Здолбіцька Н.Розрахунок плит зі змішаними граничними умовами на пружній основі Вінклера / Здолбіцька Н., Делявський М. //Вісник ТДТУ. — 2010. — Том 15. — № 2. — С. 30-34. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Н. Здолбіцька[1]; М. Делявський[2], докт. техн. наук

[1]Луцький національний технічний університет
[2]Технологічно-природничий університет, Польща

РОЗРАХУНОК ПЛИТ ЗІ ЗМІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА

Резюме. *Запропоновано матричний метод розв'язування задачі про поперечний згин тонкої ортотропної плити зі змішаними граничними умовами, покладеної на пружну основу Вінклера. Шляхом поточкового задоволення граничних умов на контурі плити отримано числові результати в системі Maple для змішаних граничних умов. Побудовано графіки розподілу прогину, горизонтальних переміщень та моментів у плиті. Показано, що даний алгоритм є стійким щодо вибору точок колокації.*

Ключові слова: *плита, граничні умови, матричний метод, напружено-деформований стан, координатні функції, точки колокації.*

N. Zdolbitska, M. Delyavskyy

A CALCULATION OF PLATES ON THE ELASTIC FOUNDATION ON VINKLERS TYPE WITH THE MIXED BOUNDARY CONDITIONS

The summary. *Matrix method of calculation of orthotropic plates with the mixed boundary conditions resting on Vinklers type elastic foundation is offered. The numerical results in the system Maple have been got by satisfactions in points of boundary conditions on the edges of plate. The graphics of change of sag, bending moments and tangential displacements in the plate are built in this paper. This algorithm is stability to the choice of collocation points.*

Key words: *plate, boundary conditions, matrix method, stress-strained state, coordinate functions, points of collocation.*

Постановка проблеми. Розглянемо тонку прямокутну ортотропну плиту на пружній основі Вінклера і віднесемо її до прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у геометричному центрі плити. Вісь Ox_3 направляємо вниз, а осі Ox_1 і Ox_2 розміщуємо в серединній площині плити так, щоб утворена система координат була правою. Розміри плити у напрямку координатних осей позначимо відповідно через $2a_1$ і $2a_2$. На верхній основі плита завантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності $q(x_1, x_2)$, а на нижній основі – реакцією основи, яка згідно з моделлю Вінклера пропорційна прогину плити в кожній точці основи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Смирнов В.А. [1] застосував метод сил до розрахунку пластин зі змішаними граничними умовами. Романов А.А., поєднуючи операторний метод з інтегральними рівняннями, розглянув випадки змішаних граничних умов [2] на контурі плити. Великанов П.Г. [3] запропонував метод непрямих граничних елементів (МНГЕ) для ізотропних пластин на складній двопараметричній пружній основі. Розрахунок тонких ортотропних плит на пружній основі Вінклера з однорідними граничними умовами наведено у статті [4]. Дана стаття є продовженням публікацій авторів [4,5].

Метою дослідження є розроблення матричного методу розрахунку ортотропних плит на пружній основі Вінклера зі змішаними граничними умовами.

Метод розв'язування задачі. Основне рівняння згину тонкої ортотропної плити на пружній основі Вінклера має вигляд

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}+K_0 w=q\,, \tag{1}$$

де D_{ij} – жорсткості плити на згин і кручення; q – навантаження, прикладене до верхньої сторони плити; K_0 – коефіцієнт жорсткості пружної основи.

Прогин плити представлено у вигляді [4,5]:

$$w\left(x_1,x_2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\Big\{R_{(\nu)2k}^{[1]}W_{(\nu)2k}^{[1]}\left(x_1,x_2\right)+R_{(\nu)1k}^{[1]}W_{(\nu)1k}^{[1]}\left(x_1,x_2\right)+$$

$$+R_{(\nu)2k}^{[2]}W_{(\nu)2k}^{[2]}\left(x_1,x_2\right)+R_{(\nu)1k}^{[2]}W_{(\nu)1k}^{[2]}\left(x_1,x_2\right)\Big\}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}^{*}\left(x_1,x_2\right), \tag{2}$$

де, за аналогією з методом скінчених елементів, функції $W_{\nu k}^{[j]}\left(x_1,x_2\right)$, $W_{(\nu+4)k}^{[j]}\left(x_1,x_2\right)$ названо координатними функціями, а W_{mn}^{*} – силовими функціями прогину плити. Аналогічно представлено тангенціальні переміщення $u_1\left(x_1,x_2\right)$, $u_2\left(x_1,x_2\right)$; згинальні $M_{11}\left(x_1,x_2\right)$, $M_{22}\left(x_1,x_2\right)$ та крутильний $M_{12}\left(x_1,x_2\right)$ моменти; поперечні сили $Q_1\left(x_1,x_2\right)$, $Q_2\left(x_1,x_2\right)$ та узагальнені поперечні сили $V_1\left(x_1,x_2\right)$, $V_2\left(x_1,x_2\right)$. Сенс уведених функцій такий як і для прогину.

З метою ефективного використання отриманого розв'язку представляємо його у матричні формі:

$$w\left(x_1,x_2\right)=\left[\left[W\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+W^{*}\,. \tag{3}$$

Подібно записуємо вирази для переміщень, моментів і поперечних сил:

$$u_1=\left[\left[U\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+U^{*},\ u_2=\left[\left[V\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+V^{*}, \tag{4}$$

$$M_{11}=\left[\left[X\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+X^{*},\ M_{22}=\left[\left[Y\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+Y^{*}, \tag{5}$$

$$M_{12}=\left[\left[Z\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+Z^{*}, \tag{6}$$

$$Q_1=\left[\left[T\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+T^{*},\ Q_2=\left[\left[G\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+G^{*}, \tag{7}$$

$$V_1=\left[\left[J\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+J^{*},\ V_2=\left[\left[H\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+H^{*}\,. \tag{8}$$

Сукупність виразів (3)-(8) утворюють математичну модель тонкої ортотропної плити на пружній основі Вінклера.

Результати досліджень. Плита зі змішаними граничними умовами на пружній основі Вінклера (рис. 1).

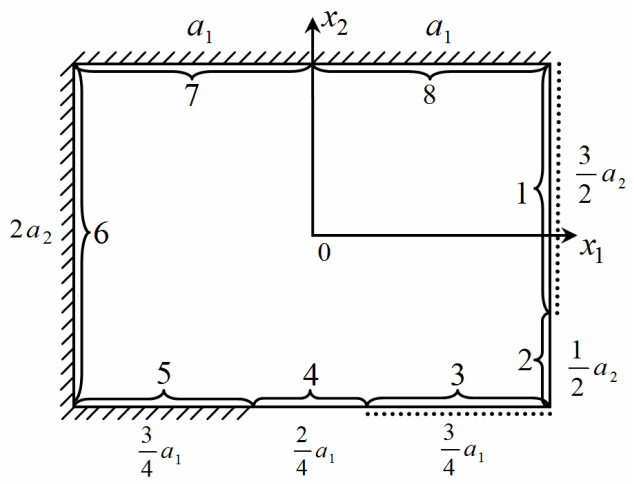


Рисунок 1 – Схема плити зі змішаними граничними умовами

Кожен край плити ділимо на частини з різними умовами закріплення: краї 1, 3 – вільно обіперті; краї 2, 4 – вільні; краї 5, 6, 7, 8 – защемлені.

Для розрахунку вибрано прямокутну залізобетонну плиту розмірами $2a_1 = 8m,\ 2a_2 = 6m$ і товщиною $h = 0.3m$ під сталим навантаженням $q = 1.96 \cdot 10^3\ N/m^2$. В обчисленнях залізобетонна плита замінена однорідною ортотропною плитою з усередненими модулями пружності, які визначаємо на підставі формул, запропонованих Губером [6]. До розрахунків вибрано такі значення жорсткостей плити:

$$D_{11} = 3.13 \cdot 10^8\ N/m^2\ ; D_{22} = 6.19 \cdot 10^7\ N/m^2\ ;$$

$$D_{12} = 4.39 \cdot 10^7\ N/m^2\ ;\ D_{66} = 3.37 \cdot 10^7\ N/m^2\ ;$$

$$K_0 = 5.88 \cdot 10^7\ N/m^3\ .$$

Граничні умови на краях плити задовольнялися методом колокацій, тобто лише в окремих точках краю плити $x_1 = \pm a_1$ та $x_2 = \pm a_2$, вибраних за формулою [5]

$$x_{kj} = \frac{k^*\left(x_{2j} - x_{1j}\right)}{K_* + 1} + x_{1j}\ ,$$

де K_* – кількість точок колокації; k^* – номер точки колокації на відрізку $a_j,\ j = 1,2$; x_{kj} – координати точок колокації.

Розроблено програму, яка сама генерує матрицю відповідно до граничних умов і вибору кількості точок колокації. При $K_* = 8$ маємо 16 рівнянь з 16 невідомими, при $K_* = 16$ маємо 32 рівняння і т.д. залежно від точності наближення розв’язку.

Обчислення проведено для 96, 192 і 384-х точок колокації. Найкраще наближення отримали, коли точки розподілені рівномірно по всьому контуру плити.

На рисунку 2 зображено вигнуту поверхню плити, а на рисунку 3 – перерізи цієї поверхні площинами а) $x_1 = 0$, б) $x_2 = 0$ відповідно.

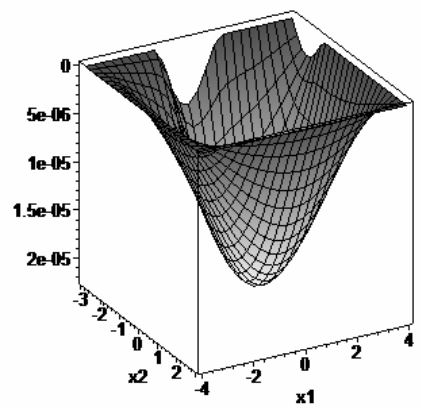


Рисунок 2 – Поверхня прогину плити

Криві у вершині прогину практично співпадають, різниця між 96 і 384 точками колокації становить 0.25 % (рис. 3).

На рис. 4 зображено криві прогину краю плити, де задано змішані граничні умови.

На краях 1, 3 (вільно обіперті) граничні умови для прогину задовольняються з точністю 10^{-11}, а для моментів – з точністю 10^{-7}.

На краях 2, 4 (вільні) різниця для прогину та для узагальнених поперечних сил між 192 і 384 точками колокації не перевищує 9 %.

На краях 5, 6, 7, 8 (защемлені) граничні умови для прогину та переміщень задовольняються з точністю 10^{-12}.

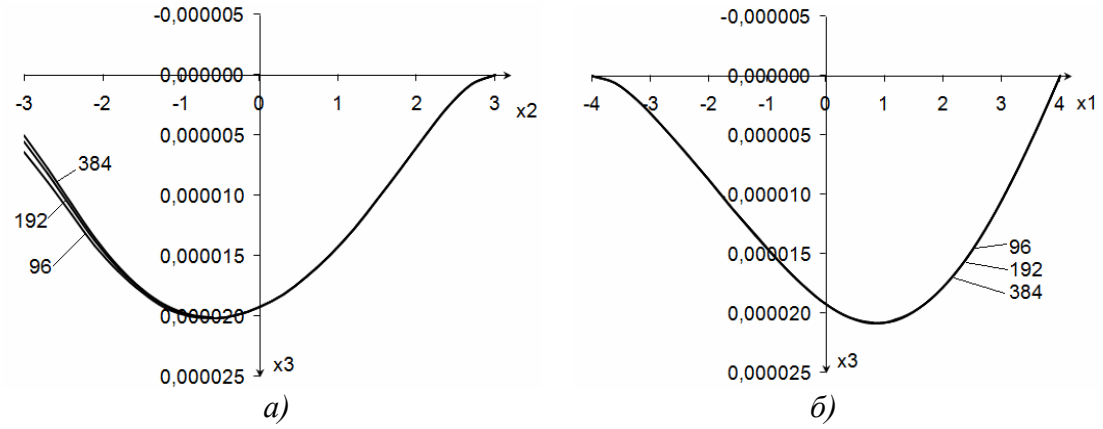
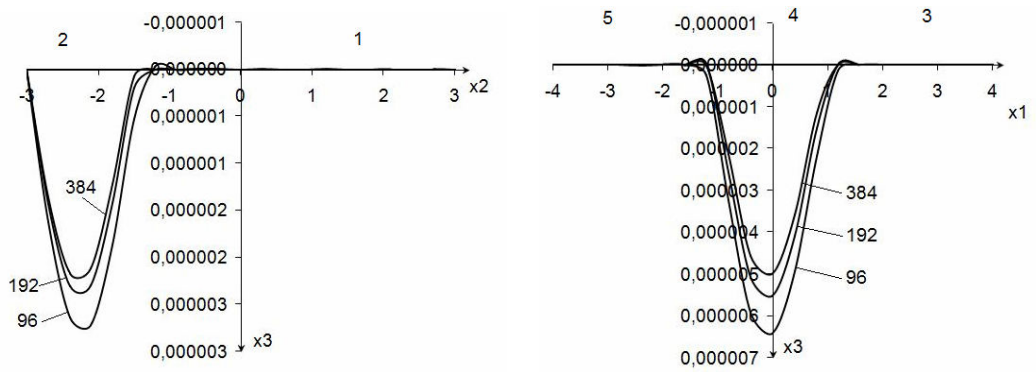
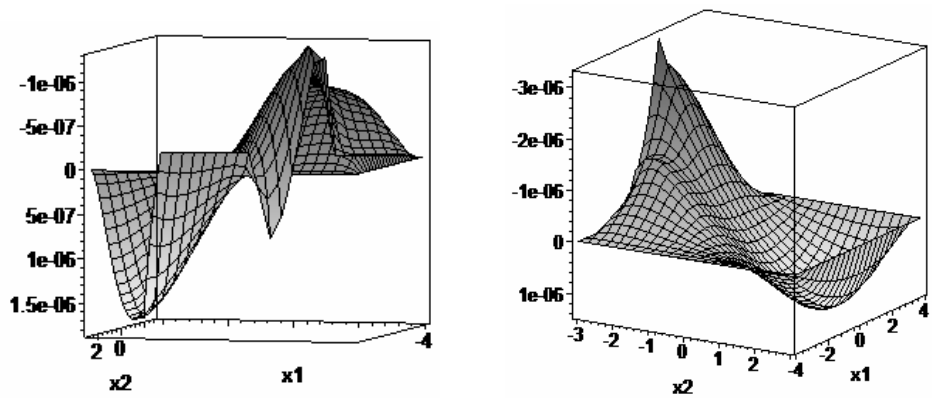


Рисунок 3 – Центральний переріз поверхні прогину плити: а) $x_1 = 0$; б) $x_2 = 0$



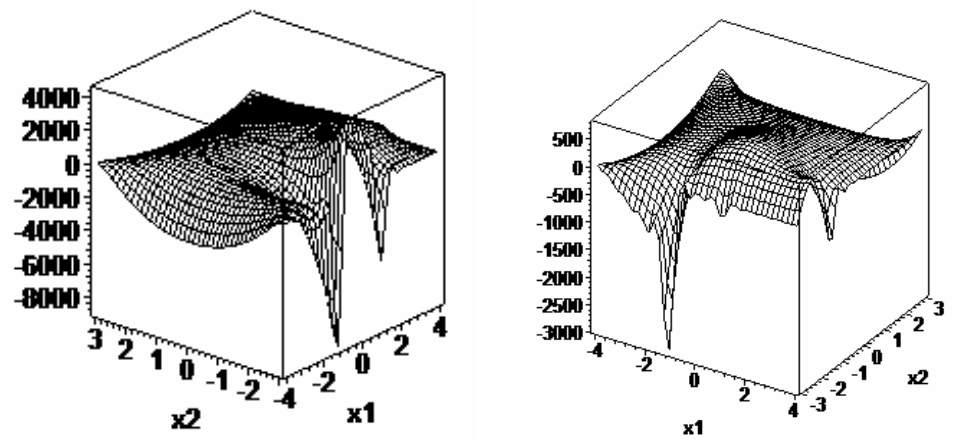
а) *б)*

Рисунок 4 – Прогин краю плити: а) на краях 1,2; б) на краях 3,4,5



а) *б)*

Рисунок 5 – Переміщення: а) u_1; б) u_2 точок плити



а) *б)*

Рисунок 6 – Розподіл моментів: а) M_{11}; б) M_{22} у плиті

На рисунку 6 зображено просторові графіки зміни моментів M_{11}, M_{22} у плиті.

У точках зміни (розриву) граничних умов переміщення (рис. 5) і моменти (рис. 6) отримують скачки, викликані невизначеністю граничної умови в цій точці.

Висновки. Отримано розв'язок задачі згину тонкої ортотропної прямокутної плити на пружній основі Вінклера за змішаних граничних умов. На конкретному прикладі показано матричний спосіб розв'язування задач такого типу, а також стійкість побудованого алгоритму щодо вибору точок колокації. Граничні умови задовольняються з дуже високим ступенем точності.

Література

1. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания / Смирнов В.А. – М.: Стройиздат. – 1978. – 300 с.
2. Романов А.А. К расчету прямоугольных пластинок со сложными граничными условиями / А. А. Романов // Труды МИИТ. – 1971. – Вып. 364. – С.94–104.
3. Великанов П.Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании / П. Г. Великанов // Известия Саратовского университета. Т.8. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Вып. 1. –С. 36–42.
4. Здолбіцька Н.В. Ортотропна прямокутна плита на пружній основі Вінклера / Н. В. Здолбіцька // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка"). – Луцьк, 2005. – Вип. 17. – С. 145–153.
5. Здолбіцька Н.В. „Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на пружній основі" / Н. В. Здолбіцька, А. П. Здолбіцький , М. В. Делявський // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. – Львів. – 2008. – Т.2. – С. 40–41.
6. Huber M.T. Teoria płyt prostokątnie różnokierunkowych / M. T. Huber – Lwów: Arch. Tow. Nauk.

Одержано 19.02.2010 р.