

УДК 539.3

І. Кузь¹, канд. фіз.-мат. наук; О. Кузь², канд. техн. наук; Н. Пиз¹

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Національний університет «Львівська політехніка»

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ЛІНІЙНО ЗМІЦНЮВАНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ РОЗРІЗАМИ ЗА ВСЕБІЧНОГО РОЗТЯГУ

Резюме. За допомогою числового розв'язування крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнюваного матеріалу з'ясовано напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з двома перпендикулярними розрізами за всебічного розтягу.

Ключові слова: пластина, розріз, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, варіаційно-різницький метод, всебічний розтяг.

I. Kuz', O. Kuz', N. Pyz

STRESS-STRAIN STATE OF ELASTO-PLASTIC LINEARLY STRENGTHENABLE PLATES WITH TWO PERPENDICULAR CUTS UNDER ALL-ROUND STRETCHING

Summary. Effective numerical methods for solving 2D problems related to the theories of elasticity and plasticity have been worked out. The variation-difference method of building finite difference schemes is extended to disconnected domains.

The application of the variation-difference method for solving problems of the theory of small elasto-plastic deformations relatively the plates with cuts, taking into account the linear strengthening of the material and unloading, has been developed. For solving the resultant systems of nonlinear and linear equation, the Newton-Kantorovich method and combined iterative method (gradient and cyclic Chebyshev's one) were proposed to be used. The choice of iteration parameters of the methods for solving the obtained systems of linear and nonlinear algebraic equations was made.

The elaborated software ensures solving the problems with different boundary conditions, medium and domain parameters.

A variety of problems concerning all-round stretching of the elasto-plastic plates with two perpendicular cuts is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed. There are found the stresses under which the yield limit and the strength limit are achieved in the plates. On the base of numerical analysis the following main regularities are found: under the close mutual location of cuts in the plate, the plastic deformations first appear under the stress P^0 which is 33% less than in the plate with the same cuts under the far mutual location; however, the strength limit in the plates in the both considered cases is achieved practically under the same stress P^0 .

Key words: plate, cut, theory of small elasto-plastic deformations, linear strengthening, variation-difference method, all-round stretching.

Постановка проблеми. Концентратори напружень, зокрема розрізи або тріщини, існують у конструкціях внаслідок конструкційних вимог, технологічних операцій при їхньому виготовленні або впливові експлуатаційних навантажень. Їхня наявність призводить до концентрації напружень, що може спричинити передчасне руйнування або появу недопустимих деформацій. У багатьох випадках за високого рівня

навантажень елементи конструкцій з концентраторами напружень перебувають в умовах допустимого пластичного деформування. Це призводить до складних задач визначення напружено-деформованого стану, розв'язування яких неможливе без залучення ефективних числових методів розрахунку, оскільки застосування аналітичних методів у зв'язку зі складністю форми тіл (обмеженість розмірів, багатозв'язність) та фізичною нелінійністю значно обмежене.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним із ефективних числових методів розв'язування крайових задач деформаційної теорії пластичності в багатозв'язних областях є варіаційно-різницевий метод із використанням відображення криволінійної (косокутної) сітки у вихідній області на рівномірну прямокутну сітку в області, складеній з прямокутників [1–3]. Проте врахування зміцнення матеріалу при пластичному деформуванні та побудова зон еволюції пластичних деформацій при покроковому збільшенні навантаження дали б змогу точніше з'ясувати напружено-деформований стан пластин з двома перпендикулярними розрізами та їхню міцність.

Мета роботи. З'ясувати вплив двох перпендикулярних розрізів, зокрема при їхньому зближенні, на напружено-деформований стан пружно-пластичних лінійно зміцнюваних пластин за всебічного розтягу.

Формулювання задачі та числовий метод її розв'язування. Розглядаються плоскі задачі деформаційної теорії пластичності, зокрема теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина, за активного навантаження у багатозв'язній області V з межею Σ , які моделюють напружено-деформований стан у пластинах з двома перпендикулярними розрізами (рис.2, 4). З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластині

$$(C_{ijkl}(\varepsilon_u)u_{k,l})_{,j} = 0 \quad (1)$$

за використання мішаних крайових умов на її поверхні $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\varepsilon_u)u_{k,l}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \quad (2)$$

де

$$C_{ijkl} = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\lambda(\varepsilon_u) = K - (2/3)\mu(\varepsilon_u), \quad \mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)). \quad (3)$$

Тут u_i, P_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ відповідно; ε_u – інтенсивність тензора деформацій ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$; $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$); K – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_u)$ – функція пластичності Ільюшина [4]; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$v_1 = u_x(x, y), \quad v_2 = u_y(x, y), \quad v_3 = u_z \equiv 0. \quad (4)$$



Рисунок 1. Графік залежності $\sigma_u \sim \epsilon_u$ для матеріалу з лінійним зміцненням

Figure 1. Graph of dependence $\sigma_u \sim \epsilon_u$ for the material with linear strengthening

Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція $\omega(\epsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\epsilon_u) = \begin{cases} (1-\gamma)(\epsilon_u - \epsilon_s)/\epsilon_u, & \epsilon_u > \epsilon_s; \\ 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_s, \end{cases} \quad (5)$$

де $\gamma \equiv \mu'/\mu$ – параметр зміцнення; $2\mu \equiv \text{tg } \alpha$; $2\mu' \equiv \text{tg } \alpha'$; σ_s, ϵ_s – межі течіння за напруженнями та деформаціями відповідно.

Для процесу розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}, \quad s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e'_{ij}), \quad (6)$$

де компоненти тензорів e'_{ij} і s'_{ij} відповідають початку процесу розвантаження.

Розглянемо дискретизацію задачі (1), (2), тобто побудуємо різницевий аналог цієї задачі. Причому будемо виходити з її варіаційної постановки, тобто використовуватимемо варіаційно-різницевий метод побудови різницевої схеми [5].

Оскільки область V є багатозв'язною, то використовуємо такі координати β^1, β^2 , що відображення

$$x^1 = x^1(\beta^1, \beta^2), \quad x^2 = x^2(\beta^1, \beta^2) \quad (7)$$

переводить її в модельну область V_0 (прямокутник розмірами $l_1 \times l_2$ або область, складену з прямокутників). У цій області лагранжіан матиме вигляд

$$L_0 = (1/2) \int_{V_0} \sqrt{g} D^{ijkl} v_{i|j} v_{k|l} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{V_0} \sqrt{g} \bar{X} \cdot \bar{v} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{\Sigma_0} g(\bar{\beta}) \bar{P}^0 \cdot \bar{v} d\Sigma, \quad (8)$$

де $D^{ijkl} = C^{imkn}(\bar{\beta}) B_m^j B_n^l$, $A_j^i = \partial x^i / \partial \beta^j$, $B_j^i = \partial \beta^i / \partial x^j$, $\sqrt{g} = \det \underline{A}$,

$$g(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}; \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Замінивши у (8) всі континуальні функції сітковими, інтегралами – скінченними сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h за допомогою дискретного аналога відображення (7), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в областях V та V_0 . Для визначення стаціонарної точки L_0^h матимемо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\bar{P}(\vec{v}^h)_+ \bar{F}^h = 0, \quad (9)$$

яку доцільно розв'язувати ітераційним методом Ньютона–Канторовича, кожним кроком якого є дворівнева процедура розв'язування лінійної системи, яка реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишевським набором ітераційних параметрів. Складністю її практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів системи (9).

Описаний метод реалізований у вигляді пакета програм, який враховує різні крайові умови, геометрію області та параметри середовища.

Результати числових досліджень. За допомогою викладеного вище варіаційно-різницевого методу розв'язано низку плоских задач деформаційної теорії пластичності про деформування пластин, виготовлених з матеріалу з лінійним зміцненням (див. рис.1), наприклад, плакованого алюмінієвого сплаву Д16АТ, який широко використовується в літакобудуванні, з двома перпендикулярними розрізами. На рис.2 наведено геометрію пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами однакового розміру, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ($\sigma_m = 0, \sigma_{n\tau} = 0$). До усіх країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

За допомогою діаграм розподілу безрозмірної інтенсивності тензора напружень $\sigma_u^0 \equiv \sigma_u/\sigma_s$ можна з'ясувати області виникнення та розвитку пластичних деформацій, а також оцінити міцність пластини за тим чи іншим критерієм. Згідно з умовою течіння Губера–Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної межі течіння $\sigma_s^0 = 1$. Згідно з критерієм міцності (скажімо найбільшій інтенсивності дотичних напружень) небезпечний стан досягається, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної величини $\sqrt{2/3}\sigma_B^0$, де $\sigma_B^0 \equiv \sigma_B/\sigma_s$ – безрозмірна межа міцності [6].

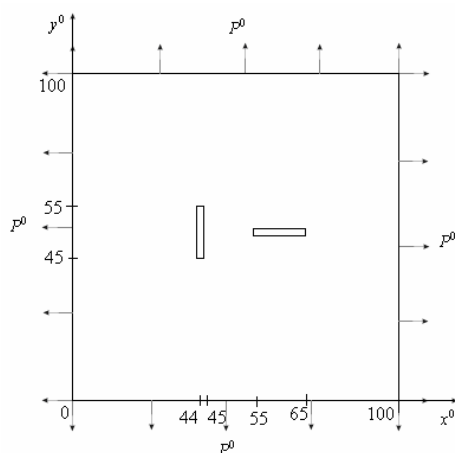


Рисунок 2. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу, та крайовими умовами на зовнішній межі

Figure 2. Plate with two perpendicular cuts the distance between which equals the bigger size of a cut and the boundary conditions on the external border

На рис.3 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для зображеної на рис.2 пластини (модуль пружності $E = 7,31 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; параметр зміцнення $\gamma = 0,1$; межа течіння $\sigma_s = 324$ МПа; межа міцності $\sigma_B = 469$ МПа). На рис.3 зони 1 побудовані за $P^0 = 0,37$; зони 2 – за $P^0 = 0,56$; зони 3 – за $P^0 = 0,8$; зона 4 – за $P^0 = 0,92$.

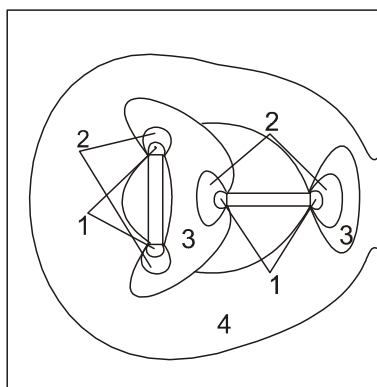


Рисунок 3. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення P^0 у пластині з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу

Figure 3. Diagram of development of the plastic deformation zones for step enlarging of the loading P^0 in the plate with two perpendicular cuts such that the distance between them equals the bigger size of a cut

Як бачимо з рис.3, спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на торцях розрізів (зони 1), які далі розповсюджуються овалами навколо торців (зони 2). За напруження $P^0 = 0,8$ області пластичних деформацій навколо торців лівого розрізу та лівого торця правого розрізу об'єднуються (зони 3). За напруження $P^0 = 0,92$ уже дві зони 3 об'єднуються і виходять на правий край пластини (зона 4). За цього напруження у пружному стані всередині зони 4 залишаються лише овальна зона навколо лівого отвору і зона у вигляді півмісяця навколо правого. Вихід зони пластичності саме на правий край пластини пояснюється найбільшою близькістю до нього відповідного торця розрізу.

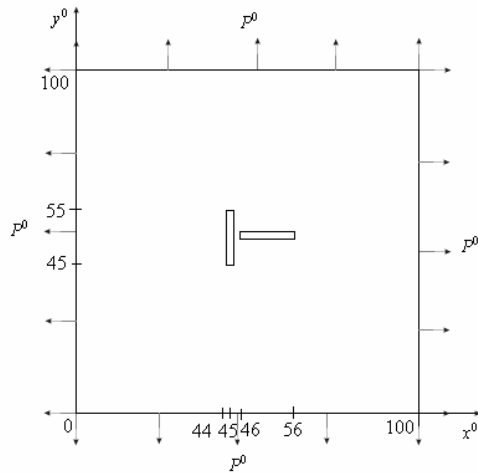


Рисунок 4. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу, та крайовими умовами на зовнішній межі

Figure 4. Plate with two perpendicular cuts the distance between which equals the smaller size of a cut and the boundary conditions on the external border

На рис.4 наведено геометрію пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут також введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ($\sigma_m = 0, \sigma_{n\tau} = 0$). До усіх країв пластини також прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

На рис.5 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для поданої на рис. 4 пластини з такими ж характеристиками. На рис.5 зони 1 побудовані за $P^0 = 0,25$; зони 2 – за $P^0 = 0,62$; зони 3 – за $P^0 = 0,8$; зони 4 – за $P^0 = 0,92$.

Як бачимо з рис.5, на відміну від рис.3, області пластичних деформацій вперше з'являються не на усіх торцях розрізів (зони 1). За напруження $P^0 = 0,62$ зони пластичних деформацій навколо лівого розрізу розвивається зміщеними до лівого краю пластини овалами (зони 2), за напруження $P^0 = 0,8$ ці овали об'єднуються (зони 3).

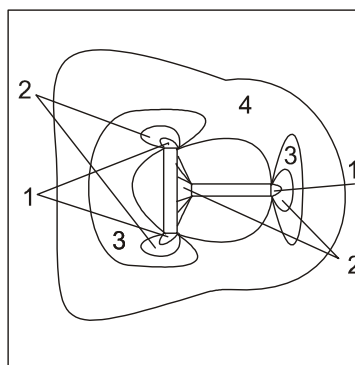


Рисунок 5. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення P^0 у пластині з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу

Figure 5. Diagram of development of the plastic deformation zones for step enlarging of the loading P^0 in the plate with two perpendicular cuts the distance between which equals the smaller size of a cut

Висновки. Побудовано зони еволюції пластичних деформацій в пластинах з двома перпендикулярними розрізами за покрокового збільшення навантаження. З'ясовані напруження, за яких у пластинах досягаються межі течіння та міцності.

На основі числового аналізу виявлено такі основні закономірності: при ближчому взаємному розташуванні розрізів у пластині пластичні деформації вперше виникають за напруження P^0 на 33% меншого, ніж у пластині з такими ж розрізами при їхньому дальшому розташуванні. Проте утримувальна здатність пластин в обидвох розглядуваних випадках втрачається практично за однакового напруження P^0 .

Conclusions. The zones of evolution of plastic deformations in the plates with two perpendicular cuts for step enlarging of the loading are constructed. There are found the stresses under which the yield limit and the strength limit are achieved in the plates.

On the base of numerical analysis the following main regularities are found: under the close mutual location of cuts in the plate, the plastic deformations first appear under the stress P^0 which is 33% less than in the plate with the same cuts under the far mutual location; however, the strength limit in the plates in the both considered cases is achieved practically under the same stress P^0 .

Список використаної літератури

1. Кузь, І. С. Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням [Текст] / І. Кузь, І. Тімар // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 48–154.
2. Кузь, І. Пластичне деформування пластин з двома співвісними або компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) [Текст] / І. Кузь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 91–98.
3. Кузь, І. С. Одновісний розтяг пружно-пластичних пластин з квадратним отвором різної орієнтації [Текст] / І. С. Кузь, О. Н. Кузь // Вісник ТНТУ. – 2013. – №4(72). – С. 52–59.
4. Ильющин, А. А. Пластичность. Основы общей математической теории [Текст] / А. А. Ильющин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
5. Победря, Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
6. Божидарник, В. В. Елементи теорії пластичності та міцності [Текст] / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим. – Львів: Світ, 1999. –Т. 1. – 532 с. ; 1999. – Т. 2. – 419 с.

Отримано 02.02.2015