***Ловейкін В. Застосування методу енергетичного балансу для оцінювання розсіювання енергії в елементах динамічних систем / В. Ловейкін, Ю. Човнюк, А. Ловейкін // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2014. — Том 76. — № 4. — С. 115-125. — (Машинобудування, автоматизація виробництва та процеси механічної обробки).***

*УДК 534.015*

**В. Ловейкін[1], докт. техн. наук; Ю.Човнюк[1], канд. техн. наук; А. Ловейкін[2], канд. фіз.-мат. наук**

*[1]Національний університет біоресурсів і природокористування України*
*[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

# ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕНЕРГЕТИЧНОГО БАЛАНСУ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РОЗСІЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ В ЕЛЕМЕНТАХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

***Резюме.*** *Запропоновано метод урахування розсіювання енергії в механічних системах при полі гармонічних змушуючих впливах. Для розв'язування модельних рівнянь, які описують вільні коливання механічної системи, застосовується метод енергетичного балансу. Отримано аналітичні вирази для основних параметрів розсіювання енергії в системі, котрі описують тертя в елементах і з'єднаннях машин різного призначення. Встановлено, що коефіцієнти (лінійний/нелінійний) тертя не залежать від частоти й амплітуди виникаючих у динамічній системі коливань.*

***Ключові слова:*** *метод, енергетичний баланс, оцінювання, розсіювання, енергія, елементи, динаміка, системи.*

**V. Loveikin, Y. Chovnyuk, A. Loveikin**

# APPLICATION OF THE ENERGY BALANCE'S METHOD FOR THE ESTIMATION OF THE ENERGY DISSIPATION IN DYNAMIC SYSTEM'S ELEMENTS

***Summary.*** *The method of accounting of the energy's dissipation in mechanical systems with a polyharmonic disturbed actions is proposed. One may use the method of energy's balance in order to solve the model equations described the free oscillations of mechanical system. The analytical expressions for the main energy's dissipation parameters in the system are obtained. The last one describes the friction in the elements and junctions of machines for various using. Coefficients of linear and nonlinear friction are not dependent on a frequency and amplitude of the generated oscillations in a dynamical system. The friction force expression used in this research is rather general. This force is a function of general coordinate and of its velocity as well. The specific cases of such friction force are linear viscous friction, friction proportional to displacement (so called «constructional» damping), Coulomb's or «dry» friction, hysteresis friction. The main advantage of this expression's using for the estimation of the energy's dissipation in an anyone element of a dynamical system is the constancy of its characteristic parameters. This one gives the possibility to calculate the dynamical system's parameters just for the external polyharmonic disturbed actions. In a general case, every detail (junction) where energy is dissipated may have some different values of friction's coefficient and of force's characteristic parameters as well. The results of this research may be used for the determination of the friction's coefficient of the elastic section with series or parallel junction of its elastic elements.*

***Key words:****method, energy's balance, estimation, dissipation, energy, elements, dynamics, systems.*

**Постановка проблеми.** При оцінюванні демпфірування у механічних системах намагаються привести всі різновиди тертя до лінійно-в'язкого. Однак отримувані при цьому еквівалентні коефіцієнти в'язкого тертя у загальному випадку залежать від частоти коливань, що робить неможливим їх використання у разі полігармонічного збудження, при перехідних процесах і при довільному задаванні вимушених сил.

Щоб уникнути цих перешкод і сформулювати загальний підхід до оцінювання розсіювання енергії, прийнятий як для розрахунку коливань, так і для визначення середніх крутних моментів у механічній системі, слід відмовитися від приведення нелінійних видів тертя до лінійного й у кожному елементі динамічної системи визначити вид і відповідні параметри реального тертя, тобто такі параметри, котрі б були незалежними від частоти й амплітуди коливань.

**Аналіз публікацій за темою дослідження.** У роботі [1] проведено дослідження різних видів сил тертя та їх впливу на вільні й вимушені коливання механічних систем саме за допомогою процедури зведення демпфіруючих процесів до впливу еквівалентного лінійного в'язкого тертя. Автори [2] демпфірування коливань у деталях верстатів оцінюють методом енергетичного балансу. У [3] внутрішнє тертя у твердих тілах при їх коливаннях описано з позицій теорії лінійного частотно незалежного внутрішнього тертя, а також використано підходи теорії спадкової пружності [4–10].

Результати цитованих вище робіт будуть використані у даному дослідженні.

**Мета роботи** полягає в обґрунтуванні методу енергетичного балансу для оцінювання розсіювання енергії в елементах динамічних систем, за якою коефіцієнти лінійного/нелінійного тертя не залежить ані від частоти, ані від амплітуди вільних коливань механічної системи.

**Виклад основного змісту дослідження.** Будемо вважати, що сила тертя у будь-якому елементі динамічної системи колісної машини може бути наведена у вигляді однієї чи кількох складових виду

$$R = -d \cdot |q|^k \cdot |\dot{q}|^n \cdot sgn(\dot{q}), \qquad (1)$$

де *d, k, n* – деякі постійні невід'ємні величини; *q* – узагальнена координата.

Частинними випадками тертя загального виду (1) є:

1) лінійне в'язке тертя при k=0, n=1 й нелінійне в'язке тертя при k=0, що є моделями тертя у гідравлічних елементах машин;

2) тертя, яке пропорційне переміщенню при k=1, n=0, що є моделлю так званого «конструкційного» демпфірування у деталях машин (стикуваннях, шліцах, зубчастих з'єднаннях, шпонках, ресорах та ін.);

3) «сухе» тертя при k=n=0, що є моделлю тертя у спеціальних демпферах та інших елементах;

4) гістерезисне тертя при n=0, що є моделлю тертя у матеріалі валів трансмісії та ін. Все це дозволяє вважати досить широким використанням формули (1).

Основною перевагою використання цієї формули для оцінювання розсіювання енергії у будь-якому елементі динамічної системи є постійність значень величин (d,k,n), що дає можливість проводити розрахунки за довільних (наприклад, полігармонійних) вимушених впливів на систему.

Для з'ясування способів визначення величин (d,k,n) розглянемо вільні коливання відносно положення рівноваги одномасової системи з малим тертям, яка має масу m і коефіцієнт *c* жорсткості пружного елемента.

У цьому випадку $m\ddot{q} + c \cdot q = R$ .

Вважаючи, що сила тертя R виражається залежністю (1), матимемо

$$m \cdot \ddot{q} + d \cdot |q|^k \cdot |\dot{q}|^n \cdot sgn(\dot{q}) + c \cdot q = 0$$

або

$$m\cdot q + d\cdot |q|^k\cdot |q|^{n-1}\cdot q + c\cdot q. \qquad (2)$$

Оскільки точний розв'язок рівняння (2) в елементарних функціях отримати неможливо, використаємо метод енергетичного балансу [1]. Приймаємо, що шуканий рух близький до гармонійного, але характеризується амплітудою, яка повільно змінюється і має постійну частоту (p), значення котрої можна визначити за формулою $p=\sqrt{\frac{c}{m}}$, що застосовується для консервативної системи без тертя.

Розглядаючи який-небудь один цикл коливань й суміщуючи початок відліку часу з моментом, коли відхилення досягає максимуму, приймаємо

$$q = A(t)\cdot\cos(pt), \qquad (3)$$

де *A(t)* – повільно змінна функція часу t,

тобто

де *T=2π/p* – період коливань і, відповідно, .

Тоді у виразі для узагальненої швидкості $\dot{q}$, що має вигляд:
$\dot{q} = \dot{A}(t)\cdot\cos(pt) - p\cdot A(t)\cdot\sin(pt)$, можна знехтувати першою складовою і наближено прийняти

$$\dot{q} = -p\cdot A\cdot\sin(pt). \qquad (4)$$

Розрахуємо роботу W сили тертя R за період T з урахуванням виразів (1), (3) й (4)

$$W=\int_0^T R\cdot q\cdot dt = -4\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} d\cdot|q|^k\cdot|\dot{q}|^{n-1}\cdot\dot{q}^2 dt =$$

$$= -4d\int_0^{T/4} A^k\cdot|\cos(pt)|^k\cdot p^{(n-1)}\cdot A^{(n-1)}\cdot|\sin(pt)|^{(n-1)}\cdot p^2\cdot A^2\cdot \sin$$

Наближено вважаючи, що величина A протягом періоду T незмінна, й беручи до уваги, що (sin(pt),cos(pt))>0 у першій чверті періоду, отримаємо

$$W = -4d\cdot A^{k+n+1}\cdot p^{n+1}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} cos^k(pt)\cdot sin^{n+1}(pt)dt =$$

$$= -4d\cdot A^{k+n+1}\cdot p^n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^k(\varphi)\cdot sin^{n+1}(\varphi)d\varphi = -4d\cdot A^{k+n+1}\cdot p^n\cdot I(k,n),$$

де

$$I(k,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^k(\varphi)\cdot sin^{n+1}(\varphi)d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+n+1}{2}+1\right)}.$$

*Г(n)* – гамма-функція від аргументу n, для якої існують готові спеціальні таблиці значень.

Значення функції I(k,n) для деяких значень параметрів k та n наведені у табл.1.

**Таблиця 1**

Значення I(k,n)

**Table 1**

The value of I(k,n)

| k | n | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{}{3}$ | |
| 1 | $\frac{}{2}$ | $\frac{}{3}$ | $\frac{}{4}$ | $\frac{}{5}$ |
| 2 | $\frac{}{3}$ | $\frac{\pi}{16}$ | | $\frac{\pi}{32}$ |
| 3 | $\frac{}{4}$ | | | |

Якщо віднести роботу W сили тертя R за період до максимальної енергії

$\Pi = ($

коливань , отримаємо коефіцієнт відносного розсіювання енергії

$$\Psi = |W|\frac{}{\Pi} = 8\cdot d\cdot I(k,n)\cdot p^n\cdot\frac{A^{k+n-1}}{c} = h\cdot p^n\cdot A^{k+n-1}, \qquad (5)$$

де

$$h = 8\cdot d\cdot\frac{I(k,n)}{c} = 8\mu\cdot I(k,n), \qquad (6)$$

$$\mu = \frac{d}{c}. \qquad (7)$$

Оскільки за прийнятої умови параметри d і c, а також k і n постійні, тоді й величини μ та h також постійні. З виразів (6) та (7) можна отримати

$$\mu = 0{,}125 \cdot \frac{h}{I(k,n)}, \qquad (8)$$

$$d = \mu \cdot c = 0{,}125 \cdot h \cdot \frac{c}{I(k,n)} \qquad (9)$$

Результати обчислень величин W, Ψ та μ для шести видів тертя зведено у табл.2. Там також наведено значення дисипативної функції $\boldsymbol{\phi}$, які дозволяють визначити силу тертя $R = -\partial \boldsymbol{\phi} \frac{\square}{\partial \dot{q}}$. Для оцінювання параметрів тертя можна: 1) провести власний експеримент; 2) використати експериментальні дослідження інших авторів.

Експериментальні підходи щодо визначення параметрів (d,k,n) наведені нижче.

Щоб експериментально визначити параметри (d,k,n) тертя у якійсь деталі (з'єднанні) механічної системи, необхідно визначити за кривими затухаючих власних вільних коливань одномасової системи, елементом котрої є ця деталь, значення логарифмічного декременту λ залежно від частоти p і амплітуди A коливань, змінюючи параметри одномасової системи й обчислюючи λ у різні періоди затухаючих коливань [2].

Знаючи λ і вважаючи, як раніше, що тертя у системі мале, можна за відомою формулою визначити коефіцієнт відносного розсіювання енергії (Ψ≈2λ).

Опрацьовуючи отримані експериментальні значення Ψ за різних значень p та A за допомогою методів регресійного аналізу, можна отримати значення (h,k,n). При цьому даній деталі (з'єднанню) механічної системи можна поставити у відповідність або одну трійку величин (h,k,n) (k та n – необов'язково цілі числа), якщо така модель доволі точно відповідає експерименту, або деяку сукупність таких трійок h,k,n (де k та n – цілі числа), якщо при представленні величини Ψ у вигляді багаточлена зі складовими типу (5) неможливо обмежитися лише одним членом.

Далі за формулою (8) можна визначити величину μ, а користуючись виразом (9), і третій параметр – коефіцієнт тертя d (або сукупність таких параметрів, що відповідають різним значенням k та n).

Розглянемо можливість використання експериментальних досліджень інших авторів.

Нехай у результаті експериментів над деталями (з'єднаннями), аналогічними

розглядуваній, була визначена залежність , де $\Psi_{ан}$ – коефіцієнт відносного розсіювання

енергії у аналогічних деталях; $h_{ан}$ – постійна величина.

Під аналогічними розглядуваній розуміємо деталі, зроблені з того ж матеріалу, котрі мають такий самий характер навантаження (наприклад, такі, що працюють на кручення) й умови навантаження (наприклад, зусилля затягування стиску, умови змащування і т.д.) й такі, що мають лише мінімальні відмінності від розглянутої деталі (наприклад, тільки за розмірами і формою). Частина з перерахованих умов може бути визнана несуттєвою за результатами експерименту над аналогічними деталями.

Тоді можна стверджувати, що не зважаючи на деякі відмінності розглядуваної деталі від аналогічних, характер тертя залишається попереднім, тобто параметри тертя k і n деталі мають ті ж значення. Що ж стосується третього параметра – коефіцієнта тертя d  у деталі, то способи його визначення пояснюємо на конкретних прикладах.

**Таблиця 2**

Значення R, $|W|$, Ψ, h, μ, ∅ для різних видів тертя

**Table 2**

The value of R, $|W|$, Ψ, h, μ, ∅ for different types of friction

| Вели-чини | Види тертя | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Лінійне в'язке (k=0, n=1) | Пропорційне переміщення (k=1, n=0) | «Сухе» (k= n=0) | Нелінійне в'язке (k=0) | Гістерезисне (n=0) | Загального виду |
| R | $-d \cdot \dot{q}$ | $-d \cdot \lvert q \rvert sgn(\dot{q})$ | $-d \cdot sgn(\dot{q})$ | $-d \cdot \lvert\dot{q}\rvert^n sgn(\dot{q})$ | $-d \cdot \lvert q\rvert^k \cdot sgn(\dot{q})$ | $-d \cdot \lvert q\rvert^k \cdot \lvert\dot{q}\rvert^n \cdot sgn(\dot{q})$ |
| $\lvert W\rvert$ | $\pi \cdot d \cdot p \cdot A^2$ | $2dA^2$ | $4dA$ | $4d \cdot I(0,n)p^n \cdot A^{n+1}$ | $\frac{4d}{(k+1)} \cdot A^{k+1}$ | $4d \cdot I(k,n) \cdot p^n \cdot A^{k+n+1}$ |
| Ψ | $h \cdot p$ | h | $\frac{h}{A}$ | $hp^n \cdot A^{n-1}$ | $h \cdot A^{k-1}$ | $h \cdot p^n \cdot A^{k+n-1}$ |
| h | $2\pi \cdot \frac{d}{c}$ | $4 \cdot \frac{d}{c}$ | $8 \cdot \frac{d}{c}$ | $8 \cdot \frac{d}{c} \cdot I(0,n)$ | $8 \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{(k+1)}$ | $8 \cdot \frac{d}{c} \cdot I(k,n)$ |
| μ | $\frac{h}{2\pi}$ | $\frac{h}{4}$ | $\frac{h}{8}$ | $\frac{h}{8 \cdot I(0,n)}$ | $\frac{h \cdot (k+1)}{8}$ | $\frac{h}{8 \cdot I(k,n)}$ |
| ∅ | $\frac{d}{2} \cdot \dot{q}^2$ | $d \cdot \lvert q\rvert \cdot \lvert\dot{q}\rvert$ | $d \cdot \lvert\dot{q}\rvert$ | $\frac{d}{(n+1)} \cdot \lvert\dot{q}\rvert^{n+1}$ | $d \cdot \lvert\dot{q}\rvert \cdot \lvert q\rvert^k$ | $\frac{d}{(n+1)} \cdot \lvert q\rvert^k \cdot \lvert\dot{q}\rvert^{n+1}$ |

1. Плоска задача. Розглянемо плоске стикування довільної конфігурації. Нехай одиниця площі ds стикування має деяку жорсткість на зсув $c_s$ і коефіцієнт тертя при цьому навантаженні $d_s$ . Вважаємо, що характер сил тертя визначається найбільш узагальненою залежністю (див. табл.2, останній стовпчик). Розглянемо неоднорідний напружений стан у стиску, що виникає при закручуванні відносно центральної осі, яка перпендикулярна до площини стиску. Маємо для усього стиску

$$\Pi = 0{,}5 \cdot c \cdot q^2 \quad ; \tag{10}$$

$$\emptyset = \frac{d}{(n+1)} \cdot |q|^k \cdot |\dot{q}|^{n+1} , \tag{11}$$

де $c$ і $d$ – відповідно коефіцієнти жорсткості й тертя усього стику; $q$ – кут відхилення однієї половини стику відносно іншої.

Визначимо потенціальну енергію dП, яка запасається елементом dS, розміщеним на радіусі ρ, при відхиленні двох половин стику однієї відносно другої на кут q

.

Далі, беручи інтеграл по всій поверхні S стиску, визначимо потенціальну енергію деформації закручення стику

$$\Pi = \iint_{(s)} d\Pi = 0{,}5 \iint_{(s)} c_s \cdot \rho^2 \cdot q^2 ds = 0{,}5 \cdot c_s \cdot q^2 \cdot \iint_{(s)} \rho^2 ds$$

. (12)

Порівнюючи вирази (10) та (12), отримаємо

$$c = c_s \cdot \iint_{(s)} \rho^2 ds. \tag{13}$$

Аналогічно для дисипативної функції

$$d\emptyset = \frac{d_s \cdot ds}{(n+1)} \cdot |\rho q|^k \cdot |\rho \dot{q}|^{n+1} ,$$

$$\emptyset = \iint_{(s)} d\emptyset = \frac{ds}{(n+1)} \cdot |q|^k \cdot |\dot{q}|^{n+1} \cdot \iint_{(s)} \rho^{k+n+1} ds. \tag{14}$$

Порівнюючи вирази (11) та (14), отримаємо

$$d = d_s \cdot \iint_{(s)} \rho^{k+n+1} ds . \tag{15}$$

Враховуючи вирази (13) і (15), обчислимо величину μ для даного випадку згідно з виразом (7)

$$\mu = \frac{d}{c} = \mu_s \cdot \iint_{(s)} \frac{\rho^{k+n+1} ds}{\iint_{(s)} \rho^2 ds}, \qquad (16)$$

де $\mu_s = \frac{d_s}{c_s}$.

Вважаючи, що в аналогічного стику з площею $S_{ан}$, який відрізняється від розглянутого вище лише розмірами і формою, елемент площі ds буде мати такі ж характеристики $c_s$ і $d_s$, отримаємо подібно до випадку (16)

,

де – величина μ для аналогічних деталей, звідки

.

(17)

Вираз (6) для аналогічних деталей може бути представлений у вигляді звідки

. (18)

З урахуванням рівності (16) вираз (9) для коефіцієнта тертя d розглядуваної деталі (з'єднання) запишемо у вигляді

$$d = \mu \cdot c = \mu_s \cdot c \cdot \iint_{(s)} \frac{\rho^{k+n+1} ds}{\iint_{(s)} \rho^2 ds}. \qquad (19)$$

Підставляючи у формулу (19) вираз для $\mu_s$ згідно зі співвідношенням (17) і враховуючи формулу (18), остаточно отримаємо

. (20)

Зокрема, для випадку закручення кільцевих стиків вираз (20) набуде вигляду

, (21)

де $R_н$ та $r$ – зовнішній та внутрішній радіуси стику, який розглядається;

$R_{ан}$ та $r_{ан}$ – зовнішній та внутрішній радіуси аналогічного стику.

З виразів (20) та (21) бачимо, що при визначенні коефіцієнта тертя $d(d_{к.с.})$ за результатами випробувань аналогічних деталей при неоднорідному напруженому стані (у даному випадку при крученні плоского стику) необхідно знати розміри аналогічних деталей.

Винятком є випадки, коли

$$k + n = 1 . \tag{22}$$

При цьому вирази (20) та (21) спрощуються

(23)

Умова (22) виконується, якщо тертя є лінійно-в'язким (k=0, n=1) чи пропорційним переміщенню (k=1, n=0). При однорідному напруженому стані – бічному відносному зсуві двох половин того ж стику, вирази (13) та (15) для c й d набудуть

вигляду ; $d = d_s \cdot s$ й ми знову приходимо до виразу (23).

Таким чином, при однорідному чистому зсуві коефіцієнт тертя d для нашої деталі (з'єднання) можна розрахувати за формулою (23), знаючи лише величину $h_{ан}$ за результатами випробувань аналогічних деталей.

2. <u>Об'ємна задача</u>. Перейдемо до випадків, коли не можна обмежуватися плоскою моделлю, наприклад, при врахуванні втрат енергії у матеріалі. Розглянемо брус довжиною l, поперечний переріз котрої має довільну конфігурацію. Нехай одиниця об'єму dV бруса має деяку жорсткість на розтяг c з коефіцієнтом тертя при цьому навантаженні d. Як і вище, вважаємо, що характер сил тертя визначається найбільш загальною залежністю (1). Розглянемо спочатку однорідний напружений стан – розтяг бруса. Для потенціальної енергії й дисипативної функції усього бруса маємо вирази (10) й (11), де q – видовження бруса. Потенціальна енергія dП, яка запасається елементом dV при розтягуванні бруса, дорівнює

$$d\Pi = 0{,}5 \cdot c_v \cdot dV \cdot \left(\frac{q}{l}\right)^2 .$$

Беручи інтеграл по усьому об'єму бруса

(24)

і порівнюючи вирази (24) й (10) отримаємо

$$c = c_v \cdot \frac{V}{l^2} . \tag{25}$$

Аналогічно для дисипативної функції

$$d\emptyset = \frac{d_v \cdot dV}{(n+1)} \cdot \frac{\square}{\frac{\frac{q}{l}}{\square}^{k}} \cdot \frac{\square}{\frac{\frac{\dot q}{l}}{\square}^{n+1}} ,$$

$$\emptyset = \iiint_{(V)} d\emptyset = \frac{d_v}{(n+1)} \cdot \frac{\square}{\frac{q}{\square}^{k}} \cdot \frac{\square}{\frac{\dot q}{\square}^{n+1}} \cdot \frac{V}{l^{k+\square+1}}, \qquad d = d_v \cdot \frac{V}{l^{k+n+1}} . \tag{26}$$

Підставляючи формули (25) і (26) у вираз (7), отримаємо

$$\mu = \frac{d}{c} = \frac{\mu_v}{l^{k+n-1}}, \qquad (27)$$

де $\mu_v = \dfrac{d_v}{c_v}$.

Вважаючи, що в аналогічного бруса довжиною $l_{ан}$, котрий має об'єм $V_{ан}$ і відрізняється від розглядуваного також формою поперечного перерізу, елементи об'єму dV будуть мати ті ж характеристики $c_v$ і $d_v$, отримаємо подібно до рівняння (27)

, (28)

звідки

. (29)

З урахуванням формул (27), (29) і (18) перепишемо вираз (а) для коефіцієнта тертя розглядуваного бруса

(30)

Таким чином, при однорідному напруженому стані – розтягуванні – стикуванні для визначення коефіцієнта тертя d розглядуваної деталі необхідно у загальному випадку, крім величини $h_{ан}$, знати й розмір аналогічної деталі у напрямку прикладання сили. Однак за умови виконання рівності (22) вираз (40) перетворюється у (23) й необхідно, як і зазвичай, знати тільки величину $h_{ан}$. При неоднорідному напруженому стані, наприклад скрученні того ж бруса, потенціальну енергію dП, яка запасається елементом dV бруса, можна розраховувати за формулою

$$d\Pi = 0{,}5 \cdot c_v \cdot dV \cdot \left(\rho \cdot \left[\!\left[\frac{q}{l}\right]\!\right]\right)^2,$$

де $c_v$ – жорсткість на зсув елемента dV; $\rho$ – відстань від осі скручення до елемента dV; $q$ – відносний кут закрутки двох кінців бруса.

Проводячи інтегрування по усьому об'єму V бруса отримаємо

(31)

Аналогічно для дисипативної функції

$$d\emptyset = \frac{d_v \cdot dV}{(n+1)} \cdot \frac{\square}{\rho} \cdot \frac{\left.\frac{\dot q}{l}\right.^{\square+1}}{\square};$$

$$\emptyset = \iiint_{(V)} d\emptyset = \frac{d_v}{(n+1)} \cdot \frac{\square}{\underset{\square}{q^k}} \cdot \frac{\square}{\underset{\square}{\dot q^{\,n+1}}} \cdot \frac{1}{l^{k+n+1}} \cdot \iiint_{(V)} \rho^{k+n+1} dV, \qquad (32)$$

де $d_v$ – коефіцієнт тертя при зсуві елемента dV.

Порівнюючи вираз (31) і рівність (10), а вираз (32) із рівністю (11), отримаємо

$$c = \frac{C_v}{l^2} \cdot \iiint_{(V)} \rho^2 dV,$$

$$d = \frac{d_v}{l^{k+n+1}} \cdot \iiint_{(V)} \rho^{k+n+1} dV \;;$$

$$\mu = \frac{d}{c} = \mu_v \cdot \frac{4}{\rho^{k+n-1}} \cdot \left( \iiint_{(V)} \frac{[\rho^{k+n+1} dV)}{(\iiint_{(V)} [\rho^2 dV)]} \right] .$$

Далі, продовжуючи попередній хід думок, отримаємо подібно до формули (28).....(30)

(33)

Зокрема, при скрученні труби із зовнішнім радіусом $R_н$ і внутрішнім r будемо мати (порівняйте формули з виразом (21))

. (34)

Але навіть і у цьому випадку при умові (22) вирази (33) й (34) знову набудуть простого вигляду рівності (23).

Таким чином, при підрахунку коефіцієнта тертя d будь-якої деталі (з’єднання) на основі експериментальних досліджень інших авторів можна використати:

1) формулу (33) у загальному випадку;

2) формулу (20), якщо елемент, у якому відбувається розсіювання енергії, може бути поданий плоскою моделлю;

3) формулу (30), якщо елемент, у котрому розсіюється енергія, знаходиться під впливом однорідного розтягування-стикування;

4) формулу (23), якщо напруженим станом в елементі, що розсіює енергію, є однорідний чистий зсув;

5) формулу (23) в усіх випадках, які задовольняють умову (22), зокрема, коли тертя в елементі є лінійно-в’язким чи пропорційним переміщенню.

**Висновки.** Отримані у роботі формули дозволяють обчислити коефіцієнт тертя d, який не залежить ні від частоти, ні від амплітуди коливань і дають змогу проводити динамічні розрахунки за довільних заданих вимушених сил.

У загальному випадку кожна деталь (з’єднання), у якій розсіюється енергія, може мати кілька значень коефіцієнта тертя d, кожному з котрих буде відповідати своя пара значень (k,n).

Результати даного дослідження можуть бути у подальшому використанні при уточненні й удосконаленні існуючих методів врахування розсіювання енергії у механічних системах за полігармонічних вимушених впливах як на стадіях проектування та конструювання вказаних систем, так і у режимах їх реальної експлуатації.

**Conclusions.** The results obtained in this research give the possibility to calculate the friction coefficient *d* which is independent on amplitude and frequency and one may do dynamic calculations for any external disturbed forces.

On the whole, every detail or junction in which energy is dissipated may possess some different friction coefficients $d$ with its own pair of $(k, n)$.

The results of this research may be used in perspective for the refinement and improvement of used traditional methods for energy's dissipation calculations in mechanical systems with a polyharmonic external excitations as for the project stage or design one of these systems and for the regimes of real exploitation, as well.

**Список використаної літератури**


1. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272с.
2. Решетов, Д.Н. Демпфирование колебаний в деталях станков [Текст] / Д.Н. Решетов, З.М. Левина // Исследование колебаний металлорежущих станков при резании металлов. – М.; 1958. – С.45–86.
3. Кочнева, Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях [Текст ]/ Л.Ф. Кочнева. – М.: Наука, 1979. – 96 с.
4. Бабаков, Л.М. Теория колебаний [Текст] / Л.М. Бабаков. – М.: Наука, 1998. – 300 с.
5. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 206. – 420 с.
6. Скучик, Е. Простые и сложные колебательные системы [Текст] / Е. Скучик. – М.: Мир, 2000. – 280 с.
7. Сорокин, Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем [Текст] / Е.С. Сорокин. – М.: Госстройиздат, 1960. – 100 с.
8. Ржаницын, А.Р. Теория ползучести [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 320 с.
9. Цейтлин, А.И. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем [Текст] / А.И. Цейтлин // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1975. – №21. – С.15–20.
10. Цейтлин, А.И. О линейных моделях частотнонезависимого внутреннего трения [Текст] / А.И. Цейтлин// Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1978. – №3. – С.120–126.


*Отримано 5.12.2014*