) з 20-ма невідомими, що забезпечує досить високу точність задоволення граничних умов. На рис.1 і 2 наведено графіки розподілу температури для циліндра $\alpha_1 = \frac{T(\rho)}{T_0}$ і шару $\alpha_2 = \frac{T^1(\rho)}{T_0}$ уздовж безрозмірної координати ρ при різних значеннях контактної провідності $h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}$ і параметрів $\ell_z = \frac{\lambda_z R}{\lambda_0^*}$, $\ell_z^1 = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_0^*}$.

Пунктирною лінією зображено графік для температури $\alpha_2 = \frac{T^1(\rho)}{T_0}$.

Висновки. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля в будь-якій точці системи циліндр–шар.

Дослідження показують, що нульова температура на бічній поверхні проміжкового шару призводить до зменшення температури в зоні контакту. Це пояснюється тим, що частина тепла виходить через бічну поверхню проміжкового шару. Контактна провідність h_0^1 також значно впливає на розподіл температурних полів.

Conclusions. Taking advantage of the Hanckel's integral transformation and the Furier's method the solution of the temperature task is reduced to finding some constants from the system of linear algebraic equations, due to which fields in any point of the cylinder–layer system is found.

Investigations testify that zero temperature on the side surface of the intermediate layer results in the decrease of temperature in the body contact area. It is caused by the fact, that some portion of heat comes through the side surface of the intermediate layer. Contact conductivity h_0^1 sufficiently affects the distribution of temperature fields.

Список використаної літератури

1. Грилицкий, Д.В. Осесиметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун-те, 1981. – 135 с.
2. Окрепкий, Б.С. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр – півпростір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – № 3. – С.23–27.
3. Окрепкий, Б.С. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр – шар при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010 – Т.15. – №3. – С.171–176.
4. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний шар з урахуванням неідеального теплового контакту [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2011. – Т.16. – №2. – С.42–52.
5. Подстригач, Я.С. Условия теплового контакта твердых тел [Текст] / Я.С. Подстригач // ДАН УССР, Серия А. – 1963. – №7. – С.188–192.
6. Подстригач, Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, соприкасаемых с помощью тонкого промежуточного слоя [Текст] / Я.С. Подстригач // ИФЖ. – 1963. – Т.6. – №10. – С.129–136.
7. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости [Текст] / А.Д. Коваленко. – Киев: Наук. думка, 1970. – 304 с.
8. Мигович, Ф.М. Обчислення груп невластних інтегралів, які містять функції Бесселя 1-го роду [Текст] / Ф.М. Минович, Б.С. Окрепкий / Збірник наукових праць «Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач». – Вип.8. – Київ, 1995. – С.133–137.

9. Окрепкий, Б.С. Визначення температурного поля в системі тіл циліндр – півпростір при неідеальному тепловому контакті через проміжковий шар [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2013. – №1. – С.253–262.

Отримано 15.01.2015