

УДК 539.3

Р. Юхим; П. Горбач

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

## МІЦНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ТІЛ ІЗ ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ТА КОЛІНЕАРНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

**Резюме.** Досліджено особливості деформування та руйнування пружно-пластичних тіл із періодичними системами включень. Задачу зведено до розв'язування сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Отримано числові розв'язки рівнянь методом механічних квадратур. Проведено графічний аналіз та встановлені основні чинники, які впливають на міцність тіла із системами періодичних паралельних та колінеарних включень.

**Ключові слова:** системи колінеарних та паралельних включень, пластична зона, інтегро-диференціальне рівняння, граничне навантаження.

R. Yukhym, P. Gorbach

## STRENGTH OF ELASTO-PLASTIC BODIES WITH PERIODIC SYSTEMS OF PARALLEL AND COLINEAR INCLUSIONS

**The summary.** The peculiar properties of deformation and destruction of elastic-plastic bodies with inclusions are investigated. A task is taken to solving singular integro-differential equations. Using mechanical square method the numerical solution of this equations are got. The graphic analysis conducted and set basic factors which influence on strength of body with the systems of periodic parallel and colinear inclusions are established.

**Key words:** system colinear and parallel inclusion, plastic zone, inegral differential equation, maximum loading.

Проблему деформування пружно-пластичних матеріалів в околі включень досліджували в роботах [1-5], вважаючи матеріал включень абсолютно жорстким. В роботі [6] побудована модель деформування та руйнування пружно-пластичного матеріалу в околі тонкого пружного включення.

Як правило, в тілах зустрічаються не поодинокі, а системи включень. Від їх взаємодії в процесі навантаження суттєвим чином залежить міцність тіла. Метою даної роботи є встановлення впливу включень при різних варіантах їх розміщення на деформування та руйнування матриці. Розглянуті варіанти паралельного (рис. 1,а) та колінеарного розміщення систем включень (рис. 1,б).

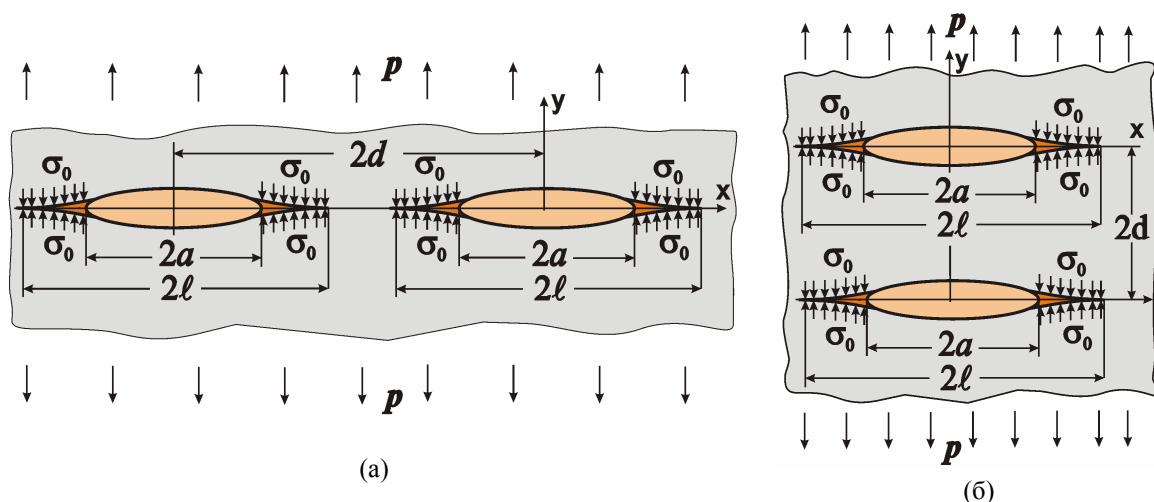


Рисунок 1 – Схематичне зображення системи колінеарних (а) та паралельних (б) включень

**Колінеарне розміщення системи включень.** Розглядається задача про розтяг на безмежності зусиллями інтенсивності  $p$  необмеженого пружно-пластичного тіла, що містить нескінченну систему включень. Включення розміщені вздовж осі  $x$  на відстані  $2d$  одне від одного (рис. 1).

Під навантаженням в околі включень на їх продовженні формуються зони непружних деформацій (пластичні ядра). Вздовж поверхонь розділу матеріалів приймаються умови ідеального механічного контакту. Реакцію матеріалу включення на зусилля розтягу тіла при умові, що  $E_1/E < 1$  можна визначити за допомогою моделі вінклерівської основи [7]

$$\sigma_y(x) = \frac{[u_y^*(x)]}{2h(x)} E_1, \quad (1)$$

тут  $[u_y^*(x)]$  – стрибок переміщень точок поверхні включення в процесі розтягу тіла;  $2h(x)$  – товщина включення;  $E_1, E$  – модулі пружності матеріалу включення та основного матеріалу відповідно. На межі пластичного ядра і пружно деформованого матеріалу напруження приймемо у відповідності до  $\delta_c$  – моделі [8]

$$\sigma_y = \sigma_0, \quad (2)$$

Для ідеального пружно-пластичного матеріалу  $\sigma_0 = \sigma_T$  ( $\sigma_T$  – границя текучості). Для матеріалу, що зміцнюється,  $\sigma_0$  визначають, наприклад, на основі діаграми розтягу гладкого зразка, а відтак приймають, що  $\sigma_0 = 1/2(\sigma_T + \sigma_\epsilon)$  або підраховують  $\sigma_0$  за формулою [8]

$$\sigma_0 = \sigma_T + E(\epsilon_c - \epsilon_T) - \sqrt{E^2(\epsilon_c - \epsilon_T)^2 - 2AE}, \quad A = \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_T} [f(\epsilon) - \sigma_T] d\epsilon, \quad (3)$$

де  $f(\epsilon)$  – функція, що описує діаграму розтягу в області пластичної деформації;  $\epsilon_T$  – деформації на границі пружності;  $\epsilon_c$  – гранична деформація матеріалу матриці.

З використанням комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі відповідна крайова задача зводиться до розв'язування наступного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомих переміщень берегів включень  $u_y(x)$ :

$$\frac{\pi}{2d} \int_{-l}^l u_y'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{2d} dt - 2\pi c \lambda \frac{u_y(x)}{h(x)} \cdot H(a-|x|) = \frac{2\pi c}{E} [-p + p\lambda \cdot H(a-|x|) + \sigma_0 \cdot H(|x|-a)], \quad (4)$$

$$|x| < l.$$

де  $H(x)$  – функція Гевісайда;  $\lambda = E_1/E$  – відносна жорсткість включення;  $E$  – модуль Юнга основного матеріалу  $c = 1 - \nu$  – для плоского напруженого стану і  $c = 1 - \nu^2$  – для плоскої деформації. Тут враховано, що  $u_y^* \approx u_y + u_y^0$ ;  $u_y^0$  – переміщення точок поверхні включення в однорідному (без включення) тілі під дією зовнішніх зусиль.

**Критерій руйнування.** Вважатимемо, що деформативність та міцність включень, їх адгезія з основним матеріалом достатня для того, щоб початкове руйнування відбулося в матриці в околі включень.

Для визначення граничного навантаження  $p_c$ , коли в околі включень виникне тріщина, скористаємося деформаційним критерієм міцності, згідно з яким локальне руйнування відбудеться за умови, що максимальна розтягова деформація досягне граничного значення  $\epsilon_c$

$$\epsilon = \epsilon_c. \quad (5)$$

На основі результатів роботи [6] деформація в околі включення визначається залежністю

$$\varepsilon = \frac{u_y(a)}{\rho}, \quad (6)$$

звідки, враховуючи (5), отримуємо критеріальне рівняння

$$\frac{u_y(a)}{\rho} = \varepsilon_c. \quad (7)$$

**Числове розв'язування.** Розв'язок сингулярного інтегро-диференціального рівняння (3) шукаємо за допомогою числового методу квадратурних формул Гауса-Чебишова [6]. Форму включень моделювали еліпсом з півсями  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ).

Результати числових обчислень задачі методом механічних квадратур наведені на рис. 2-5. При поданні графічного матеріалу введено позначення  $\eta = E/\sigma_0$ . Коефіцієнт Пуасона приймали рівним  $\nu = 0,3$ .

З рис. 2 слідує, що з ростом жорсткості включень протяжність зон передруйнування та величина деформацій зменшуються.

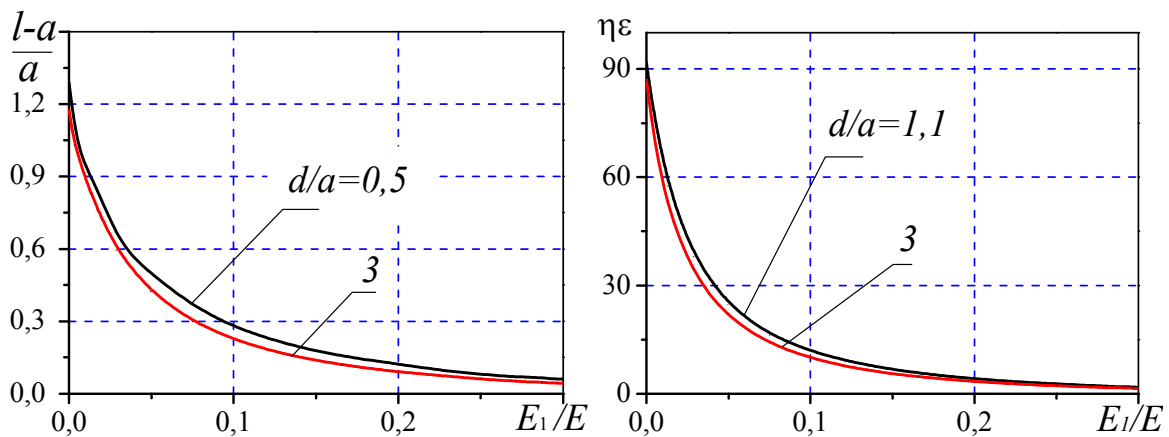


Рисунок 2 – Вплив жорсткості включень на довжину зон передруйнування та величину деформації ( $a/b = 10$ ,  $p/\sigma_0 = 0,7$ )

Крім жорсткості включень важливим параметром, який впливає на напружено-деформований стан тіла є початкова товщина включень. З рис. 3 бачимо, що із зменшенням товщини (збільшенням  $a/b$ ) протяжність пластичних зон зменшується, деформації при цьому зростають.

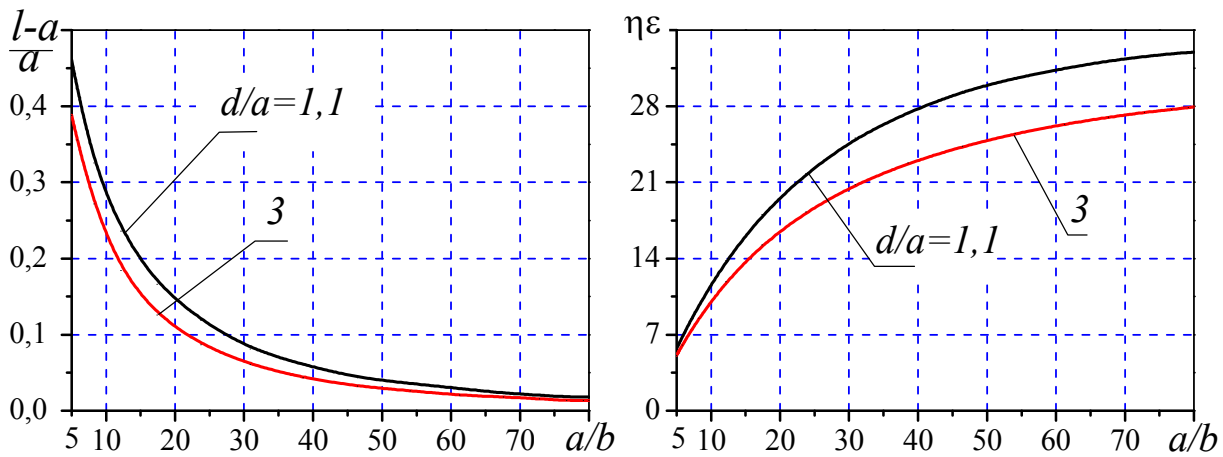


Рисунок 3 – Вплив форми включень на довжину зон передруйнування та величину деформації ( $E_1/E = 0,1$ ,  $p/\sigma_0 = 0,7$ )

На рис. 4 показано вплив жорсткості та форми включень на міцність тіла. Як можна бачити, тіло із системою колінарних включень має меншу міцність ніж тіло з

ізолюваним включенням. З ростом жорсткості включень міцність тіла зростає, а зі зменшенням товщини зменшується.

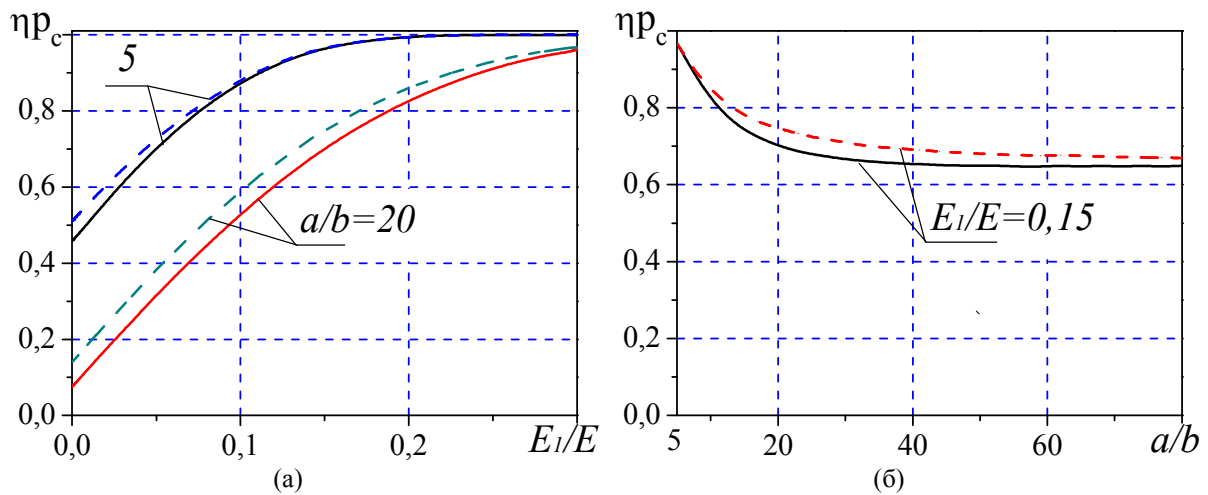


Рисунок 4 – Вплив жорсткості включення (а) та форми (б) на граничне навантаження ( $\eta \varepsilon_c = 10, d/a = 1,1$ )

На рис. 5 показано вплив взаємодії включень на міцність тіла. Зближення включень веде до втрати міцності тіла із системою колінеарних включень.

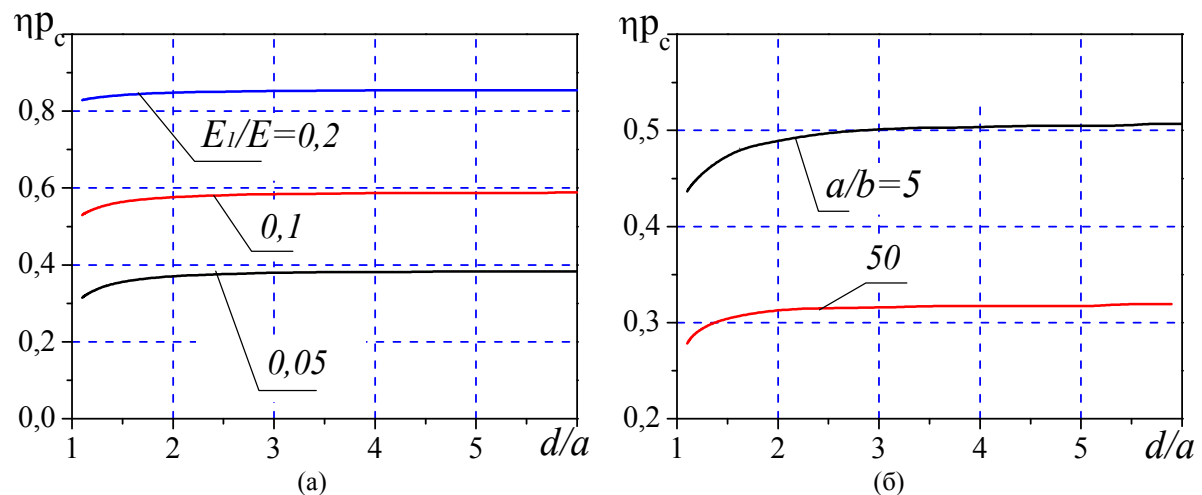


Рисунок 5 – Вплив відстані між включення на граничне навантаження при різних значеннях жорсткості включення (а) ( $\eta \varepsilon_c = 10, a/b = 20$ ) та форми (б) ( $E_1/E = 0,05, \eta \varepsilon_c = 10$ )

Таким чином, встановлено, що більшу небезпеку для руйнування несуть системи зближених колінеарних включень пластинчастої форми з малою жорсткістю.

**Паралельне розміщення включень** (рис 1,б). Відповідна цьому випадку крайова задача зводиться до розв'язування інтегро-диференціального рівняння відносно невідомих переміщень берегів тріщин  $u_y$

$$\frac{\pi}{2d} \int_{-l}^l \left[ 2c \operatorname{th} \frac{\pi(t-x)}{2d} - \frac{\pi(t-x)}{2d} \operatorname{csc} h^2 \frac{\pi(t-x)}{2d} \right] u'_y(t) dt - 2\pi c \lambda \frac{u_y(x)}{h(x)} \cdot H(a-|x|) =$$

$$= \frac{2\pi c}{E} \left[ -p + p\lambda \cdot H(a-|x|) + \sigma_0 \cdot H(|x|-a) \right], \quad |x| < l. \quad (12)$$

Результати числових обчислень рівняння (12) методом механічних квадратів наведені на рис. 6-7. Як можна бачити із рис. 6, зі зближенням включень деформації і пластичні зони у випадку паралельних систем включень зростають. З ростом жорсткості включень та зменшенням їх товщини вплив взаємодії зменшується.

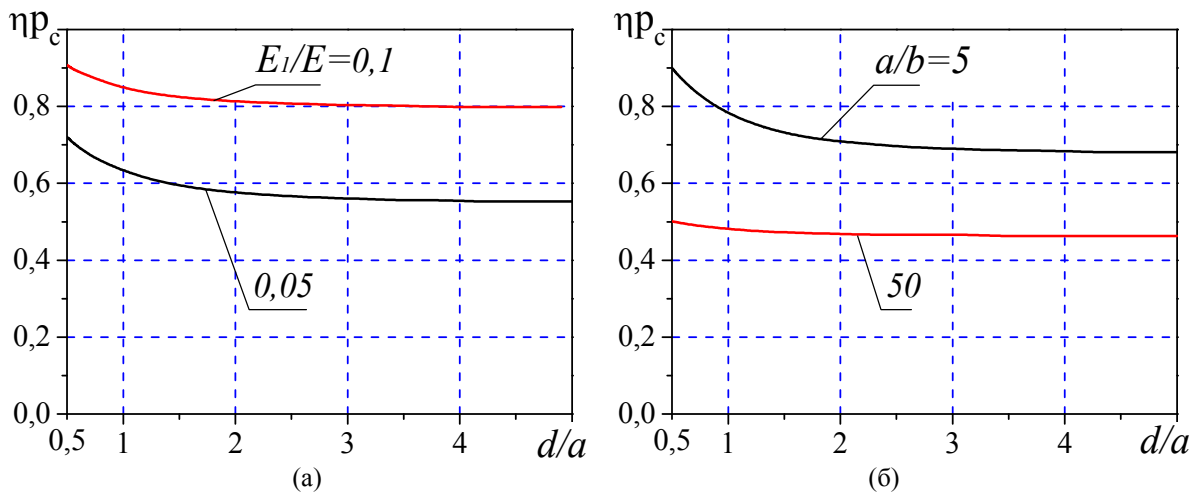


Рисунок 6 – Вплив відстані між включення на граничне навантаження при різних значеннях жорсткості включення (а) ( $\eta \varepsilon_c = 10, a/b = 10$ ) та форми (б) ( $E_1/E = 0,05, \eta \varepsilon_c = 10$ )

На ступінь зміцнення тіла системою паралельних включень суттєво впливають товщина включень та їх жорсткість (рис. 7). Штриховою лінією наведені результати розв'язку задачі про міцність тіла з ізованим включенням [6]. Встановлено, що тіло із системою паралельних включень має більшу міцність ніж тіло з ізованим включенням.

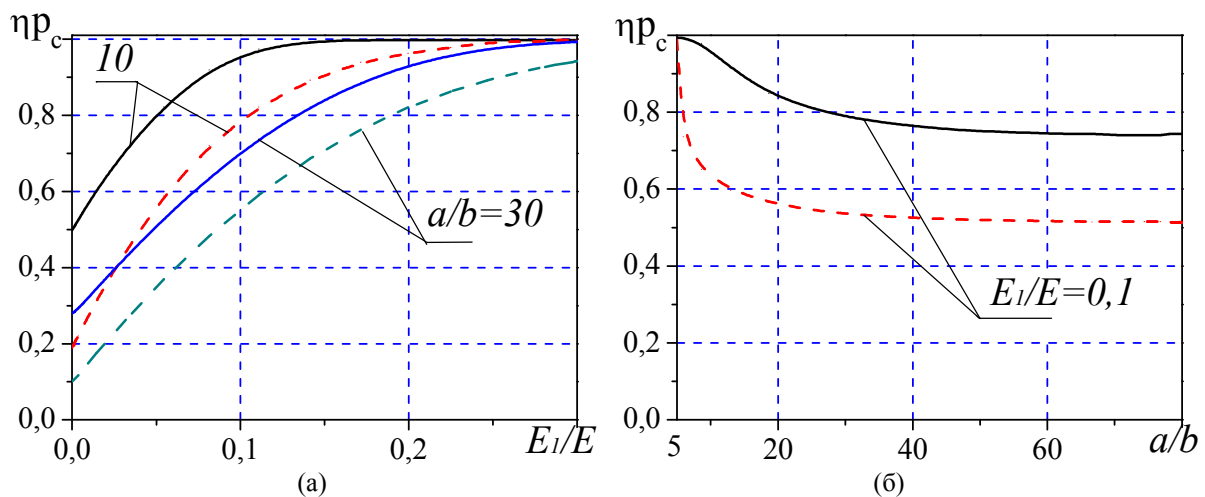


Рисунок 7–Вплив жорсткості включення (а) та форми (б) на величину граничного навантаження ( $\eta \varepsilon_c = 10, d/a = 0,3$ )

**Висновки.** Досліджено особливості деформування та руйнування матеріалів, що містять системи періодичних колінарних та паралельних включень. Задачі зведені до сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, які розв'язані чисельно методом механічних квадратур. Встановлено, що при зближенні колінарних включень міцність тіла зменшується. Взаємодія включень, розміщених в паралельних площинах, на відміну від колінарного випадку, носить якісно інший характер. Граничне навантаження при зближенні дефектів зростає. Взаємодією включень можна знехтувати, якщо вони віддалені на відстань  $d/a > 4$ . Суттєво впливає на міцність тіл із системами включень їх жорсткість та товщина.

#### Література

1. Бережницький Л.Т. Упругопластическая деформация в окрестности жесткого включения / Л.Т. Бережницький, Н.М. Кундрат // Проблемы прочности. – 1984. – №11. – С.62–69.
2. Бережницький Л.Т. Локальне руйнування композиції з жорстким лінійним включенням / Л.Т. Бережницький, Н.М. Кундрат // Фіз.- хім. механіка матеріалів. – 1995. – 31, №4. – С. 60–67.

3. Антиплоска пружно-пластична деформація тіла з жорстким включенням / П.М. Витвіцький, В.А. Кривень // Доп. АН УРСР. Сер. А. –1979. – №2. – С. 104–107.
4. Кривень В.А. Антиплоская упруго-пластическая деформация тела, содержащего тонкое жесткое пластинчатое включение / В.А. Кривень // Физ.- хим. механика материалов. – 1980. – №2. – С.66–70.
5. Кундрат М.М. Локальное разрушение ортотропной матрицы с линейным включением / М.М. Кундрат // Прикл. механика. –1996. – 32. №8. – С. 63–71.
6. Силованюк В.П. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням / В.П. Силованюк, Р.Я. Юхим // Фіз.- хім. механіка матеріалів. – 2007. – №6. – С. 31–35.
7. Панасюк В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. – Львів.: НАН України, ФМІ ім Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.
8. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами/ Панасюк В.В. –Киев: Наук. Думка, 1968. – 40 с.

*Одержано 27.05.2010 р.*