

УДК 539.3

**О. Панчук; Г. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ПІВПРОСТОРУ

Резюме. Наведено розв'язок осесиметричної контактної задачі про тиск штампа складної конфігурації на пружний ізотропний півпростір з урахуванням попередніх напружень. Побудовано функції розподілу контактних напружень для граничної площини. Проаналізовано вплив конфігурації штампа на розподіл контактних напружень.

Ключові слова: напруження, залишкові деформації, штамп складної конфігурації, півпростір.

O. Panchuk, H. Habrusiev, B. Shelestovskiy

CONTACT PROBLEM FOR PUNCH OF COMPLEX SHAPE AND PRELIMINARY STRESSED SEMI-SPACE

Summary. Determination of contact stresses and deformations in the interaction of rigid and elastic bodies stamps with existing permanent deformations is one of the most actual tasks of modern construction and engineering. As it is known [2], residual deformation is almost always available in the structural elements and machine parts. The nature of their appearance can be very different: irreversible deformation (plasticity, creep), structural changes in the material, changes of the aggregate state in some areas, mechanical, chemical and technological processes, etc. Resultant stress can cause fracture and accelerate some phase transitions, corrosion in particular.

To improve the accuracy of calculations the residual must be taken into account, which directly affect the state of bodies. Taking into account all the factors that affect the interaction of the body is one of the key problems to determine the stability, reliability and other characteristics. Therefore, consideration of residual stress in the study of contact interaction of elastic bodies is an important task.

Research problems investigations of the contact interaction of the preliminary stressed bodies in our country and abroad had appeared in the sufficient quantity only by the end of the last century. First of all it is due to the fact that the linear elasticity theory does not consider the residual stresses in bodies. In general, strict proper statement of such problems requires the use of system of the nonlinear elasticity theory, however, for the sufficiently large values of the initial stresses its linearized version can be referred to.

In the article the solution of axisymmetric contact problem of pressure a punch of complex shape for an elastic isotropic half-space, taking into account preliminary stresses is described. Besides distribution function of contact stresses and displacements for the plane boundary of semi-space was created. Influence of residual stress on the distribution of contact stresses under the punch was investigated.

With basic relations of the linearized elasticity theory, the problem is treated as the construction of the solution of the double integral equations. The authors have developed a method of approximate solutions of this type. The main idea of this method is to represent the unknown distribution function of the contact stresses in the form of the Fourier series with unknown coefficients and to construct a system of the linear equations for finding them.

To demonstrate the proposed methods the numerical example of the construction of the contact stresses distribution function is presented in the paper.

Besides, the residual deformation field characteristics effect on the amount and nature of the contact stresses under punch has been analyzed.

Key words: contact stresses, punch of complex shape, isotropic semi-space, residual deformations.

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень при взаємодії жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями є важливим завданням для дослідження міцності деталей машин і елементів споруд. Цю

проблему вирішують також при розрахунку конструкцій на пружній основі для раціонального використання матеріалу і ще в цілому ряді виробничих питань. Для підвищення точності розрахунків необхідно брати до уваги якомога більше факторів, що впливають на взаємодію тіл. Залишкові деформації є одним із таких ключових факторів. Тому їх врахування при дослідженні контактної взаємодії пружних тіл є актуальним завданням.

Розв'язання задачі із урахуванням залишкових напружень у тілах вимагає застосування апарату нелінійної теорії пружності. Проте при досить великих значеннях початкових напружень достатнім є використання лінеаризованого варіанта. Зважаючи на розвиток комп'ютерної техніки, а також на наукові досягнення у сфері лінеаризованої теорії пружності, можна ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі відносно цілого ряду задач. Однією з таких є вивчення питання взаємодії жорстких кільцевих та параболоїдних штампів складної конфігурації з пружним ізотропним шаром, у якому наявні залишкові деформації.

Аналіз останніх досліджень. Вивченням взаємодії жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями займалося багато вчених, зокрема й вітчизняних. Контактні задачі для тіл із початковими напруженнями при конкретній формі пружного потенціалу розглядали Александров В.М., Філіпова Л.М., Артюнян Н.Х., Сметаніна Б.І. та інші. Приклади розв'язку задач кручення для пружних тіл з початковими напруженнями наведено в роботах Гузя О.М., Бабица С.Ю., Глухова Ю.П., Рудніцкогo В.Б. [2]. Взаємодію між кількома штампамі на пружному півпросторі розглянуто в роботах Аргатова І.І.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної контактної задачі про тиск штампа складної конфігурації на пружний півпростір з урахуванням попередніх напружень. Отримати формули для визначення напружень, які виникли у півпросторі внаслідок дії штампа. Визначити точки досягнення максимальних напружень у зоні контакту двох тіл.

Постановка задачі. Розглянемо осесиметричну задачу про тиск жорсткого кільцево-параболоїдного штампа на попередньо напружений півпростір, у якому наявні певні залишкові деформації. Штмп складається з двох частин, жорстко об'єднаних між собою. Перша утворена внаслідок обертання навколо спільної осі двох віток парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання. Друга – внаслідок обертання ще однієї вітки параболі, вершина якої спряжена з віссю обертання перпендикулярним до неї відрізком. Вершини всіх трьох парабол лежать на одній прямій, перпендикулярній до осі обертання. Осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання, що співпадає з лінією дії сили P . Штмп втискується в півпростір з постійною силою P поступально, без обертання і тертя.

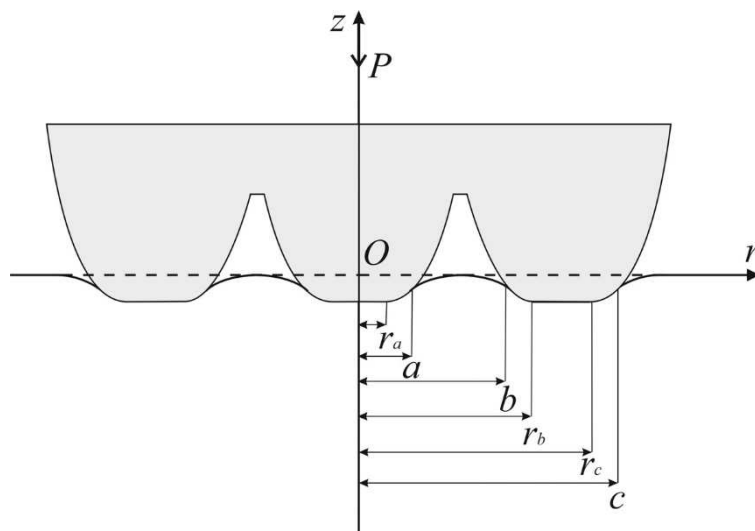


Рисунок 1. Схема контактної взаємодії

Figure 1. Scheme of contact interaction

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, φ, z) так, щоб координатна площина (r, O, φ) співпадала з граничною площиною півпростору, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис.1).

Виходячи із формулювання задачі, можна описати функцію, обертанням графіка якої навколо осі Oz утворено штамп, у вигляді

$$W(r) = \begin{cases} \frac{1}{2R_1}(r-r_a)^2, & r_a < r \leq \frac{\sqrt{R_2}r_a + \sqrt{R_1}r_b}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}; \\ \frac{1}{2R_2}(r-r_b)^2, & \frac{\sqrt{R_2}r_a + \sqrt{R_1}r_b}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} < r < r_b; \\ \frac{1}{2R_3}(r-r_c)^2, & r_c < r < c; \\ 0, & 0 < r < r_a, r_b < r < r_c. \end{cases} \quad (1)$$

Вважаємо, що залишкові напруження, які виникли у півпросторі, є однорідними. Отже, можна використати такі вирази для компонентів тензора напружень та вектора переміщень [1]:

$$\sigma_{rz}(r, z) = \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 \left[(A_1 + A_2(s_0 + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(s_0 - \alpha z))e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = c_{44}(1+m_1)l_1 \int_0^\infty \alpha^3 \left[(A_1 + A_2(s + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(s - \alpha z))e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (2)$$

$$u_r(r, z) = - \int_0^\infty \alpha^2 \left[(A_1 + A_2(1 + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(1 + \alpha z))e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$u_z(r, z) = \frac{m_1}{n_1} \int_0^\infty \alpha^2 \left[(A_1 + A_2(s_1 + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(s_1 - \alpha z))e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r) d\alpha.$$

У співвідношеннях (2) константи c_{44}, m_1, n_1, l_1 залежать від характеру пружного потенціалу.

На граничній площині півпростору при $z = 0$, ввівши позначення $F_1 = A_1 + B_1$, $F_2 = A_2 + B_2$, отримаємо

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s_0 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = c_{44}(1+m_1)l_1 \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s F_2) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (4)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{m_1}{n_1} \int_0^\infty \alpha^2 (F_1 + s_1 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (5)$$

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд

$$\sigma_{zz} = 0, a \leq r < b, r > c; \quad (6)$$

$$\sigma_{rz} = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (7)$$

$$u_z = W_1(r), 0 \leq r \leq a; \quad (8)$$

$$u_z = W_2(r), b < r < c. \quad (9)$$

Функції $W_1(r)$ та $W_2(r)$ описують переміщення точок граничної площини пружного півпростору у районі його контракту із жорстким штампом. А тому, виходячи із вигляду функції $W(r)$ (1), можна записати

$$W_1(r) = \begin{cases} W_1(a) - \frac{(a-r_a)^2}{2R_1}, & 0 < r \leq r_a; \\ W_1(a) - \frac{1}{2R_1} \left[(a-r_a)^2 - (r-r_a)^2 \right], & r_a < r \leq a. \end{cases}$$

$$W_2(r) = \begin{cases} W_2(b) - \frac{1}{2R_2} \left[(b-r_b)^2 - (r-r_b)^2 \right], & b \leq r \leq r_b; \\ W_2(b) - \frac{(b-r_b)^2}{2R_2}, & r_b < r \leq r_1; \\ W_2(c) - \frac{(c-r_c)^2}{2R_3}, & r_1 < r \leq r_c; \\ W_2(c) - \frac{1}{2R_3} \left[(c-r_c)^2 - (r-r_c)^2 \right], & r_c < r \leq c; \end{cases}$$

$$\text{де } r_1 = \frac{r_b + r_c}{2}.$$

Очевидно, що виходячи із цілісної структури штампа, повинна виконуватись умова

$$W_1(r_a) = W_2(r_b) = W_2(r_c). \quad (10)$$

Задовольнивши умову (7), отримаємо

$$\frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s_0 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha = 0,$$

звідки легко отримати співвідношення між невідомими функціями F_1 та F_2

$$F_1 + S_0 F_2 = 0; F_1 = -S_0 F_2. \quad (11)$$

Із урахуванням (11) вирази (4) та (5) матимуть вигляд

$$\sigma_{zz}(r, 0) = c_{44}(1+m_1) l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 (S - S_0) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (12)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{m_1}{n_1} \int_0^\infty \alpha^2 F_2(S_1 - S_0) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (13)$$

Введемо невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$, за допомогою яких продовжимо співвідношення (10) на проміжок $0 \leq r < \infty$

$$c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha = x(r) (\eta(r - a)) + y(r) (\eta(r - b) - \eta(r - c)), \quad (14)$$

де $\eta(r)$ – функція Гевісайда.

Функції $x(r)$ та $y(r)$ визначають розподіл контактних напружень під штампом. Враховуючи неперервність цих функцій, а також рівність нулю на границі області контакту (при $r = a$, $r = b$ та $r = c$) представимо $x(r)$ та $y(r)$ у вигляді відрізків узагальненого ряду Фур'є

$$x(r) = \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad y(r) = \sum_{n=1}^N b_n(r) L_n(r).$$

$$L_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{\alpha} r\right) Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\frac{\gamma_n}{\alpha} r\right) J_0(\gamma_n), \quad \text{— де } (\gamma_n) \text{ додатні корені рівняння}$$

$$\left(\frac{c}{b} x\right) Y_0(x) - Y_0\left(\frac{c}{b} x\right) J_0(x) = 0,$$

λ_n – додатні корені функції Бесселя $J_0(x)$.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (14), отримаємо

$$\alpha^2 F_2 = \frac{1}{c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1} \left(\int_0^a r x(r) J_0(\alpha r) dr + \int_b^c r y(r) J_0(\alpha r) dr \right). \quad (15)$$

$$\text{Введемо позначення } K_1 = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1} c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1}.$$

Задовольнивши граничні умови (8) та (9), з урахуванням співвідношення (15) отримаємо

$$K_1 \int_0^\infty \sum_{n=1}^N (a_n \Psi_n(\alpha) + b_n \Phi_n) J_0(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} W_1(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, & 0 \leq r \leq r_a, \\ W_1(a) - \frac{1}{2R_1} [(r_a - a)^2 - (r_a - r)^2], & r_a < r \leq a, \end{cases} \quad (16)$$

$$K_1 \int_0^\infty \sum_{n=1}^N (a_n \Psi_n(\alpha) + b_n \Phi_n) J_0(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} W_2(b) - \frac{1}{2R_2} [(r_b - b)^2 - (r_b - r)^2], & b \leq r \leq r_b, \\ W_2(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, & r_b < r \leq r_1, \end{cases} \quad (17)$$

$$K_1 \int_0^\infty \sum_{n=1}^N (a_n \Psi_n(\alpha) + b_n \Phi_n) J_0(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} W_2(c) - \frac{1}{2R_3} (r_c - c)^2, & r_1 < r \leq r_c, \\ W_2(c) - \frac{1}{2R_3} [(r_a - a)^2 - (r_a - r)^2], & r_c < r \leq c, \end{cases} \quad (18)$$

де $\Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr$, $\Phi_n(\alpha) = \int_b^c r L_n(r) J_0(\alpha r) dr$.

Використавши функцію Гевісайда, співвідношення (16) можна записати у вигляді

$$K_1 \left[\sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) (J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)) d\alpha \right) + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^\infty \Phi_n(\alpha) (J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)) d\alpha \right) \right] = \\ = \frac{1}{2R_1} [(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2] (\eta(r - r_a) - \eta(r - a)) - \frac{1}{2R_1} \eta(r_a - r) (r_a - a)^2. \quad (19)$$

Помноживши обидві частини співвідношення (19) на $r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right)$, $q = \overline{1, N}$ та проінтегрувавши отриманий вираз на відрізку $[0, a]$ по r , отримаємо

$$K_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) \left[\Psi_q(\alpha) - J_0(a\alpha) \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr \right] d\alpha \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^\infty \Phi_n(\alpha) \left[\Psi_q(\alpha) - J_0(a\alpha) \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr \right] d\alpha \right) \right\} = \\ = \frac{1}{2R_1} \left(\int_{r_a}^a r (r_a - r)^2 J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr - (r_a - a)^2 \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr \right). \quad (20)$$

Аналогічно, переписавши за допомогою функції Гевісайда співвідношення (17) та (18), помноживши обидві частини отриманих рівностей на $r L_q(r)$, $q = \overline{1, N}$ та проінтегрувавши отримані вирази по r на відрізках $[b, r_1]$ та $[r_1, c]$ відповідно, отримаємо

$$K_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) \left[\Phi_q^{(1)}(\alpha) - J_0(b\alpha) \int_b^{r_1} r L_q(r) dr \right] d\alpha \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^\infty \Phi_n(\alpha) \left[\Phi_q^{(1)}(\alpha) - J_0(b\alpha) \int_b^{r_1} r L_q(r) dr \right] d\alpha \right) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2R_2} \left(\int_b^{r_b} r(r_b - r)^2 L_q(r) dr - (r_b - b)^2 \int_b^{r_1} r L_q(r) dr \right), \\
&K_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) \left[\Phi_q^{(2)}(\alpha) - J_0(c\alpha) \int_{r_1}^c r L_q(r) dr \right] d\alpha \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^\infty \Phi_n(\alpha) \left[\Phi_q^{(2)}(\alpha) - J_0(c\alpha) \int_{r_1}^c r L_q(r) dr \right] d\alpha \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{2R_3} \left(\int_{r_c}^c r(r_c - r)^2 L_q(r) dr - (r_c - c)^2 \int_{r_1}^c r L_q(r) dr \right),
\end{aligned}$$

де $\Phi_q^{(1)}(\alpha) = \int_b^{r_1} r L_q(r) J_0(\alpha r) dr$, $\Phi_q^{(2)}(\alpha) = \int_{r_1}^c r L_q(r) J_0(\alpha r) dr$, $\Phi_q(\alpha) = \Phi_q^{(1)}(\alpha) + \Phi_q^{(2)}(\alpha)$.

Додавши останні дві рівності, отримаємо

$$\begin{aligned}
&K_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) \left[\Phi_q(\alpha) - J_0(b\alpha) \int_b^{r_1} r L_q(r) dr - J_0(c\alpha) \int_{r_1}^c r L_q(r) dr \right] d\alpha \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^\infty \Phi_n(\alpha) \left[\Phi_q(\alpha) - J_0(b\alpha) \int_b^{r_1} r L_q(r) dr - J_0(c\alpha) \int_{r_1}^c r L_q(r) dr \right] d\alpha \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{2R_2} \left(\int_b^{r_b} r(r_b - r)^2 L_q(r) dr - (r_b - b)^2 \int_b^{r_1} r L_q(r) dr \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2R_3} \left(\int_{r_c}^c r(r_c - r)^2 L_q(r) dr - (r_c - c)^2 \int_{r_1}^c r L_q(r) dr \right). \tag{21}
\end{aligned}$$

Використавши метод суперпозиції та ввівши позначення

$$a_n = \frac{1}{K_1} \left(a_n^{(1)} \frac{1}{2R_1} + a_n^{(2)} \frac{1}{2R_2} + a_n^{(3)} \frac{1}{2R_3} \right), b_n = \frac{1}{K_1} \left(b_n^{(1)} \frac{1}{2R_1} + b_n^{(2)} \frac{1}{2R_2} + b_n^{(3)} \frac{1}{2R_3} \right),$$

із співвідношень (20) та (21) отримаємо три системи відносно невідомих $a_n^{(1)}$ та $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ та $b_n^{(2)}$, $a_n^{(3)}$ та $b_n^{(3)}$.

Введемо позначення $\frac{1}{2R_i} = z_i$. Для визначення параметрів z_i застосуємо умову рівноваги штампа

$$\int_0^a r \sigma_{zz}(r, 0) dr + \int_b^c r \sigma_{zz}(r, 0) dr = P.$$

Із останньої рівності отримаємо

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_0^a r J_0\left(\frac{r}{a} \lambda_n\right) dr + \sum_{n=1}^N b_n \int_b^c r L_n(r) dr = P,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2 + a_n^{(3)} z_3) \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^{(1)} z_1 + b_n^{(2)} z_2 + b_n^{(3)} z_3) \varphi_n = K_1 P,$$

$$\psi_n = \int_0^a r J_0 \left(\frac{r}{a} \lambda_n \right) dr, \quad \varphi_n = \int_b^c r L_n(r) dr$$

або ввівши позначення $z_i^* = \frac{z_i}{K_1 P} = \frac{1}{2K_1 P R_i}$, $i = \overline{1,3}$

$$z_1^* \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(1)} \psi_n + b_n^{(1)} \varphi_n) + z_2^* \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(2)} \psi_n + b_n^{(2)} \varphi_n) + z_3^* \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(3)} \psi_n + b_n^{(3)} \varphi_n) = 1. \quad (22)$$

Використавши умову жорсткості штамп (10), тобто умову рівності вертикальних переміщень точок граничної площини півпростору при $r = r_a = r_b = r_c$, отримаємо

$$\begin{cases} W_1(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2 = W_2(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, \\ W_1(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2 = W_2(c) - \frac{1}{2R_3} (r_b - c)^2. \end{cases} \quad (23)$$

З першого рівня системи (23) отримаємо

$$\begin{aligned} K_1 \left[\sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha)) d\alpha \right) + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^{\infty} \Phi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha)) d\alpha \right) \right] = \\ = \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2 - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2. \\ z_1^* \left(\sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} M_n^{(1)}) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(1)} M_n^{(2)}) - (r_a - a)^2 \right) + z_2^* \left(\sum_{n=1}^N (a_n^{(2)} M_n^{(1)}) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(2)} M_n^{(2)}) + (r_b - b)^2 \right) + \\ + z_3^* \left(\sum_{n=1}^N (a_n^{(3)} M_n^{(1)}) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(3)} M_n^{(2)}) \right) = 0, \quad (24) \end{aligned}$$

де $M_n^{(1)} = \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha)) d\alpha$, $M_n^{(2)} = \int_0^{\infty} \Phi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha)) d\alpha$.

Аналогічно, із другого рівняння (23) отримаємо

$$\begin{aligned} K_1 \left[\sum_{n=1}^N \left(a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(c\alpha)) d\alpha \right) + \sum_{n=1}^N \left(b_n \int_0^{\infty} \Phi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(c\alpha)) d\alpha \right) \right] = \\ = \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2 - \frac{1}{2R_3} (r_c - c)^2. \end{aligned}$$

$$z_1^* \left(\sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} M_n^{(3)}) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(1)} M_n^{(4)}) - (r_a - a)^2 \right) + z_2^* \left(\sum_{n=1}^N (a_n^{(2)} M_n^{(3)}) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(2)} M_n^{(4)}) \right) + z_3^* \left(\sum_{n=1}^N (a_n^{(3)} M_n^{(3)}) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(3)} M_n^{(4)}) + (r_c - c)^2 \right) = 0, \quad (25)$$

де $M_n^{(3)} = \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(c\alpha)) d\alpha$, $M_n^{(4)} = \int_0^\infty \Phi_n(\alpha) (J_0(a\alpha) - J_0(c\alpha)) d\alpha$.

Невідомі z_i^* , $i=\overline{1,3}$, знаходимо із системи рівнянь (22), (24) та (25).

Остаточні формули для знаходження розподілу контактних напружень під штампом матимуть вигляд

$$\sigma_{zz}(r, 0) = x(r) = P \sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} z_1^* + a_n^{(2)} z_2^* + a_n^{(3)} z_3^*) J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), 0 < r < a,$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = y(r) = P \sum_{n=1}^N (b_n^{(1)} z_1^* + b_n^{(2)} z_2^* + b_n^{(3)} z_3^*) L_n(r), b < r < c.$$

Розв'язок задачі дозволяє дослідити вплив форми жорсткого штампа на характер розподілу контактних напружень.

У якості числового прикладу наведемо розв'язок задачі для таких значень параметрів: $a = 0.4$; $b = 1.5$; $b = 1.8$; $r_a = 0$; $r_b = 1.6$; $r_c = 1.7$.

На рис.2 побудовано графік безрозмірної величини σ^* , що описує розподіл контактних напружень під штампом. Аналіз отриманих результатів дає можливість стверджувати, що екстремальні значення контактних напружень досягаються у точках з'єднання прямолінійної та параболічної ділянки кривої, обертянням якої утворено поверхню штампа.

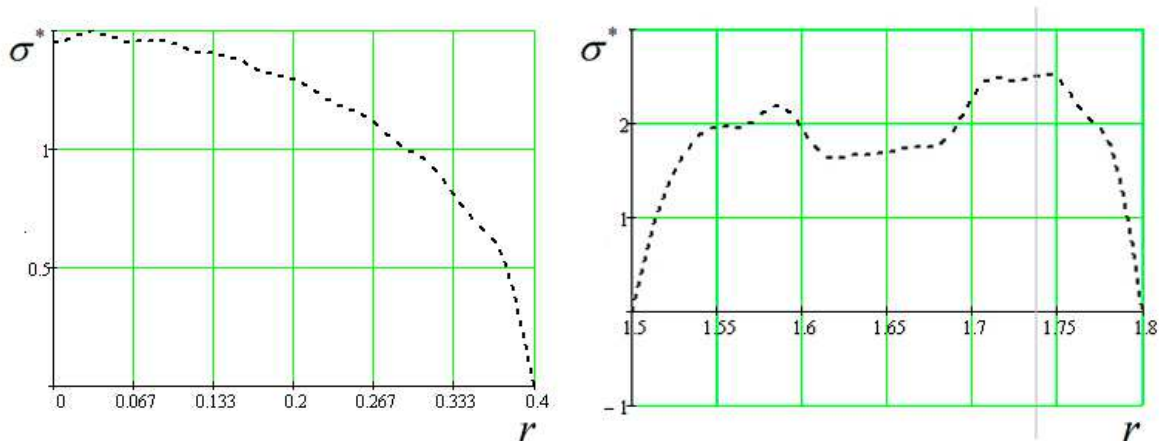


Рисунок 2. Розподіл контактних напружень під штампом

Figure 2. The distribution of contact stresses under the punch

На рис.3 побудовано графік безрозмірної величини, що описує переміщення точок граничної площини півпростору. Пунктирна крива відповідає випадку відсутності у півпросторі залишкових деформацій, крива 1 – наявності стискуючих, а 2 – наявності розтягуючих залишкових деформацій. Як бачимо з рисунка, поява у півпросторі залишкових деформацій призводить до зміни глибини втискування штампа у

півпростір, і, як наслідок, до зміни площадки контакту та абсолютної величини контактних напружень.

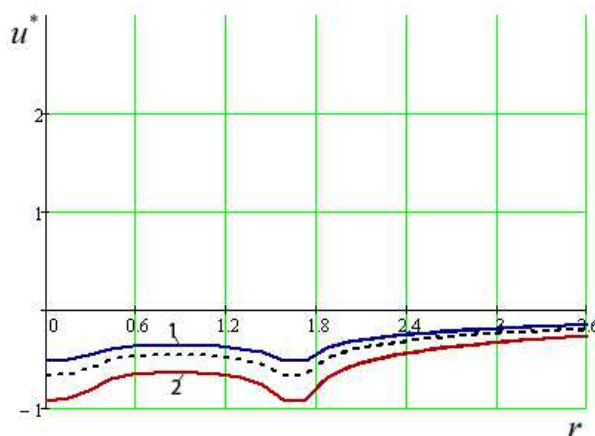


Рисунок 3. Переміщення точок граничної площини півпростору

Figure 3. Displacement of the semi-space boundary plane points

Висновки. Проведений числовий аналіз дає можливість стверджувати, що поява у тілі залишкових деформацій розтягу викликає звуження ділянки контакту та збільшення абсолютного значення контактних напружень. Виникнення деформацій стиску спричиняє розширення ділянки контакту та зменшення абсолютного значення контактних напружень. Достовірність зроблених висновків підтверджує їх узгодження із результатами, отриманими іншими авторами [4,5].

Conclusions. Numerical example of searching components of contact stresses for both contact areas is considered. Numerical analysis allows to state that the appearance of the residual tensile stress in the body causes a narrowing of the contact area and increasing of the absolute value of the contact stresses. Appearance of the compression strains causes the broadening of contact area and reduces the absolute value of the contact stresses. Reliability of conclusions confirms their agreement with the results obtained by other authors [4,5].

Список використаної літератури

1. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (окончательными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький, 2006. – 710 с.
2. Бабич, С.Ю. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С.Ю. Бабич, А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т.40, № 7. – С.41–69.
3. Гузь, А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь. – Киев.: Наукова думка, 1983. – 296 с.
4. Гузь, О.М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / О.М. Гузь, В.Б. Рудницький // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: Зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – 2004. – С.5–35.
5. Габрусєва, І.Ю. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором [Текст] / І.Ю. Габрусєва, Б.Г. Шелестовський // Вісник ТНТУ. – 2009. – №3.

Отримано 23.01.2015