

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

На правах рукопису

ГЛАДКА Олена Миколаївна

УДК 519.63.001.57

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У
ТЕХНОГЕННО-ДЕФОРМОВАНИХ ПЛАСТАХ МЕТОДАМИ
КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ТА СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник:
Бомба Андрій Ярославович
доктор технічних наук, професор

Рівне – 2015

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Розділ 1. МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗІДЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У LEF-ПЛАСТАХ. МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ І СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ	13
1.1. Математичний опис процесів витіснення вуглеводнів із техногенно-деформованих нафтогазових пластів. Поняття LEF-пласта	13
1.2. Математичне моделювання складних фільтраційних процесів. Числові методи конформних відображень при моделюванні квазіідеальних процесів для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями	19
1.3. Числово-аналітичний метод сумарних зображень у модельних крайових і початково-крайових задачах	28
1.3.1. Основи методу сумарних зображень	28
1.3.2. Задача стаціонарної фільтрації у шаруватому горизонтальному великої протяжності нафтовому пласті. Методи сумарних зображень і декомпозиції області за Шварцом	32
1.3.3. Просторова задача нестаціонарної фільтрації у пористому пласті. Поєднання методу прямих і методу сумарних зображень	37
1.4. Висновки до першого розділу	41
Розділ 2. СИНТЕЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ І СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ LEF-ОБЛАСТЕЙ	42
2.1. Синтез числових методів комплексного аналізу (ЧМКА) та сумарних зображень (СЗ) при математичному моделюванні фільтраційних процесів для одно- та двозв'язних криволінійних LEF-областей	42
2.2. Синтез ЧМКА та СЗ при математичному моделюванні фільтраційних процесів для LEF-областей з вільними ділянками меж	64
2.2.1. Задача фільтрації у ґрунтовій загаті без ділянки височування	67
2.2.2. Задача витіснення у нафтоносному пласті з вільною межею	70

2.3. Синтез ЧМКА та СЗ при математичному моделюванні процесів витіснення для трив'язних LEF-областей	74
2.4. Системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів для багатозв'язних криволінійних LEF-областей	80
2.5. Висновки до другого розділу	92
Розділ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У НЕОДНОРІДНИХ ДЕФОРМІВНИХ НАФТОГАЗОВИХ LEF-ПЛАСТАХ	93
3.1. Синтез ЧМКА, СЗ та декомпозиції області (ДО) при математичному моделюванні процесів витіснення у нелінійно-шаруватих LEF-пластах	93
3.2. Синтез ЧМКА, СЗ та ДО при математичному моделюванні нелінійних фільтраційних процесів в ущільнених LEF-пластах із зонами підвищеної проникності	106
3.3. Синтез ЧМКА, СЗ і ДО при математичному моделюванні нелінійних процесів витіснення для системи двох свердловин у двояко-шаруватому нафтовому LEF-пласті	113
3.3.1. Випадок однакових рідин	114
3.3.2. Моделювання витіснення нафти водою за поршневою схемою	124
3.3.3. Моделювання сумісного руху рідин за схемою Баклея-Леверетта	126
3.4. Числово-аналітичні узагальнення методів СЗ при моделюванні квазіідеальних процесів для нелінійно-неоднорідних LEF-пластів з урахуванням зворотнього впливу потенціалу швидкості на провідність середовища	128
3.4.1. Подання розв'язків у вигляді ряду за функцією течії	130
3.4.2. Подання розв'язків у вигляді ряду за функцією потенціалу	135
3.5. Числово-аналітичні методи комплексного аналізу і розщеплень при моделюванні фільтраційних процесів для нелінійно-неоднорідних та анізотропних LEF-пластів	142
3.6. Висновки до третього розділу	149

Розділ 4. ЧИСЛОВЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У LEF-ПЛАСТАХ	151
4.1. Визначення параметрів у нелінійно-шаруватих LEF-пластах	151
4.1.1.3 урахуванням зворотнього впливу потенціалу на провідність середовища	151
4.1.2.3 урахуванням зворотнього впливу функції течії на провідність середовища	160
4.2. Визначення параметрів у нелінійно двояко-шаруватих LEF-пластах	166
4.3. Висновки до четвертого розділу.....	179
ВИСНОВКИ	180
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	183
ДОДАТКИ	202

ВСТУП

Актуальність теми. На даний час є актуальними проблеми розробки методики математичного опису складних фільтраційних процесів, зокрема, витіснення вуглеводнів із неоднорідних нафтогазових чи ущільнених (сланцевих) пластів, що зазнали деформацій при експлуатації покладів, з метою подальшого дослідження цих процесів за допомогою комп'ютерного моделювання.

При цьому виникає необхідність у побудові математичних моделей, які б враховували зворотній вплив характеристик процесу на фільтраційні властивості пористого середовища, нелінійність фільтрації, що пов'язана зі зміною потенціалу швидкості в окремих зонах пласта, та зміни границь цих зон тощо. Ефективним методом математичного моделювання таких процесів у криволінійних областях, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, є розроблений А.Я. Бомбою і його учнями підхід на базі комплексного аналізу (з використанням методів квазіконформних відображень). Він автоматизує побудову динамічних сіток, що є основою для розрахунків величини поля швидкості, розподілу тиску в пласті, значень фільтраційних витрат і перетоків між свердловинами, точок призупинки потоку, інших характеристик моделі. Проте у випадках зонально-неоднорідних пластів цей підхід потребує подальшого розвитку, а також розроблення нової методики та обчислювальної технології для числового розв'язання і визначення параметрів відповідних крайових задач.

Одним із шляхів підвищення ефективності зазначеного підходу є використання як його компонентів числово-аналітичних методів сумарних зображень, що були розроблені Г.М. Положим і розвинуті у роботах його учнів А.А. Глуценка, І.І. Ляшка та ін., а також альтернуючого методу Шварца декомпозиції області. Аналіз літературних джерел показує, що такий підхід залишився поза увагою науковців.

Тому видається доцільним покласти в основу дисертаційного дослідження ідею синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції області з метою розв'язання актуального наукового завдання – математичного моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у техногенно-деформованих пористих пластах, границі зон неоднорідності яких визначаються шуканими лініями динамічної сітки

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (1991–2015 рр.) та науково-дослідних робіт на теми: “Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу «фільтрація-конвекція-дифузія» з післядією при неповних даних” (№ ДР 0109U001065), “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (№ ДР 0112U001014).

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи є* математичне моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у зонально-неоднорідних пористих нафтогазових, водоносних, малопроникних (сланцевих) LEF-пластах, геометрія зон яких визначається з урахуванням зворотнього впливу характеристик процесу на провідність середовища, і розроблення підходу до розв'язання відповідних крайових задач та визначення (ідентифікації) параметрів на основі синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі.

Для досягнення мети поставлено такі завдання:

- 1) сформулювати математичні моделі квазіідеальних фільтраційних процесів у LEF-пластах (горизонтальних пористих схильних до деформації водонафтогазових пластах) для випадків нелінійно-шаруватих, нелінійно-двоєко-шаруватих, неоднорідних середовищ, а також малопроникних середовищ із зонами підвищеної проникності;
- 2) розробити методику та обчислювальну технологію розв'язування нелінійних крайових задач для одно-, дво- та багатозв'язних

криволінійних LEF-областей та LEF-областей з вільними межами на основі синтезу і модифікації числових методів комплексного аналізу (конформних і квазіконформних відображень), сумарних зображень (та їх узагальнень), декомпозиції області і задачі та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища;

- 3) узагальнити методи сумарних зображень шляхом побудови числово-аналітичних представлень розв'язків нелінійних крайових задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами, що моделюють фільтраційні процеси у неоднорідних, анізотропних, деформівних середовищах;
- 4) розроблені математичні моделі і методи застосувати до математичного опису особливостей протікання нелінійних фільтраційних процесів у нелінійно-шаруватих, нелінійно двояко-шаруватих, неоднорідних пористих пластах за умов зворотнього впливу параметрів процесу на вихідні характеристики середовища;
- 5) розробити методику числового визначення параметрів моделі.

Об'єкт дослідження – нелінійні квазіідеальні фільтраційні процеси у LEF-пластах за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища.

Предмет дослідження – математичні моделі фільтраційних процесів у зонально-неоднорідних пористих нафтогазових, водоносних, ущільнених (сланцевих) LEF-пластах за умов взаємовпливу їх характеристик та параметрів середовища і числові методи розв'язання нелінійних крайових задач.

Методи дослідження. У роботі розроблено методику математичного моделювання та розв'язання задач на основі синтезу числових методів комплексного аналізу (конформних та квазіконформних відображень), методів сумарних зображень та їх модифікацій, методів декомпозиції області і задачі та розпаралелювання обчислень; побудовано методику отримання числово-аналітичних представлень розв'язків, які узагальнюють методи сумарних зображень на випадки задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами; запропоновано методику числового визначення параметрів квазіідеальних процесів у нелінійно-шаруватих областях, а також використано методи

побудови різницевих схем, поетапної параметризації окремих характеристик процесу і середовища.

Наукова новизна отриманих результатів:

- 1) сформовано нові та модифіковано існуючі математичні моделі нелінійних процесів витіснення (фільтрації) у зонально-неоднорідних пористих LEF-пластах, геометрія зон яких наперед невідома і визначається з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища;
- 2) здійснено постановку нелінійних крайових задач, в яких коефіцієнт провідності середовища залежить від потенціалу поля (напору, тиску) і від функції течії, для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних LEF-областей і вперше розроблено методику та обчислювальну технологію їх розв'язання на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами (у випадках нелінійно-шаруватих середовищ) чи числово-аналітичних представлень розв'язків (що є узагальненнями методів сумарних зображень на випадки нелінійно-неоднорідних середовищ) та декомпозиції області із застосуванням альтернуючого методу Шварца;
- 3) розроблені на основі LEF-пластів математичні моделі і методи розв'язання нелінійних крайових задач вперше застосовано до комп'ютерного моделювання нелінійних фільтраційних процесів у нафтогазових, водоносних, ущільнених (сланцевих) пластах, зональна неоднорідність яких є техногенно-зумовленою, за умов взаємовпливу параметрів процесу і середовища;
- 4) вперше отримано розв'язки задач на числове визначення параметрів квазіідеальних процесів (значень коефіцієнта провідності, критичних значень потенціалу і значень локальних фільтраційних витрат) у нелінійно-шаруватих LEF-пластах;

5) подальший розвиток отримали методи сумарних зображень, які були узагальнені на випадки спеціального класу нелінійних крайових задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами, що описують фільтраційні процеси у неоднорідних, анізотропних середовищах.

Достовірність отриманих у роботі результатів підтверджена строгим використанням як компонентів розробленої методики повністю теоретично обґрунтованих методів сумарних зображень, відомого альтернуючого методу Шварца декомпозиції області та апробованих іншими дослідниками числових методів конформних і квазіконформних відображень. Стійкість та збіжність запропонованих методів і алгоритмів проілюстровано великою кількістю числових розрахунків, зокрема, з використанням відомих точних розв'язків для тестових прикладів та шляхом порівняння отриманих результатів з числовими розрахунками за іншими алгоритмами.

Практичне значення отриманих результатів.

- Розроблені у роботі математичні моделі дозволяють описувати реальні процеси фільтрації (витіснення) вуглеводнів з пласта за умов зворотнього впливу характеристик процесу на властивості середовища, дають можливість замінити дорогі фізичні експерименти для дослідження впливу техногенно-зумовлених деформацій породи у навіколовдоловинних зонах нафтогазових пластів на процеси нафтогазовидобутку.
- Побудовані математичні моделі і методи розв'язання відповідних задач можуть бути використані для виконання прогностичних розрахунків при проектуванні розробок родовищ нафти і газу, застосовуватися для експертної оцінки результатів різноманітних технічних заходів, що проводяться з метою інтенсифікації нафтогазовилучення, виявлення і ліквідації застійних зон тощо.
- Розроблена методика розв'язання нелінійних крайових задач дозволяє автоматично розраховувати координати вузлів динамічної сітки, знаходити лінії розділу шарів (ділянок) сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислювати фільтраційні витрати, величину швидкості і інші параметри досліджуваних процесів, а також визначати (ідентифікувати) значення

коефіцієнта провідності, критичні значення потенціалу і значення локальних фільтраційних витрат за додатковими даними.

- Створена обчислювальна технологія містить комплекс комп'ютерних програм (процедур), що реалізують розроблені у роботі алгоритми, які є універсальними і придатними для вирішення також і інших, не описаних тут задач, зокрема, екологічних та природоохоронних.
- Результати роботи впроваджено Дочірнім підприємством «Науково-дослідний інститут нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» (ДП «Науканафтогаз»).
- Окремі матеріали дисертаційної роботи використовуються у навчальному процесі при розробці дисциплін “Чисельні методи конформних і квазіконформних відображень” для студентів НУВГП та “Методи комплексного аналізу”, “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами”, “Сучасні проблеми прикладної математики” для студентів РДГУ із спец. “Прикладна математика”, а також при написанні студентами курсових та дипломних робіт.
- Більшість результатів, отриманих в роботі, подано у вигляді формул, алгоритмів, таблиць і рисунків, які можуть бути включені у різні посібники та довідники і використані в інженерній практиці.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи обговорювалися на III, IV, XIII, XIV міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1994, 1995, 2010, 2012), I, III наук.-техн. конф. “Обч. методи і системи перетворення інформації” (Львів, 2010, 2014), міжнар. матем. конф. ім. В.Я. Скоробогатька (Львів, 2011), IV, V, VI, VII міжнар. конф. ім. акад. І.І. Ляшка “Обч. та прикл. матем.” (Київ, 2011, 2012, 2013, 2014), XVIII всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикл. матем. та інформатики” (Львів, 2012), IV міжнар. конф. з диф. рівнянь та їх застосувань ім. Я.Б. Лопатинського (Донецьк, 2012), всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми матем. моделювання та обч. методів” (Рівне, 2013, 2015), Intern. Conf. “Complex Analysis, Potential Theory and Applications” (Київ, 2013), 9-тій міжнар. наук.-практ. конф. “Нафта і газ –

2013” (Яремча, 2013), усеукр. наук. конф. “Матем. моделювання та матем. фізика” (Кременчук, 2013), міжнар. наук. конф. “Питання оптимізації обчислень” (Кацивелі, 2013), VI міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми матем. моделюв., прогнозування та оптимізації” (Кам'янець-Подільський, 2014), Intern. Conf. “Complex Analysis and Related Topics” (St. Petersburg, 2014), міжнар. наук.-техн. конф. “Комп'ютерне моделювання в наукомістких технологіях” (Харків, 2014), всерос. научн. конф. “Обратные краевые задачи и их приложения” (Казань, 2014), VIII междунар. научно-практ. конф. “Матем. моделирование в научно-технолог. и эколог. проблемах нефтегазовой отрасли” (Атырау, Казахстан, 2014), на звітних науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу, аспірантів і студентів НУВГП (1991–2015 рр.).

У повному обсязі дисертація обговорювалася на розширеному науковому семінарі кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій Національного університету водного господарства та природокористування під керівництвом зав. кафедри, д. т. н., проф. В.В. Древецького (21 жовтня 2014 р.); розширеному науковому семінарі кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя під керівництвом д. т. н., проф. М.Р. Петрика (23 лютого 2015 р.); науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету ім. Т.Шевченка під керівництвом зав. кафедри, чл.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. С.І. Ляшка (16 жовтня 2014 р.); розширеному науковому семінарі Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д. т. н., проф. О.Ю. Чернухи (7 жовтня 2014 р.); засіданні секції розробки родовищ нафти та газу і буріння свердловин Вченої ради ДП «Науканафтогаз» (20 лютого 2014 р.).

Публікації. За основними матеріалами роботи опубліковано 42 наукові праці, серед яких: 20 статей, із них – 11 у фахових наукових виданнях України, 2 статті – в іноземних фахових наукових періодичних виданнях; 22 публікації у

матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференцій, 5 праць опубліковані без співавторів. Є статті у виданнях, що індексуються у міжнародних наукометричних базах Scopus [14], РИНЦ (eLibrary.ru) [14, 17, 19, 21], Math. Reviews [14], EBSCO [176], Ulrich's Periodicals Directory [19, 176], Index Copernicus [19, 176] та ін.

Особистий внесок здобувача полягає у безпосередній участі в проведенні теоретичних досліджень, модифікації методів та розробці алгоритмів розв'язання відповідних крайових задач, самостійному проведенні числових експериментів, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей. Науковому керівнику А.Я. Бомбі, а також А.П. Кузьменку належить загальна постановка задач та загальний підхід до їх розв'язання. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно.

У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: розробка обчислювальної технології розв'язання нелінійних крайових задач для LEF-областей на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень [16, 18, 23, 25–28, 38], побудова математичних моделей фільтраційних процесів у нелінійно-шаруватих нафтогазових та сланцевих LEF-пластах [17, 20, 24, 29, 33, 39], узагальнення методів сумарних зображень [15, 19, 21, 30–32, 161, 162], розробка підходу до визначення (ідентифікації) параметрів квазіідеальних процесів [14, 22, 34–37, 177], розробка і програмна реалізація числових алгоритмів [14, 16–19, 22–28, 33–36, 38, 39, 90–101, 177].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (198 бібліографічних найменувань) та 3-х додатків. Загальний обсяг дисертації – 206 сторінок, з них – 155 сторінок основного тексту, 45 рисунків, 10 таблиць.

РОЗДІЛ 1

МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗІІДЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У LEF-ПЛАСТАХ. МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ І СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

У розділі викладено загальний опис проблеми дослідження, наведено огляд літературних джерел за темою дисертації, розглянуто основи числових методів конформних та квазіконформних відображень і числово-аналітичних методів сумарних зображень.

Розроблено методику застосування методів сумарних зображень і декомпозиції області до розв'язання модельних крайових задач стаціонарної і нестаціонарної фільтрації у плоских та просторових елементах нафтових пластів, основні прийоми якої використані у наступних розділах роботи для розв'язання більш складних задач у криволінійних областях.

1.1. Математичний опис процесів витіснення вуглеводнів із техногенно-деформованих нафтогазових пластів. Поняття LEF-пласта

На сьогоднішній день проблема задоволення потреб нашої країни в нафті та газі є не тільки першочерговим завданням забезпечення сталого розвитку України, а і виступає стратегічним питанням державної безпеки. Більшість нафтогазових родовищ в Україні виснажені і перебувають на завершальній стадії розробки, що характеризується падінням дебіту свердловин та погіршенням умов видобутку вуглеводнів [5, 86, 182]. При цьому, через зональну та шарову неоднорідність колекторів, підвищену в'язкість нафти і прояви інших чинників, що виникають в процесі експлуатації родовищ, 35–60% початкових запасів нафти залишаються невилученими, тоді як лише близько 20% свердловин мають фактичний дебіт, відповідний непошкодженим (первинним) пластам, а в решті – у 2–30 разів нижчий [9, 10]. Причинами зниження продуктивності є кольматація привибійної зони під час розкриття пластів та експлуатації свердловин дисперсними частинками бурових і цементних розчинів, продуктами корозії обладнання, осадами, що утворюються при взаємодії пластових вод і запомпованих розчинів, смолами та асфальтенами, піском та глинистими частинками скелету породи, збільшення обводненості вуглеводнів та утворення

стійких високов'язких водонафтових емульсій, внаслідок проникнення у пласт фільтрату технологічних рідин тощо [5, 9, 10, 75–78, 118, 143].

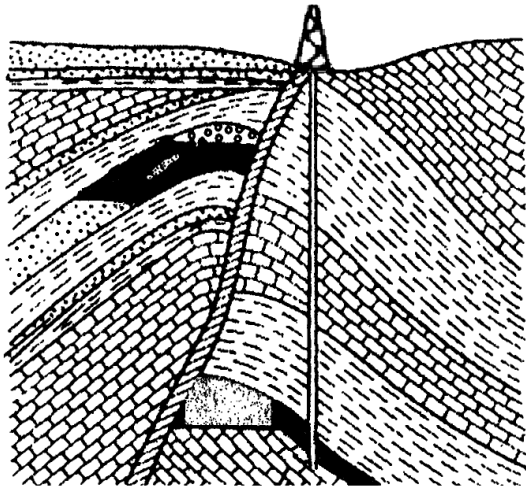


Рис. 1.1. Схема перерізу нафтогазового пласта, що розробляється [7]

Сучасні фахівці у галузі видобування нафти і газу розробляють і активно застосовують на практиці методи інтенсифікації нафтогазовилучення з діючих родовищ, з поміж яких (за класифікацією В.С. Бойка [9]) виділяють чотири основні групи методів впливу на поклади: гідродинамічні методи (циклічне заводнення, зміна напрямку фільтраційних потоків, створення високих тисків нагнітання чи форсоване відбирання продукту), фізико-хімічні методи (застосування активних домішок), газові методи (витіснення нафти газом високого тиску), теплові методи (використання різного роду теплоносіїв).

За цих умов важливим завданням є розробка підходів до оцінки та техніко-економічного обґрунтування ефективності цих методів і більш ґрунтовне вивчення особливостей протікання складних процесів витіснення вуглеводнів із неоднорідних пластів, що зазнали деформацій при експлуатації покладів, а це, в свою чергу, вимагає розробки методики математичного опису цих процесів (з урахуванням зворотнього впливу їх параметрів на вихідні характеристики середовища) з метою їх подальшого дослідження за допомогою комп'ютерного моделювання.

Геологічний пласт є дуже складним об'єктом, який не можна дослідити точно [1, 2, 117, 149]. В той же час, результати, що отримані за допомогою моделей підземної гідрогазодинаміки мають використовуватися в процесі прийняття конкретних технологічних рішень. У зв'язку з недостатністю інформації про поклади з неоднорідною будовою продуктивних пластів при створенні відповідних математичних моделей родовище (поклад) ділять на ділянки (зони), в межах яких продуктивний пласт можна вважати однорідним з

достатнім ступенем точності [7, 49, 81, 123, 165] чи таким, що його основні характеристики є певним чином заданими. Проте ці зони є криволінійними, із складною геометрією, що не повністю визначена. Моделювання їх шаруватими структурами не завжди виправдано, оскільки може призводити до значних відхилень розрахованих результатів від реальних даних [88, 155, 195]. Враховуючи сучасні дослідження з підземної гідродинаміки, зокрема, механізми руху флюїдів та техногенно-зумовлені процеси навколосвердловинних деформацій породи [75, 118, 122, 143, 184, 192, 197] для моделювання зонально-неоднорідних пластів нами введені такі модельні об'єкти як LEF-пласти, що визначають нелінійно-шаруваті структури, в яких параметри, котрі характеризують основні фільтраційні властивості середовища (наприклад, коефіцієнт проникності пласта), є кусково-сталими функціями, залежними від квазіпотенціалу і функції течії, а невідома геометрія зон визначається відповідними екіпотенціальними лініями і лініями течії, що розраховуються в процесі розв'язання задачі. Такий підхід дозволяє також враховувати зворотній вплив параметрів процесу на вихідні характеристики середовища.

LEF-пластом (LEF – абревіатура від Lines of Equipotential and Flow) названо пористий (водоносний, нафтогазовий, сланцевий) пласт, що моделюється криволінійною обмеженою поверхнями течії (поверхнями, що утворені лініями течії) і екіпотенціальними поверхнями (утвореними екіпотенціальними лініями) LEF-областю із заданим квазіпотенціальним полем, відповідна область комплексного квазіпотенціалу якої є багатогранником (у плоскому випадку – багатокутником) із сторонами, паралельними осям координат, що є сукупністю “склеєних” між собою вздовж вертикальних чи горизонтальних поверхонь багатогранників (багатокутників, у кінцевому рахунку – прямокутників), котрі відповідають ділянкам пласта (з неповними даними про їх границі), які характеризуються однорідним середовищем чи деякими спеціальним чином заданими параметрами (рис. 1.2).

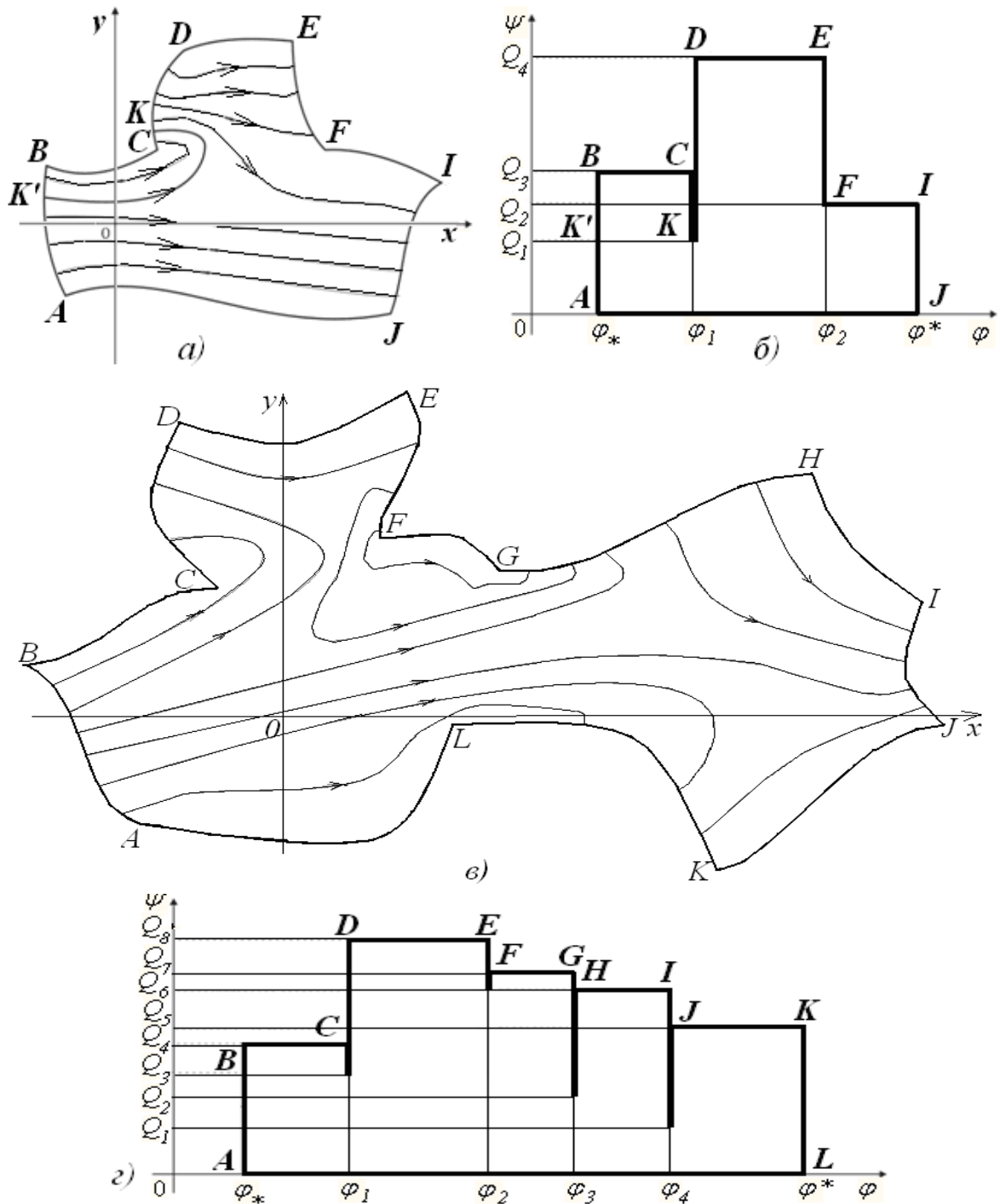


Рис. 1.2. Приклади горизонтальних LEF-пластів (а, в) та відповідні їм області комплексного квазіпотенціалу (б, з)

Багато дослідників у наш час, зважаючи на величезні можливості сучасних комп'ютерних технологій, намагаються описувати процеси, що відбуваються в нафтогазових пластах, за допомогою детальних просторових моделей [164, 168, 173]. Але детерміновані математичні моделі, для їх розв'язання, потребують задавання точних геологічних та фільтраційних характеристик об'єкта дослідження, отримання яких у випадку нафтогазових

пластів є дуже проблематичним, що може призводити до неадекватного опису процесів витіснення і значних похибок при обчисленнях.

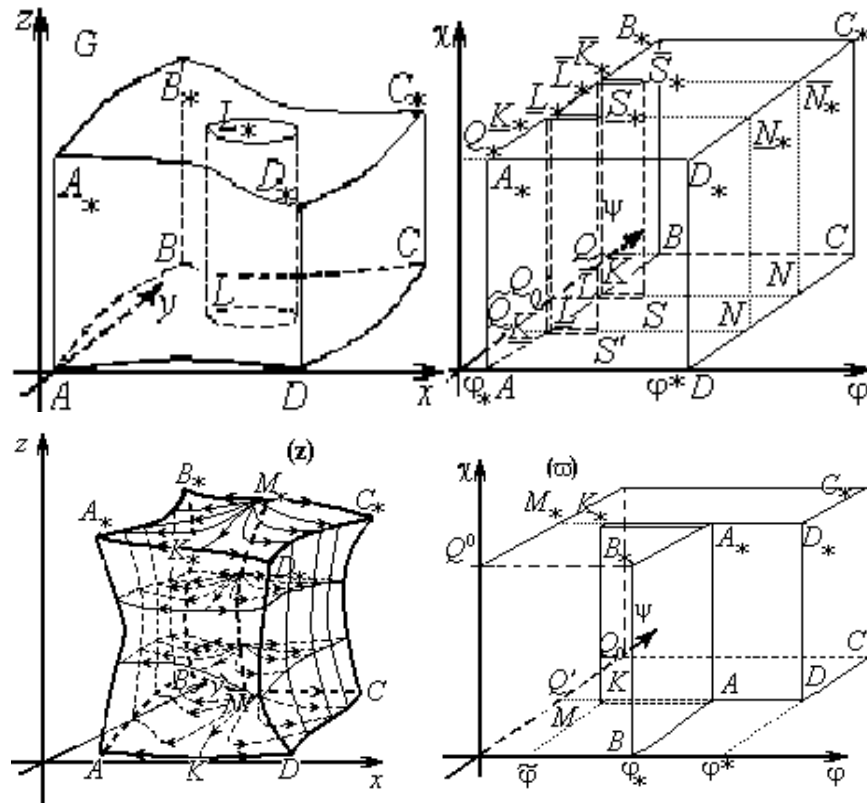


Рис. 1.3. Схеми формування течії у просторових LEF-областях та відповідні області комплексного квазіпотенціалу [46]

Тому, на початковому етапі моделювання достатньо використовувати математичні моделі процесів меншої просторової розмірності (а саме – двовимірні) з певними модифікаціями, що дозволяли б відслідковувати основні ефекти протікання процесу з подальшою екстраполяцією на тривимірні моделі. Тим більше, що методи поширення на простір задач плоскої фільтрації відомі і детально розроблені у роботах багатьох учених [13, 46, 141] (рис. 1.3).

Елемент горизонтального продуктивного пласта зручно моделювати двовимірною криволінійною областю, обмеженою екіпотенціальними лініями і лініями течії (LEF-областю), зокрема, *однозв'язною* (чотирикутною), що є елементом симетрії при рядному розташуванні експлуатаційних і нагнітальних свердловин [12, 45], *двозв'язною*, обмеженою екіпотенціальними лініями – контуром свердловини і контуром її живлення [12, 41], *тризв'язною*, обмеженою двома екіпотенціальними лініями (контурами експлуатаційної і нагнітальної свердловин) і непроникним контуром [12, 42], *тризв'язною*, обмеженою трьома екіпотенціальними лініями чи *чотиризв'язною* (рис. 1.4),

обмеженою трьома еквіпотенціалами – контурами свердловин і зовнішнім непроникним контуром [12, 43] тощо.

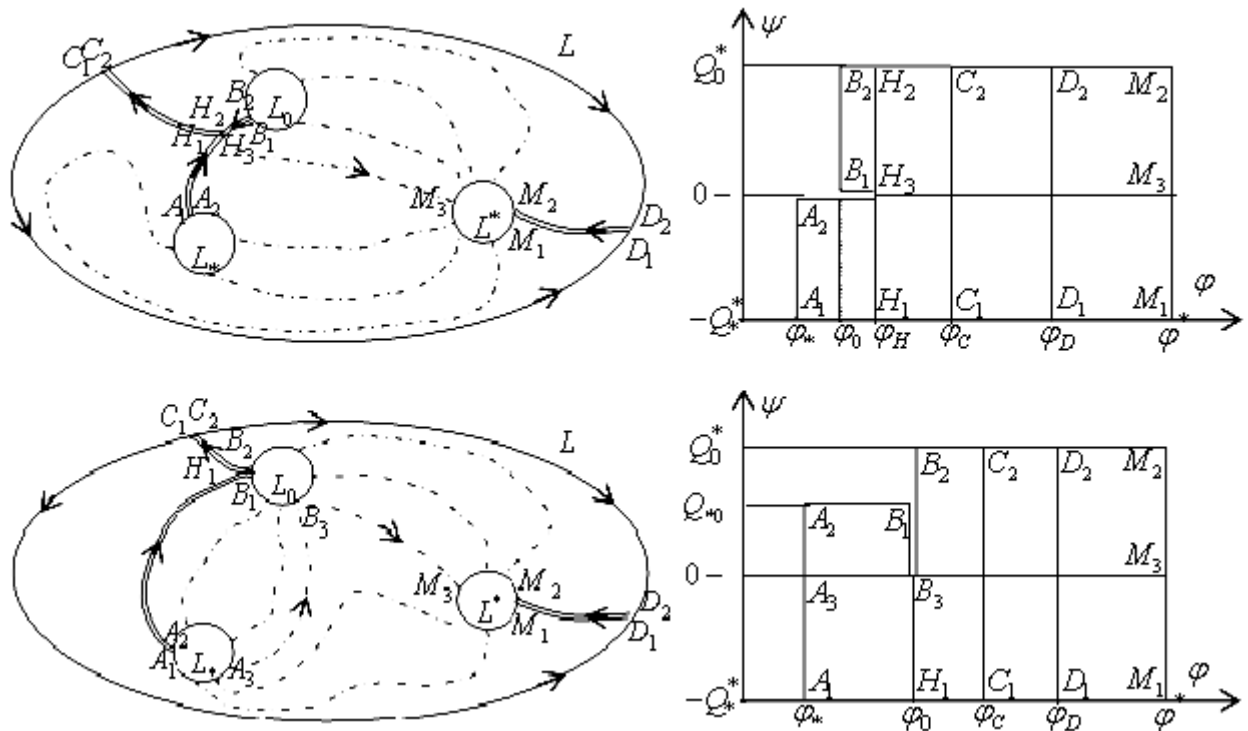


Рис. 1.4. Схеми формування течії у чотиририв'язних LEF-областях та відповідні області комплексного квазіпотенціалу [43]

Попри велику кількість наукових досліджень з проблем математичного моделювання процесів фільтрації у пористих пластах, на сьогоднішній день існує чимало проблем, що стосуються наукового обґрунтування заходів з підвищення якості проектування та ефективності розробки родовищ нафти та газу, встановлення особливостей протікання нелінійних процесів витіснення з урахуванням зворотнього впливу параметрів процесу на присвердловинну зону пласта тощо, пов'язаних, в першу чергу, з вибором математичних моделей, які б, з одного боку, адекватно і максимально точно враховували всі чинники реальних процесів, а з іншого – були б сприятливими для розв'язання і комп'ютерного моделювання. Враховуючи те, що фізичні експерименти та натурні дослідження у нафтогазовій сфері дуже складні і дорогі, математичне та комп'ютерне моделювання цих процесів є актуальним і має важливе практичне значення.

Не менш важливою є проблема визначення (ідентифікації) параметрів пласта за деякими відомими даними, що призводить до складних обернених

задач, для яких, на сьогоднішній день, немає загальноприйнятої універсальної теорії і усталених методів розв'язання [80].

1.2. Математичне моделювання складних фільтраційних процесів. Числові методи конформних відображень при моделюванні квазіідеальних процесів для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями

Вважається, що систематичне вивчення законів руху рідин у пористих середовищах веде свій початок від досліджень французького інженера А. Дарсі, який у 1856 р. опублікував експериментально отримане рівняння, що і досі вважається основним законом фільтрації і записується у вигляді [169]:

$$v = -\kappa \cdot I,$$

де v – швидкість фільтрації,

κ – коефіцієнт, який згодом назвали коефіцієнтом фільтрації,

I – градієнт напору.

Теоретичні дослідження експериментального закону Дарсі зроблено його співвітчизником Ж. Дюпюї у 1848–1863 рр., який отримав формулу для визначення об'ємної витрати свердловин та ін. Більш складні задачі теорії фільтрації розглядалися Ф. Форхгеймером, який запропонував інші формули для опису руху, що, на його думку, не підпорядковувалися лінійному закону, і Рейнольдсом, який досліджував допустимі межі застосування закону Дарсі стосовно швидкості фільтрації.

Математична теорія фільтрації, її основні закони та теоретично обґрунтовані методи були закладені у фундаментальних працях М.Є. Жуковського [73], який у 1889 р. вперше теоретично отримав основні диференціальні рівняння фільтрації, розробив метод розв'язування широкого класу задач фільтрації з вільними поверхнями, описав метод напрямних і твірних сіток, в якому використовується теорія конформних відображень.

У 20-х роках минулого століття в розвитку теорії фільтрації визначились два взаємопов'язані напрямки. Перший з них, фундаментом для якого послужили роботи академіка М.М. Павловського, стосується вивчення руху ґрунтових вод, меліоративного будівництва, водопостачання тощо. Засновником другого напрямку – науки про підземну гідравліку нафти і газу – є

видатний учений Л.С. Лейбензон [106–107], у роботах якого вперше була розроблена цілісна математична теорія фільтрації газу і газованої рідини.

У працях М.М. Павловського викладено основи математичної теорії і точних гідромеханічних методів розв'язання задач плоского напірного руху ґрунтових вод під гідротехнічними спорудами, де ці задачі поставлено як задачі математичної фізики, які зведено до задач теорії потенціалу. При цьому ефективно використовувався метод конформних відображень, зокрема формули Кристофеля-Шварца [132]. Вперше запропоновано і обґрунтовано метод електрогідродинамічної аналогії, який і до сьогодні широко застосовується для розв'язування задач фільтрації води, нафти, газу, особливо, в неоднорідних колекторах.

Фундаментальним внеском у теорію фільтрації можна вважати також роботи П.Я. Полубаринової-Кочиної [130, 132], в яких розроблено аналітичний метод розв'язування плоских задач стаціонарної фільтрації, в основу котрого покладено ідею Н.Є. Кочина застосування до задач про рух ґрунтових вод аналітичної теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку типу Фукса з регулярними особливими точками.

Багато дослідників (М.Т. Ефендієв, С.В. Ізбаш, С.В. Ковальчук, В.С. Козлов, О.М. Костяков, Д.М. Мінц, А.І. Мурашко, О.Я. Олійник, Н.Н. Павлова, А.М. Патрашов та ін.) вивчали фільтраційні деформації, що відбуваються у ґрунті під дією градієнтів напору фільтраційних потоків. Проте, існуючі математичні моделі, як правило, не дозволяють достатньо добре враховувати ці явища, оскільки, фільтраційні процеси особливо у присвердловинних зонах ускладнюються різними локальними ефектами, пов'язаними з особливістю розподілу полів тиску, швидкості, градієнту тиску, насиченості та інших характерних параметрів. Так, при перевищенні діючими градієнтами допустимого (критичного) значення для даного ґрунту в навколосвердловинних зонах відбувається втрата фільтраційної міцності ґрунтів за рахунок переміщення дрібних його частинок (суфозії), що зумовлює зміну коефіцієнта проникності [72, 75]. Також при фільтрації відбувається утворення і накопичення осаду завислих частинок (кольматаж), що призводить до зменшення коефіцієнта проникності і пористості середовища, внаслідок чого

зростає гідравлічний опір пласта в окремих зонах [54, 143, 185]. Таким чином, проблема зворотнього впливу параметрів процесу на вихідні характеристики середовища є важливою і залишається, на нашу думку, не достатньо вивченою.

Як уже зазначалося, основоположником іншого напрямку теорії фільтрації, що стосується проблем розробки нафтогазових родовищ, є видатний учений Л.С. Лейбензон, результати фундаментальних досліджень якого були узагальнені в обширній монографії “Нефтепромысловая механика” (1934 р.), в якій вперше системно викладені основи нафтогазової підземної гідромеханіки, та у низці інших наукових праць. Розробкам основ технології нафтовіддачі присвячені роботи М. Маскета [114, 115], Уайтакера [196], основи теорії двофазної фільтрації викладені у роботах С. Баклея [164] і М. Леверетта [183], дослідження Р. Коллінза [85], а також А. Ван Евердингена і У. Херста дозволили удосконалити гідродинамічні розрахунки просування води у нафтогазових покладах. Видатний внесок у розвиток теорії фільтрації у нафтогазоводоносних пластах внесли також Б.Б. Лапук, С.А. Христианович, І.А. Чарний [89, 149], В.Н. Щелкачев [153], фундаментальні дослідження яких були системно викладені у монографіях і підручниках, що стали класичними основоположними науково-методичними працями для підготовки інженерів та науковців.

У наш час проводяться широкі дослідження способів інтенсифікації і підвищення рівня видобутку вуглеводнів із надр. Це пов'язано із вичерпуванням легкодоступних запасів нафти і газу, а також – із зростаючими потребами у них і ускладненнями геологічних умов розробки родовищ. Ці проблеми широко представлені у роботах А.І. Акульшина [2], Г.І. Баренблатта [6], Л.П. Дейка [67], М. Карлсона [165], Ф.Ф. Крейга [87], Б.Г. Кричлоу [88], Л. Лейка [144], Н.Н. Михайлова [118], А.В. Нифаптова [123], М. Уолша та багатьох інших.

При розробці нафтогазових родовищ рідини і газу, що насичують продуктивні пласти і є сумішами вуглеводневих та неуглеводневих речовин, спричиняють багатофазну течію складної багатокомпонентної суміші, фази якої рухаються з різними швидкостями. Основою для моделювання і розрахунків цих процесів служить теорія багатофазної і багатокомпонентної фільтрації, що

інтенсивно розвивається останніми роками [120, 147, 154, 155, 170] і потребує створення ефективних методів розв'язання відповідних задач [53, 121, 156, 157, 175, 179, 187, 198].

Як уже зазначалося, у дослідженнях процесів фільтрації велику роль відіграло використання аналітичного методу конформних відображень у його різноманітних модифікаціях, зокрема, у роботах С.Ф. Авер'янова, В.І. Аравина, М.Г. Бернардинера [50], В.В. Ведерникова, Н.Н. Веригина, Н.М. Герсєванова, Б.Б. Девисона, М.А. Лаврєнтьєва [104, 105], С.Н. Нумєрова, А.А. Угинчуса та ін., який полягає у тому, що дійсну частину $\varphi = \varphi(x, y)$ функції $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ комплексної змінної $z = x + iy$ можна розглядати як потенціал швидкості деякого фільтраційного поля, а уявну – $\psi = \psi(x, y)$ як функцію течії [65, 79].

Але у випадку складної конфігурації пласта добре розвинуті аналітичні методи зазвичай використати неможливо, що стало поштовхом до розробки різноманітних числових та числово-аналітичних методів, більшість із яких побудована на ідеї дискретизації відповідної області [56, 81, 124, 142, 158, 170, 191, 193], що передбачає розбиття її на блоки фіксованого розміру та апроксимації відносно них відповідних рівнянь. Проте, досить часто така дискретизація не є оптимальною, оскільки характеристики фільтраційної течії можуть сильно змінюватися в одних частинах області і майже не змінюватися – в інших, тому доводиться використовувати нерівномірне розбиття області на блоки, розміри яких необхідно адаптувати до розв'язку [55, 64, 83, 166]. Окрім цього, виникає проблема з “адекватністю” дискретизації відповідних рівнянь конвекції, що є нелінійними, розв'язки яких не суперечили б фізичній картині протікання відповідного процесу [84, 152, 185, 190, 192, 195, 196].

Важливі результати з розробки методів послідовних конформних відображень стосовно фільтраційних задач отримав П.Ф. Фільчаков [146] і його учні, зокрема, В.І. Лаврик [102, 103, 109], який розробив підхід до розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективного переносу при фільтрації у пористих середовищах, що ґрунтується на переході від криволінійної фізичної

області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу; при цьому, конвективні рівняння зводяться до одновимірних і розв'язуються вздовж траєкторій руху частинок рідини.

Значний внесок у створення фундаментальних підходів до побудови математичних моделей складних систем та процесів і методів їх розв'язання зробили також Х. Азіз [1], Дж. Андерсон [4], К.С. Баснієв [7], І.В. Бейко [8, 78, 159], В.С. Бойко [9, 10], А.Я. Бомба [11–46, 161, 162, 176], В.М. Булавацький [11, 47, 48], А.П. Власюк [55], А.А. Глущенко, О.Ю. Грищенко, О.В. Голубєва, В.С. Дейнека [68–70, 138, 139], В.Н. Єнтов [6, 50], Ю.П. Желтов [72], Л.М. Журавчак [74], Р.Г. Ісаєв, Р.Д. Каневська [81], Н. Крістеа, В.А. Кривень, І.І. Ляшко, С.І. Ляшко [65, 112, 185], В.О. Міщенко, В.Н. Монахов [119], Р.І. Нігматулін [120], В.Н. Ніколаєвський [122], Е. Оран [124], М.Р. Петрик, В.Ф. Півень [126], Я.Д. П'янило [131], Е.С. Ромм [133], П. Роуч [134], І.В. Сергієнко [68, 70, 110, 138, 139], Е. Сеттарі [1], В.В. Скопецький [11, 41, 43, 47, 48, 68, 83, 110, 138], Г. Уолліс, Р.Т. Фазлиєв [145], М.М. Хасанов, Л.І. Хейфец [147], Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха [148, 150], А.Е. Шейдегер та ін. Методи побудови різницевих схем для рівнянь еліптичного типу досліджувалися у роботах П.Н. Вабищевича [51], О.К. Годунова [64], П. Грісварда [174], Г.А. Ділтса [171], Й. Йіна [180], Г.І. Марчука [113], Дж. Ортеги [125], А.А. Самарського [135–137].

Важливе значення для проектування і підвищення ефективності розробок нафтогазових покладів мають математичні методи визначення за деякими відомими даними як параметрів середовища (проникності, пористості, пружності тощо), так і характеристичних значень фізичних процесів, що відбуваються при витісненні вуглеводнів із пласта – критичних значень тиску, потенціалу, фільтраційних витрат, перетоків тощо. Задачі ідентифікації параметрів – обернені коефіцієнтні задачі – як відомо, є некоректно поставленими, здебільшого, через відсутність стійкості за вихідними даними, і потребують регуляризації – згладжування розв'язків у межах похибки вимірювань. Окрім цього, відомо, що коефіцієнтні обернені задачі для еліптичних диференціальних рівнянь є найбільш складними і для них найважче

(у порівнянні, з гіперболічними чи параболічними рівняннями) забезпечити єдиність та стійкість розв'язку [80, 181].

Загальним математичним методом розв'язування некоректно поставлених задач є метод регуляризації А.Н. Тихонова [140], який і до сьогодні широко використовується і розвивається у роботах багатьох учених. Щодо принципів побудови регуляризуючих алгоритмів, то найбільш поширеним є варіаційний принцип, застосовується також покрокова і ітераційна регуляризація [3]. Проте, як відомо, вони мають значну обчислювальну складність і потребують великого обсягу розрахунків, пов'язаних, у першу чергу, із знаходженням необхідного значення параметра регуляризації, від правильності якого у значній мірі залежить стійкість розв'язку.

Для розв'язання обернених задач розроблено низку різноманітних підходів, які базуються, в основному, на методах оптимізації, зокрема, запропоновані у роботах В.С. Дейнеки, І.В. Сергієнка та ін. градієнтні методи ідентифікації параметрів багатокomпонентних розподілених систем, що полягають у побудові градієнтів квадратичних функціоналів-нев'язок шляхом розв'язання прямих і відповідних спряжених задач [69, 139], на основі теорії малих збурень, методі модулюючих функцій (М-методі), методі граничних інтегральних рівнянь [188] тощо.

Хоча зараз теорія обернених і некоректно поставлених задач стрімко розвивається і застосовується практично в усіх наукових дисциплінах, де використовуються математичні методи, зважаючи на її відносну “молодість” (перші публікації з цієї області науки з'явилися у середині двадцятого століття), стосовно великої кількості задач немає “усталених” підходів і “визнаних” методів, з багатьох важливих результатів продовжуються дискусії, намагання їх покращити, постійно з'являються нові методики, теоретичні дослідження і прикладні науково-практичні розробки [66, 71, 112, 160, 163, 166, 176, 186, 194]. Ще однією складною проблемою, яка стосується ідентифікації значень основних параметрів математичних моделей, що описують процеси у нафтогазових пластах, є недостатність тих вимірюваних даних (даних

каротажу), які можуть бути отримані у свердловинах і часткова відсутність необхідних даних про пласт за межами свердловин, отримання яких є дуже проблематичним.

Важливе місце серед розробок у напрямку математичного моделювання складних фізичних процесів, що відбуваються, зокрема, при фільтрації ґрунтових вод, витісненні вуглеводнів із нафтогазових пластів тощо, за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні параметри середовища і з урахуванням фільтраційних деформацій та збурень займають дослідження професора А.Я. Бомби і його учнів, зокрема, С.С. Каштана [12, 40], який поширив підхід до моделювання фільтраційних процесів (як лінійних, так і з урахуванням деформаційних явищ у середовищі) на випадки криволінійних чотирикутних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, Д.О. Пригорницького [12, 41, 42], якому належить розробка методики математичного моделювання збурень фільтраційних процесів у пористих пластах для дво- та тризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями, В.І. Гаврилюка, який поширив застосування числових методів конформних і квазіконформних відображень на області із вільними ділянками меж, С.В. Ярощак [12, 43–45], котрий розробив методику моделювання процесів витіснення нафти водою з урахуванням взаємодії нагнітальних та експлуатаційних свердловин у пласті і двофазної фільтрації, А.В. Теробус [46], Ю.Є. Климюка [13], яким належить перенесення числових методів комплексного аналізу на просторові модельні задачі та ін.

Розроблений А.Я. Бомбою і його учнями підхід розглянемо на прикладі моделювання фільтраційного процесу у криволінійній області $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), що обмежена чотирма гладкими кривими $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$ (лінії течії), $AB = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ (еквіпотенціальні лінії), які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами. Процес фільтрації описується законом Дарсі $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ і рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ – швидкість фільтрації, κ –

деяка обмежена неперервна в G_z функція (чи тензор функцій другого роду), яка характеризує провідність середовища, φ – потенціал поля, що задовольняє умови $\varphi|_{AB}=\varphi_*$, $\varphi|_{CD}=\varphi^*$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{BC}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{DA}=0$ (для ізотропного середовища), φ_* , φ^* – сталі, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, n – зовнішня нормаль.

Введенням функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною крайових умов на умови: $\varphi|_{AB}=\varphi_*$, $\varphi|_{CD}=\varphi^*$, $\psi|_{AD}=0$, $\psi|_{BC}=Q$ (де Q – повна фільтраційна витрата), приходимо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ заданої фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (при відповідності кутових точок):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{AB}=\varphi_*, \quad \varphi|_{CD}=\varphi^*, \quad \psi|_{AD}=0, \quad \psi|_{BC}=Q \end{aligned} \quad (1.1)$$

з невідомим параметром $Q = \int_{AB} -\frac{\partial\varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy$.

Перехід до оберненого конформного відображення області G_ω на G_z дозволяє отримати задачу (з невідомою витратою Q)

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{aligned} \quad (1.2)$$

яка зводиться до знаходження розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega \quad (1.3)$$

(рівнянь Лапласа при $\kappa = 1$), що задовольняють крайові умови задачі (1.2) і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок границі

області [12].

Для числового розв'язання задачі виконується її дискретизація шляхом заміни рівнянь (1.3) відповідними скінченно-різницевиими аналогами за дев'ятиточковою симетричною схемою з вагами чи п'ятиточковою різницевою схемою, крайові умови і умови ортогональності – спеціальними числово-аналітичними різницевиими рівняннями, конформний інваріант – за принципом “конформної подібності у малому” відповідних чотирикутників областей G_o та G_z . Алгоритм числового розв'язування задачі будується на основі ідей методу блочної ітерації шляхом поетапної параметризації величини конформного інваріанту відображення, шуканих координат граничних та внутрішніх вузлів динамічної сітки. В результаті розв'язання задачі знаходиться значення повної фільтраційної витрати Q та значення шуканих функцій x і y (координат вузлів побудованої в області фільтрації динамічної сітки).

Таким чином, у роботах [11–13, 40–46] з використанням числових методів конформних і квазіконформних відображень розроблено комплексний підхід до розв'язування модельних задач одно- та двофазної фільтрації з урахуванням фільтраційних деформацій та збурень і взаємовпливу характеристик середовища та процесу для одно- та багатозв'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями і лініями течії. Проте реалізація зазначеного підходу у багатьох випадках супроводжується значними труднощами. Зокрема, це проблема вибору “якісного” початкового наближення шуканих функцій, накопичення обчислювальних похибок при послідовному ітераційному перерахунку значень функцій у вузлах розрахункової сітки за значеннями у сусідніх вузлах, проблема визначення умов завершення ітераційного процесу розрахунку значень функцій у внутрішніх вузлах за фіксованими значеннями у зовнішніх, які, в свою чергу, ще будуть “уточнюватись” на наступному етапі обчислень тощо. Тому створення якісної обчислювальної технології розв'язання такого класу задач – і досі залишається актуальним.

1.3. Числово-аналітичний метод сумарних зображень у модельних крайових і початково-крайових задачах

1.3.1 Основи методу сумарних зображень

Багато сучасних технічних (інженерних) задач зводиться до розв'язування крайових (початково-крайових) задач математичної фізики для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Отримати їх розв'язки в явному вигляді вдається лише у найпростіших випадках, які, як правило, не становлять уже наукового інтересу. Великого поширення зараз набули різного роду наближені методи, які відзначаються значною універсальністю і ефективністю. Але, не зважаючи на величезний арсенал сучасних числових методів, їх універсальність і значний прогрес у розвитку комп'ютерної техніки, що суттєво розширює можливості цих методів, у деяких випадках, зокрема, для різницевих крайових задач, що відповідають еліптичним диференціальним рівнянням, розв'язування систем алгебраїчних рівнянь не зводиться до безпосереднього стійкого покрокового рахунку [82], що призводить до великих обчислювальних похибок. Числово-аналітичний метод сумарних зображень дозволяє уникати цих недоліків.

Основи методу числового розв'язування крайових задач математичної фізики для лінійних диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків – методу сумарних зображень – були викладені у монографії Г.М. Положого “Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента” (1962 р.).

У роботах І.І. Ляшка цей метод поширено на необмежені області, а у роботах А.А. Глуценка – на розв'язування просторових задач і задач з вільними межами. Далі Г.М. Положий [127–129] і його послідовники І.І. Ляшко [108–111], А.А. Глуценко [62, 63], І.М. Великоіваненко, Б.Н. Бублик, І.М. Ляшенко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробагатько, П.І. Чаленко, О.Ю. Грищенко [65, 66, 111], А.П. Кузьменко та інші розвивали метод сумарних зображень стосовно задач

теорії фільтрації, теорії пружності, теорії пластин і оболонок, теорії потенціалу тощо. При цьому велика увага приділялася проблемі власних значень і власних функцій крайових задач, теорії спеціальних функцій дискретного аргументу.

Метод сумарних зображень (рос. суммарных представлений) є дискретним аналогом методу інтегральних представлень (що є узагальненою назвою класичних методів теорії потенціалу, інтегральних рівнянь, функції Гріна, інтегральних перетворень і розділення змінних) при застосуванні його до розв'язання крайових задач математичної фізики в їх дискретній постановці. При цьому розв'язки задач отримуються у замкнутому вигляді і подаються як деякі формули (формули сумарних зображень). В залежності від крайових умов вони або явні, або містять невелику кількість невідомих параметрів, що визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод дозволяє робити вибірковий рахунок, а це є дуже важливим з огляду на те, що для більшості технічних задач достатньо знати розв'язок лише в тих вузлах (ділянках) області, які визначають основні характеристики моделі.

При розв'язуванні задач методом сумарних зображень більшість невідомих, які входять в різницеву задачу, у безпосередньому рахунку участі не беруть, що призводить до зменшення обсягу обчислювальної роботи, а, отже, і дає можливість уникнути накопичування обчислювальних похибок [108].

Аналітична форма розв'язку дозволяє не тільки знаходити його числові значення, але і виконувати деякі якісні дослідження без, власне, розрахунків. Методом сумарних зображень можна розв'язувати задачі (зокрема, теорії фільтрації, теорії пружності, теорії пластин і оболонок тощо) за дуже великої і навіть необмеженої кількості вузлів сітки для одно- та багатозв'язних плоских і просторових областей. Що правда, якщо для канонічних областей (прямокутників, смуг і напівсмуг, кругових областей) і їх об'єднань та просторових аналогів формули сумарних зображень були обґрунтовані розробниками методу, то створення нових формул сумарних зображень для модельних задач неоднорідних середовищ у криволінійних складної

конфігурації областях є досить важким завданням, що пов'язано, в першу чергу, із проблемою власних значень і власних функцій відповідних крайових задач.

Метод сумарних зображень є дуже зручним для комп'ютерної реалізації, а тому, напевне, і отримав зараз своє “друге дихання”, що пов'язано із стрімким збільшенням ресурсів (швидкодії, обсягу пам'яті) сучасних комп'ютерів. Окрім цього, метод має потенціал до розпаралелювання обчислень, чим не могли сповна скористатися його розробники і що є дуже актуальним зараз з огляду на сучасний розвиток комп'ютерних (зокрема, мережевих) технологій.

Розглянемо загальний вигляд формул сумарних зображень, що є розв'язками скінченно-різницевих крайових задач для рівняння Гельмгольца $\Delta u - cu = f$, де Δ – оператор Лапласа, $c = \text{const} \geq 0$. Така крайова задача для прямокутника, смуги чи напівсмуги апроксимується наступною різницевою задачею. У сітковій області $G_\gamma = \left\{ (x_i, y_k) \left| \begin{array}{l} x_i = x_0 + ih, i = m_1, m_1 + 1, \dots, m_2, m_1 < m_2, \\ y_k = y_0 + kh, k = 0, 1, 2, \dots, n+1, \quad \gamma = h/h_1 \end{array} \right. \right\}$ (m_1 і m_2 – можуть мати як скінченні, так і нескінченні значення) знайти розв'язок задачі:

$$\begin{aligned} L_\gamma u - cu &= f, \\ R_1 u|_{y=y_0} &= \alpha^{(1)}(x_i), \quad R_2 u|_{y=y_{n+1}} = \alpha^{(2)}(x_i), \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2 - 1}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де R_1, R_2 – оператори крайових умов для горизонтальних границь області G_γ ,

L_γ – різницевий оператор Лапласа на п'ятиточковому шаблоні:

$$\begin{aligned} L_\gamma u(x_i, y_k) &= \frac{1}{h^2} \left[u(x_{i-1}, y_k) - 2(1 + \gamma^2)u(x_i, y_k) + u(x_{i+1}, y_k) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 u(x_i, y_{k-1}) + \gamma^2 u(x_i, y_{k+1}) \right]. \end{aligned}$$

З використанням позначень $\vec{u}(x_i) = \{u_k(x_i)\}_{k=1}^n$, $u_k(x_i) = u(x_i, y_k)$, $\vec{f}(x_i) = \{f_k(x_i)\}_{k=1}^n$, $f_k(x_i) = f(x_i, y_k)$, $\vec{\omega}(x_i) = \{\alpha^{(1)}(x_i), 0, \dots, 0, \alpha^{(2)}(x_i)\}$, $\vec{H}(x_i) = h^2 \vec{f}(x_i) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_i)$, формула сумарних зображень, що є розв'язком задачі (1.4) у сітковому прямокутнику G_γ , записується у вигляді [108]:

$$\vec{u}(x_i) = P \left\{ \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - \sum_{g=m_1+1}^{m_2-1} \frac{\nu^{|i-g|}}{\mu - \nu} P \vec{H}(x_g) \right\}, \quad i = \overline{m_1, m_2}, \quad (1.5)$$

де $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$, $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$ – n -вимірні вектори сталих, що визначаються із крайових умов на вертикальних ділянках границі області або із умов на нескінченності у випадку смуги чи напівсмуг (зокрема, для отримання обмеженого на нескінченності розв'язку у правій напівсмузі слід покласти у формулі (1.5) $\vec{A} = 0$, у лівій напівсмузі – $\vec{B} = 0$, у смузі – $\vec{A} = 0$, $\vec{B} = 0$); $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$, $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n$ – діагональні матриці порядку n , елементи яких визначаються за формулами $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$,

$\eta_k = 1 + \frac{h^2 c}{2} + \gamma^2 (1 - \cos \theta_k)$, а θ_k ($0 \leq \theta_k < \pi$) в залежності від типу операторів

R_1, R_2 є коренями рівнянь $\sin(n+1)\theta = 0$ (тобто, $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$) для крайових умов I-

го роду $R_1 u = u_0(x_i)$, $R_2 u = u_{n+1}(x_i)$ і коренями рівнянь $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin n\theta} = \text{tg}\beta^{(1)}$ для

крайових умов $R_1 u = h_1^{-1}(u_0(x_i) - \text{tg}\beta^{(1)}u_1(x_i))$, $R_2 u = u_{n+1}(x_i)$, рівнянь $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin n\theta} = \text{tg}\beta^{(2)}$ для $R_1 u = u_0(x_i)$, $R_2 u = h_1^{-1}(u_{n+1}(x_i) - \text{tg}\beta^{(2)}u_n(x_i))$, рівнянь

$\sin(n+1)\theta - \sin n\theta(\text{tg}\beta^{(1)} + \text{tg}\beta^{(2)}) + \sin(n-1)\theta \cdot \text{tg}\beta^{(1)} \cdot \text{tg}\beta^{(2)} = 0$ для умов II-го роду $R_1 u = h_1^{-1}(u_0(x_i) - \text{tg}\beta^{(1)}u_1(x_i))$, $R_2 u = h_1^{-1}(u_{n+1}(x_i) - \text{tg}\beta^{(2)}u_n(x_i))$;

$P = [a_{i,k}]_1^n$ – матриця P -трансформацій – квадратна матриця порядку n , що є фундаментальною для деякої матриці простої структури [127], тобто її елементами є ортонормовані власні функції самоспряжених операторів різницевих крайових задач, які у випадку крайових умов I-го роду матимуть

вигляд: $a_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ik\pi}{n+1}$, $i, k = \overline{1, n}$, у випадках змішаних крайових умов:

$a_{i,k} = \left(\sum_{i=1}^n \sin^2 i\theta_k \right)^{-1/2} \sin i\theta_k$ чи $a_{i,k} = \left(\sum_{i=1}^n \sin^2 (n+1-i)\theta_k \right)^{-1/2} \sin(n+1-i)\theta_k$ та

крайових умов II-го роду: $a_{i,k} = C_k (\cos\beta^{(1)} \sin i\theta_k - \sin\beta^{(1)} \sin(i-1)\theta_k)$, $i, k = \overline{1, n}$, (

$C_k = \left(\sum_{i=1}^n (\cos\beta^{(1)} \sin i\theta_k - \sin\beta^{(1)} \sin(i-1)\theta_k)^2 \right)^{-1/2}$).

1.3.2 Задача стаціонарної фільтрації у шаруватому горизонтальному великої протяжності нафтовому пласті. Методи сумарних зображень і декомпозиції області за Шварцом

Пропонується методика розв'язання крайової задачі для еліптичного рівняння із розривними (кусково-сталими) коефіцієнтами у нескінченній смузі, в основі якої поєднання ідеї альтернуючого методу Шварца [52, 116, 172, 189] з ефектом методу сумарних зображень.

Ряд фізичних процесів, зокрема, і стаціонарна фільтрація у водонафтогазових пористих пластах, моделюються крайовими задачами для рівняння:

$$\mathbf{L}u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_f(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_f(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = f(x, y), \quad (1.6)$$

де $\kappa_f(x, y) \geq \kappa_0 > 0$, $f(x, y)$ визначені в деякій області G . При цьому, якщо коефіцієнт фільтрації $\kappa_f(x, y)$ різко змінюється в G , то ефективність відомих наближених методів розв'язування таких задач суттєво знижується, що викликано, в основному, зростанням числа обумовленості матриць, які супроводжують числовий розв'язок рівняння (1.6). Окрім цього, ефективність більшості таких підходів залежить від розмірів області, де визначається розв'язок, а застосування їх для необмежених областей взагалі є неможливим.

Розглянемо задачу: у смузі $G = \{(x, y) | -\infty < x < \infty, b_* \leq y \leq b^*\}$, що моделює горизонтальний нафтоносний пласт великої протяжності (довжина нафтонасиченої області покладу значно перевищує ширину та є мало просторово викривленою) із свердловинами – точковими джерелами чи стоками, знайти функцію розподілу тиску $p = p(x, y)$, якщо на границі $y = b_*$ задано розподіл тиску $p_*(x)$, а границя $y = b^*$ – є малопроникною з потужністю $f^*(x)$ (чи непроникною, тоді – $f^*(x) = 0$). Окрім цього, пласт є шарувато-неоднорідним і його можна умовно розділити на три прошарки, в межах яких проникність середовища вважається сталою. Описана задача має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}p = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \\ p(x, b_*) = p_*(x), \quad \frac{\partial p(x, b^*)}{\partial y} = f^*(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ \kappa_f(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{\mu_n}, \quad \kappa(x, y) = \begin{cases} \kappa_1, & b_* \leq y \leq b_1, \\ \kappa_2, & b_1 < y \leq b_2, \\ \kappa_3, & b_2 < y \leq b^*, \end{cases} \\ [p]_{y=b_1, b_2} = \left[\kappa_f \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=b_1, b_2} = 0, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

де $\kappa(x, y)$ – проникність середовища,

μ_n – динамічна в'язкість нафти,

$f(x, y)$ – функція джерел і стоків, що моделює роботу експлуатаційних і нагнітальних свердловин,

$[\cdot]_{y=b_l}$ – стрибок функції на лінії розриву параметра.

Для знаходження розв'язку задачі (1.7) побудуємо рівномірну прямокутну

$$\text{сітку} \quad \varpi_h = \left\{ (x_i, y_k) \left| \begin{array}{l} x_i = x_0 + ih, \quad y_k = y_0 + kh_1, \quad i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x_0 = 0, \quad y_0 = a, \quad y_{q_1} = b_1, \quad y_{q_2} = b_2, \quad y_{q+1} = b \end{array} \right. \right\} \quad i$$

використовуючи інтегро-інтерполяційний метод [135], поставимо у відповідність (1.7) різницеву задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.5\kappa_1 M_\gamma p_0(x_i) + \gamma^2 \kappa_1 p_1(x_i) = h^2 \tilde{f}_0(x_i), \\ \kappa_1 M_\gamma p_k(x_i) + \gamma^2 \kappa_1 (p_{k-1}(x_i) + p_{k+1}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{1, q_1 - 1}, \\ 0.5(\kappa_1 + \kappa_2) M_\gamma p_{q_1}(x_i) + \gamma^2 (\kappa_1 p_{q_1-1}(x_i) + \kappa_2 p_{q_1+1}(x_i)) = h^2 \tilde{f}_{q_1}(x_i), \\ \kappa_2 M_\gamma p_k(x_i) + \gamma^2 \kappa_2 (p_{k-1}(x_i) + p_{k+1}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{q_1 + 1, q_2 - 1}, \\ 0.5(\kappa_2 + \kappa_3) M_\gamma p_{q_2}(x_i) + \gamma^2 (\kappa_2 p_{q_2-1}(x_i) + \kappa_3 p_{q_2+1}(x_i)) = h^2 \tilde{f}_{q_2}(x_i), \\ \kappa_3 M_\gamma p_k(x_i) + \gamma^2 \kappa_3 (p_{k-1}(x_i) + p_{k+1}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{q_2 + 1, q - 1}, \\ \kappa_3 \tilde{L}_h p_q(x_i) + \gamma^2 \kappa_3 p_{q-1}(x_i) = h^2 \tilde{f}_q(x_i), \\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

де $p_k(x_i) = p(x_i, y_k)$, $\gamma = h/h_1$, $M_\gamma p_k(x_i) = p_k(x_{i+1}) - 2(1 + \gamma^2)p_k(x_i) + p_k(x_{i-1})$,
 $f_k(x_i) = f(x_i, y_k)$, $\tilde{f}_0(x_i) = 0.5f_0(x_i) - \kappa_1 \gamma h f^*(x_i)$, $\tilde{f}_q(x_i) = f_q(x_i) - \kappa_3 h_1^{-2} p_*(x_i)$.

Для розв'язування таких нескінченновимірних систем можливим є застосування методу сумарних зображень [108]. Проте, у випадку двох і більше ліній розриву $\kappa(x, y)$ реалізація відповідних формул P -трансформацій спряжена

із складною і трудомісткою процедурою обчислення власних значень і власних векторів матриць [111], чого дозволяє уникнути запропонована методика розв'язування задачі (1.8) на базі декомпозиції області за методом Шварца.

Визначимо дві сіткові смуги $G_1^h = \{(x_i, y_k) \in \omega_h : 0 \leq k \leq q_2, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $G_2^h = \{(x_i, y_k) \in \omega_h : q_1 \leq k \leq q_1 + 1, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ та відповідно в них дві послідовності сіткових функцій $\{V_k^{(\xi)}(x_i)\}_{\xi=0}^{\infty}$ та $\{W_k^{(\xi)}(x_i)\}_{\xi=0}^{\infty}$ за допомогою таких систем різницевих рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.5\kappa_1 M_\gamma V_0^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_1 V_1^{(\xi)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_0(x_i), \\ \kappa_1 M_\gamma V_k^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_1 (V_{k-1}^{(\xi)}(x_i) + V_{k+1}^{(\xi)}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{1, q_1 - 1}, \\ 0.5(\kappa_1 + \kappa_2) M_\gamma V_{q_1}^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 (\kappa_1 V_{q_1-1}^{(\xi)}(x_i) + \kappa_2 V_{q_1+1}^{(\xi)}(x_i)) = h^2 f_{q_1}(x_i), \\ \kappa_2 M_\gamma V_k^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_2 (V_{k-1}^{(\xi)}(x_i) + V_{k+1}^{(\xi)}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{q_1 + 1, q_2 - 1}, \\ \kappa_2 M_\gamma V_{q_2-1}^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_2 V_{q_2-2}^{(\xi)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_{q_2-1}^{(\xi)}(x_i), \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_2 M_\gamma W_{q_1+1}^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_2 W_{q_1+2}^{(\xi)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_{q_1+1}^{(\xi-1)}(x_i), \\ \kappa_2 M_\gamma W_k^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_2 (W_{k-1}^{(\xi)}(x_i) + W_{k+1}^{(\xi)}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{q_1 + 2, q_2 - 1}, \\ 0.5(\kappa_2 + \kappa_3) M_\gamma W_{q_2+1}^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 (\kappa_2 W_{q_2-1}^{(\xi)}(x_i) + \kappa_3 W_{q_2+1}^{(\xi)}(x_i)) = h^2 f_{q_2}(x_i), \\ \kappa_3 M_\gamma W_k^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_3 (W_{k-1}^{(\xi)}(x_i) + W_{k+1}^{(\xi)}(x_i)) = h^2 f_k(x_i), \quad k = \overline{q_2 + 1, q - 1}, \\ \kappa_3 \tilde{L}_h W_q^{(\xi)}(x_i) + \gamma^2 \kappa_3 W_{q-1}^{(\xi)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_q(x_i), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

де $\tilde{f}_{q_1+1}^{(\xi-1)}(x_i) = f_{q_1+1}(x_i) - \kappa_2 h_1^{-2} V_{q_1}^{(\xi-1)}(x_i)$,

$\tilde{f}_{q_2-1}^{(\xi-1)}(x_i) = f_{q_2-1}(x_i) - \kappa_2 h_1^{-2} W_{q_2}^{(\xi)}(x_i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Відповідні формули сумарних зображень розв'язків задач (1.9)–(1.10) мають вигляд:

$$\vec{V}^{(\xi)}(x_i) = -P_1 h^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} A^{(1)}(i, j) P_1^T \vec{F}_1^{(\xi)}(x_j), \quad (1.11)$$

$$\vec{W}^{(\xi)}(x_i) = -P_2 h^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} A^{(2)}(i, j) P_2^T \vec{F}_2^{(\xi)}(x_j), \quad (1.12)$$

де $\vec{V}^{(\xi)}(x_i) = \{V_k^{(\xi)}(x_i)\}_{k=1}^{q_2-1}$, $\vec{W}^{(\xi)}(x_i) = \{W_k^{(\xi)}(x_i)\}_{k=q_1+1}^q$;

елементи матриць $P_1 = [a_{l,k}^{(1)}]_{l,k=1}^{q_2-1}$ і $P_2 = [a_{l,k}^{(2)}]_{l,k=1}^{q-q_1}$ знаходяться із співвідношень:

$$a_{l,k}^{(1)} = C_k^{(1)} \begin{cases} \cos l \theta_k^{(1)}, & l = 0, 1, 2, \dots, q_1, \\ \alpha_k^{(1)} \sin(q_2 - l) \theta_k^{(1)}, & l = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots, q_2 - 1, \end{cases}$$

$$a_{l,k}^{(2)} = C_k^{(2)} \begin{cases} \sin l \theta_k^{(2)}, & l = 1, 2, \dots, q_2 - q_1, \\ \alpha_k^{(2)} \sin(q - q_1 - l + 1) \theta_k^{(2)}, & l = q_2 - q_1 + 1, \dots, q - q_1, \end{cases}$$

$\theta_k^{(1)}$, $\theta_k^{(2)}$ – корені наступних рівнянь на проміжку $(0, \pi)$ відповідно:

$$\sin q_2 \theta + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \sin(q_2 - 2q_1) \theta = 0,$$

$$\sin(q - q_1 + 1) \theta + \frac{\kappa_2 - \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3} \sin(q - 2q_2 + q_1 + 1) \theta = 0,$$

$$\alpha_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{\sin q_1 \theta_k^{(1)}}{\sin(q_2 - q_1) \theta_k^{(1)}}, & \text{якщо } \sin(q_2 - q_1) \theta_k^{(1)} \neq 0, \\ -\frac{\kappa_1 \cos q_1 \theta_k^{(1)}}{\kappa_2 \cos(q_2 - q_1) \theta_k^{(1)}}, & \text{якщо } \sin(q_2 - q_1) \theta_k^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \begin{cases} \frac{\sin(q_2 - q_1) \theta_k^{(2)}}{\sin(q - q_2 + 1) \theta_k^{(2)}}, & \text{якщо } \sin(q - q_2 + 1) \theta_k^{(2)} \neq 0, \\ -\frac{\kappa_2 \cos(q_2 - q_1) \theta_k^{(2)}}{\kappa_3 \cos(q - q_2 + 1) \theta_k^{(2)}}, & \text{якщо } \sin(q - q_2 + 1) \theta_k^{(2)} = 0, \end{cases}$$

$$C_k^{(1)} = \left[\frac{\kappa_1}{2} \left(q_1 - \frac{\cos(q_1 - 1) \theta_k^{(1)} \sin q_1 \theta_k^{(1)}}{\sin \theta_k^{(1)}} \right) + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \sin^2 q_1 \theta_k^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_2}{2} \alpha_k^{(1)2} \left(q_2 - q_1 - \frac{\cos(q_2 - q_1 - 1) \theta_k^{(1)} \sin(q_2 - q_1) \theta_k^{(1)}}{\sin \theta_k^{(1)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$C_k^{(2)} = \left[\frac{\kappa_2}{2} \left(q_2 - q_1 - \frac{\cos(q_2 - q_1 - 1)\theta_k^{(2)} \sin(q_2 - q_1)\theta_k^{(2)}}{\sin\theta_k^{(2)}} \right) + \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{2} \sin^2(q_2 - q_1)\theta_k^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_3}{2} \alpha_k^{(2)2} \left(q - q_2 + 1 - \frac{\cos(q - q_2)\theta_k^{(2)} \sin(q - q_2 + 1)\theta_k^{(2)}}{\sin\theta_k^{(2)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}};$$

елементи діагональних матриць $A^{(1)}(i, j)$, $A^{(2)}(i, j)$:

$$\text{diag } A^{(1)}(i, j) = \{A_0^{(1)}(i, j), A_1^{(1)}(i, j), \dots, A_{q_2-1}^{(1)}(i, j)\},$$

$$\text{diag } A^{(2)}(i, j) = \{A_1^{(2)}(i, j), A_2^{(2)}(i, j), \dots, A_{q-q_1}^{(2)}(i, j)\}$$

визначаються із співвідношень $A_k^{(l)}(i, j) = \frac{\nu_{l,k}^{|i-j|}}{\mu_{l,k} - \nu_{l,k}}$,

$$\mu_{l,k} = \nu_{l,k}^{-1} = \eta_{l,k} + \sqrt{\eta_{l,k}^2 - 1}, \quad \eta_{l,k} = 1 + \gamma^2(1 - \cos\theta_k^{(l)}), \quad l = 1, 2;$$

вектори

$$\vec{F}_1^{(\xi)}(x_i) = \{\tilde{f}_0(x_i), f_1(x_i), \dots, f_{q_2-2}(x_i), \tilde{f}_{q_2-1}^{(\xi)}(x_i)\},$$

$$\vec{F}_2^{(\xi)}(x_i) = \{\tilde{f}_{q_1+1}^{(\xi)}(x_i), f_{q_1+2}(x_i), \dots, f_{q-1}(x_i), \tilde{f}_q(x_i)\};$$

P_1^T, P_2^T – матриці, транспоновані до P_1 і P_2 відповідно.

Тепер, задавши довільним чином $V_{q_1}^{(0)}(x_i)$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) і застосовуючи формули (1.11), (1.12), отримаємо послідовно:

$$\vec{W}^{(1)}(x_i), \vec{V}^{(1)}(x_i), \vec{W}^{(2)}(x_i), \vec{V}^{(2)}(x_i), \vec{W}^{(3)}(x_i), \dots$$

Відповідно до [57], для цих сіткових функцій справедливі оцінки:

$$\|V^{(\xi)} - p\|_1 \leq \delta^\xi \|V^{(0)} - p\|_1, \quad \|W^{(\xi)} - p\|_2 \leq \delta^{\xi-1} \|V^{(0)} - p\|_2,$$

де $\delta = \frac{b^* - b_2}{b^* - b_1 - b_*} < 1$, $\|z\|_l = \max_{(x_i, y_k) \in G_l^h} |z_k(x_i)|$, $l = 1, 2$.

Таким чином, отримані послідовності сіткових функцій $\{V_k^{(\xi)}(x_i)\}_{\xi=0}^\infty$, $\{W_k^{(\xi)}(x_i)\}_{\xi=0}^\infty$, які визначаються за формулами (1.11), (1.12), збіжні до розв'язку $p_k(x_i)$ задачі (1.8), що апроксимує розв'язок $p(x, y)$ вихідної задачі (1.7) з порядком $O(\hbar^2)$ на ϖ_h , де $\hbar = \max(h, h_1)$ [108]. Система (1.9)–(1.10) та ітераційний процес (1.11)–(1.12) є числовим аналогом класичного методу Шварца [82].

1.3.3. Просторова задача нестационарної фільтрації у пористому пласті. Поєднання методу прямих і методу сумарних зображень

Розглянемо елемент нафтоносного пласта $G = \{(x, y, z), a_* \leq x \leq b_*, a^* \leq y \leq b^*, a_*^* \leq z \leq b_*^*\}$, що містить свердловини – точкові джерела чи стоки, з відомим розподілом тиску у пласті у початковий момент часу і відповідними розподілами тиску на границях області. Тоді задача знаходження розподілу тиску $p = p(x, y, z, t)$ зводиться до розв'язування в області G на часовому проміжку $0 \leq t \leq T$ початково-крайової задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t} = \mathcal{L}p(x, y, z, t) + f(x, y, z, t), \quad (x, y, z, t) \in G \times (0, T), \\ p(x, y, z, 0) = p_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G, \\ p|_{x=a_*} = p_1(y, z, t), \quad p|_{x=b_*} = p_2(y, z, t), \quad y \in [a^*, b^*], \quad z \in [a_*^*, b_*^*], \quad t \in [0, T], \\ p|_{y=a^*} = p_3(x, z, t), \quad p|_{y=b^*} = p_4(x, z, t), \quad x \in [a_*, b_*], \quad z \in [a_*^*, b_*^*], \quad t \in [0, T], \\ p|_{z=a_*^*} = p_5(x, y, t), \quad p|_{z=b_*^*} = p_6(x, y, t), \quad x \in [a_*, b_*], \quad y \in [a^*, b^*], \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$\text{де } \mathcal{L}p \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

$\beta = \sigma_n \beta_n + \beta_c$ – коефіцієнт пружності (β_n, β_c – пружність нафти і середовища відповідно, σ_n – пористість пласта).

Для випадку, коли коефіцієнт фільтрації $\kappa_f = \kappa / \mu_n = 1$, а коефіцієнт пружності $\beta = const$, пропонується методика розв'язання задачі (1.13), що використовує метод прямих [135] та формули сумарних зображень (1.5) і дозволяє значною мірою уникати проблем, пов'язаних, зокрема, з нестійкістю відповідних різницевих схем і накопиченням обчислювальних похибок, має потенціал розпаралелювання обчислювального процесу.

На кожному часовому шарі $t_i = i\tau$ ($\tau = \frac{T}{n}$, $i = \overline{1, n}$) похідну $\frac{\partial p}{\partial t}$ в (1.13) замінимо різницеvim відношенням $\frac{p(x, y, z, t_i) - p(x, y, z, t_{i-1})}{\tau}$ і отримаємо n проєкцій вихідної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\beta} \Delta v(x, y, z, t_i) - v(x, y, z, t_i) = \tilde{f}(x, y, z, t_i), \quad (x, y, z) \in G, \\ v(a_*, y, z, t_i) = p_1(y, z, t_i), v(b_*, y, z, t_i) = p_2(y, z, t_i), y \in [a^*, b^*], z \in [a_*, b_*], \\ v(x, a^*, z, t_i) = p_3(x, z, t_i), v(x, b^*, z, t_i) = p_4(x, z, t_i), x \in [a_*, b_*], z \in [a^*, b^*], \\ v(x, y, a_*, t_i) = p_5(x, y, t_i), v(x, y, b_*, t_i) = p_6(x, y, t_i), x \in [a_*, b_*], y \in [a^*, b^*], \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$\text{де } \tilde{f}(x, y, z, t_i) = \begin{cases} -\tau\beta f(x, y, z, t_1) - p_0(x, y, z), & i = \overline{1}, \\ -\tau\beta f(x, y, z, t_i) - v(x, y, z, t_{i-1}), & i = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Розв'язки задач (1.14) знайдемо методом сумарних зображень [62]. Для цього побудуємо рівномірну прямокутну сітку і замінимо область G на часових шарах $t = t_i$, $i = \overline{1, n}$ сітковими паралелепіпедами

$$G^* = \left\{ (x_l, y_k, z_j) \mid x_l = lh, l = \overline{0, m+1}, y_k = kh_1, k = \overline{0, q+1}, z_j = jh_2, j = \overline{0, b+1} \right\}$$

а крайові задачі (1.14) різницевиими задачами:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma\delta} v(x_l, y_k, z_j, t_i) - cv(x_l, y_k, z_j, t_i) &= c\tilde{f}(x_l, y_k, z_j, t_i), l = \overline{1, m}, k = \overline{1, q}, j = \overline{1, b}, \\ v(0, y_k, z_j, t_i) &= p_1(y_k, z_j, t_i), v(1, y_k, z_j, t_i) = p_2(y_k, z_j, t_i), k = \overline{1, q}, j = \overline{1, b}, \\ v(x_l, 0, z_j, t_i) &= p_3(x_l, z_j, t_i), v(x_l, 1, z_j, t_i) = p_4(x_l, z_j, t_i), l = \overline{1, m}, j = \overline{1, b}, \\ v(x_l, y_k, 0, t_i) &= p_5(x_l, y_k, t_i), v(x_l, y_k, 1, t_i) = p_6(x_l, y_k, t_i), l = \overline{1, m}, k = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

де $i = \overline{1, n}$, $\mathcal{L}_{\gamma\delta} v$ – різницевий тривимірний оператор Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma\delta} v(x_l, y_k, z_j, t_i) &= h^{-2} \left\{ v(x_{l-1}, y_k, z_j, t_i) - 2(1 + \gamma^2 + \delta^2)v(x_l, y_k, z_j, t_i) + \right. \\ &v(x_{l+1}, y_k, z_j, t_i) + \gamma^2 [v(x_l, y_{k-1}, z_j, t_i) + v(x_l, y_{k+1}, z_j, t_i)] + \\ &\left. \delta^2 [v(x_l, y_k, z_{j-1}, t_i) + v(x_l, y_k, z_{j+1}, t_i)] \right\}, \quad \gamma = h/h_1, \quad \delta = h/h_2, \quad c = \beta/\tau. \end{aligned}$$

Різницеві задачі (1.15) апроксимують вихідну задачу (1.14) з другим порядком точності по h, h_1, h_2 і першим порядком по τ .

$$\text{Позначимо: } V^{(i)}(x_l) = \left[v_{k,j}^{(i)}(x_l) \right]_{k,j=1}^{q,b}, \quad v_{k,j}^{(i)}(x_l) = v(x_l, y_k, z_j, t_i).$$

Відповідно до методу сумарних зображень [62] розв'язки задач (1.15) матимуть вигляд (для скорочення запису далі верхній індекс i не зазначено):

$$V(x_l) = P \left[\tilde{A}(x_l) + \tilde{B}(x_l) + \Omega(x_l) \right] P', \quad l = \overline{0, m+1}, \quad (1.16)$$

$$\text{де } P = [a_{k,j}]_1^q = \sqrt{\frac{2}{q+1}} \left[\sin k \frac{j\pi}{q+1} \right]_{k,j=1}^q, \quad P' = [a'_{k,j}]_1^b = \sqrt{\frac{2}{b+1}} \left[\sin k \frac{j\pi}{b+1} \right]_{k,j=1}^b,$$

$$\tilde{A}(x_l) = [\mu_{k,j}^l A_{k,j}]_{k,j=1}^{q,b}, \quad \tilde{B}(x_l) = [\mu_{k,j}^l B_{k,j}]_{k,j=1}^{q,b}, \quad \Omega(x_l) = \left[\sum_{p=1}^{l-1} \frac{\mu_{k,j}^{l-p} - \nu_{k,j}^{l-p}}{\mu_{k,j} - \nu_{k,j}} H'_{k,j}(x_l) \right]_{k,j=1}^{q,b},$$

$$\Omega(x_0) = \Omega(x_1) = 0, \quad \mu_{k,j} = \nu_{k,j}^{-1} = \eta_{k,j} + \sqrt{\eta_{k,j}^2 - 1}, \quad \eta_{k,j} = 1 + \frac{h^2 c}{2} + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{q+1} \right) +$$

$$+ \delta^2 \left(1 - \cos \frac{j\pi}{b+1} \right), \quad \tilde{H}'_k(x_l) = \{H'_{k,1}(x_l), H'_{k,2}(x_l), \dots, H'_{k,b}(x_l)\} = P \tilde{H}_k(x_l), \quad \tilde{H}_k(x_l) =$$

$$= h^2 \tilde{r}'_k(x_l) - \gamma^2 \tilde{w}'_k(x_l) - \delta^2 \tilde{g}'_k(x_l), \quad \tilde{r}'_k(x_l) = P \tilde{r}'_j(x_l), \quad \tilde{w}'_k(x_l) = P \tilde{w}'_j(x_l), \quad \tilde{g}'_k(x_l) =$$

$$= \{\tilde{v}_{k,0}(x_l), 0, \dots, 0, \tilde{v}_{k,b+1}(x_l)\} \quad (\tilde{v}_k(x_l) = P \tilde{v}'_j(x_l)), \quad k = \overline{1, q}, \quad \tilde{v}'_j(x_l) = \{v_{1,j}(x_l), \dots,$$

$$v_{q,j}(x_l)\}, \quad \tilde{r}'_j(x_l) = \{\tilde{f}_{1,j}(x_l), \dots, \tilde{f}_{q,j}(x_l)\}, \quad \tilde{w}'_j(x_l) = \{v_{0,j}(x_l), 0, \dots, 0, v_{q+1,j}(x_l)\}, \quad j = \overline{1, b}.$$

Матриці довільних сталих $A = [A_{k,j}]_{k,j=1}^{q,b}$, $B = [B_{k,j}]_{k,j=1}^{q,b}$ визначаються із крайових умов на горизонтальних гранях паралелепіпеда G .

Зазначимо, що у випадках, коли підосва або кривля пласта – непроникні, то на гранях $z = a_*$, $z = b_*$ замість крайових умов першого роду будуть задаватися умови $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, а відповідні матриці P -трансформацій у формулах

сумарних зображень (1.16) матимуть вигляд:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2q+1}} \left[\sin(q+1-k) \frac{(2j-1)\pi}{2q+1} \right]_{k,j=1}^q \quad (\text{у випадку непроникної підосви}),$$

$$P = \frac{2}{\sqrt{2q+1}} \left[\sin k \frac{(2j-1)\pi}{2q+1} \right]_{k,j=1}^q \quad (\text{у випадку непроникної кривлі пласта}).$$

Оцінимо трудомісткість обчислень за цією методикою у плоскому випадку, поклавши для спрощення $q=m=1/h$. Для розрахунків за формулами сумарних зображень на кожному часовому шарі t_i ($i = \overline{1, n}$) необхідно розв'язати СЛАР (для знаходження q -вимірних векторів \vec{A} і \vec{B}), тобто систему порядку $2q$,

а також обчислити за явними формулами (1.16) m q -вимірних векторів \vec{V} . Враховуючи, що μ і η – діагональні матриці, розв'язування СЛАР для знаходження \vec{A} і \vec{B} рівнозначне обчисленню добутку матриці на вектор. Таким чином, на кожному часовому шарі необхідно виконати $\approx q^2$ операцій. Для порівняння, використання неявної схеми з таким самим п'ятиточковим шаблоном потребуватиме розв'язування СЛАР з п'ятидіагональною матрицею, знаходження розв'язків якої методом Гауса потребуватиме q^6 операцій. Щоправда, існують інші неявні різницьві методи, які мають обсяг обчислень $\approx q^2$, наприклад, метод змінних напрямків [91].

Розроблену методику застосування методів сумарних зображень у поєднанні зі способами декомпозиції задачі викладено у роботах [57, 60, 61, 89–100].

1.5. Висновки до першого розділу

1. На основі проведеного аналізу проблем математичного моделювання процесів фільтрації (витіснення) у водонафтогазових пластах і огляду існуючих моделей та методів їх розв'язання поставлено актуальні завдання дослідження – формування нових та уточнення існуючих моделей і числових методів розв'язування відповідних крайових задач за умов врахування взаємовпливу характеристик середовища та процесу і числового визначення (ідентифікації) параметрів для криволінійних багатозв'язних складної конфігурації LEF-областей.

2. Розроблено методику застосування методів сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца до розв'язання крайових задач, що описують процеси стаціонарної фільтрації у нескінченній багат шаровій смузі і нестаціонарної фільтрації в елементах просторових пористих пластів, яка дає змогу уникати розв'язування складних систем різницевих рівнянь, забезпечує зменшення обсягу розрахункової роботи, не призводить до накопичення обчислювальних похибок, є зручною для комп'ютерної реалізації та сприятлива для розпаралелювання обчислень.

Розв'язані модельні задачі мають як самостійну наукову цінність, так і є основою для подальших досліджень, а основні прийоми і методи, що застосовані тут (поєднання способів декомпозиції задачі з відповідними формулами сумарних зображень), використані у другому, третьому і четвертому розділах роботи як компоненти розроблених там методик і обчислювальних технологій на базі комплексного аналізу.

РОЗДІЛ 2

СИНТЕЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ І СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ LEF-ОБЛАСТЕЙ

У розділі на основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень розроблено методуку і обчислювальну технологію розв'язування нелінійних крайових задач – математичних моделей стаціонарного процесу руху речовини у пористих середовищах – для криволінійних одно-, дво- та багатозв'язних LEF-областей, а також для LEF-областей з вільними межами. Запропоновані алгоритми числового розв'язання відповідних задач, що реалізовані у вигляді пакетів прикладних програм для подальшого комп'ютерного моделювання, автоматично вирішують проблему вибору вузлів та побудови динамічної сітки, розрахунку поля величини швидкості, обчислення фільтраційних витрат та інших невідомих параметрів процесу.

2.1. Синтез числових методів комплексного аналізу (ЧМКА) та сумарних зображень (СЗ) при моделюванні ідеальних полів для одно- та двозв'язних криволінійних LEF-областей

В основу підходу, що розробляється, покладено ідею синтезу методів комплексного аналізу (конформних відображень) і сумарних зображень. Числово-аналітичні методи сумарних зображень, як уже зазначалося у п. 1.2, мають низку переваг: більшість невідомих, які входять у різницеву задачу, у рахунку участі не беруть, що забезпечує зменшення обсягу обчислювальної роботи, явний вигляд формул сумарних зображень дає змогу, зокрема, робити вибірккові обчислення, а також уникати накопичення обчислювальних похибок; ці методи є стійкими і добре адаптованими до комп'ютерної реалізації.

Суттєвим обмеженням методу сумарних зображень є можливість використання його лише для деяких канонічних областей та їх об'єднань. Це обмеження автором зняте при дослідженні широкого класу модельних задач в областях з криволінійними ділянками границь (ліній течії та еквіпотенціалей)

шляхом обернення конформних відображень.

У цьому параграфі розроблювана методика викладена на прикладі, коли дослідження ідеального поля зведено до конформного відображення прямокутника з невідомою висотою (повною фільтраційною витратою) на LEF-область – криволінійну чотирикутну область, обмежену лініями течії та еквіпотенціальними лініями (випадок 1) чи криволінійну кільцеподібну двозв'язну область, обмежену еквіпотенціальними лініями (випадок 2) [18, 59]. При цьому, вузли динамічної сітки розраховуються за формулами сумарних зображень (1.5).

Зауважимо, що ідеї синтезу методів конформних відображень і сумарних зображень для подібного класу задач (випадок 1) зустрічалися і в інших роботах, зокрема в [12]. Але запропонований там алгоритм містив розв'язання громіздких нелінійних систем, що створювало суттєві труднощі і ставило під сумнів його ефективність. У даній роботі відповідні проблеми вдалося подолати. Варто також зазначити, що у цій роботі формули сумарних зображень вперше застосовані як компоненти розроблених у [12, 40–46] обчислювальних процедур, внаслідок чого отримані їх суттєві вдосконалення. Принциповим є те, що при ітераційних наближеннях внутрішніх вузлів динамічної сітки у [12] використовувались лише навколишні вузли, у результаті чого, в процесі ітерацій (до певного кроку) шукані функції, хоча і ставали все “більш гармонічними”, але не комплексно-спряженими. Використання методу сумарних зображень дає можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив усіх граничних та навколишніх внутрішніх вузлів, котрі в свою чергу “підправляються” (на наступному ітераційному кроці) за допомогою так званих умов ортогональності [12], які є наслідками умов Коші-Рімана і, отже, пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Проілюструємо запропонований підхід, розглянувши модельну задачу знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) у криволінійній чотирикутній LEF-області G_z ($z = x + iy$), обмеженій еквіпотенціальними лініями $L_* = AB = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $L^* = CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ і лініями течії $L_0 = DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$, $L^0 = BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$ (рис. 2.1 а), за крайових

умов $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{L_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{L^0} = 0$, де φ_* , φ^* – сталі, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$,

n – зовнішня нормаль до відповідної кривої. Випадок двозв'язної криволінійної LEF-області G_z° , що обмежена двома екіпотенціалами – гладкими замкненими контурами – внутрішнім $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і зовнішнім $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ з умовами на них $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, зводиться до попереднього шляхом проведення умовного розрізу Γ вздовж лінії течії (яка знаходиться в процесі розв'язання задачі), що проходить через зафіксовану на контурі L_* деяку точку A , і утворення однозв'язної області $G_z = G_z^\circ \setminus \Gamma$, у якій L_0 і L^0 – відповідно верхній і нижній береги розрізу Γ (рис. 2.1 б).

Введенням функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, в [12] отримано більш загальну задачу на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну прямокутну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром (повною фільтраційною витратою) Q :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = Q, \\ Q = \int_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Задачу (2.1) (наслідуючи методологію, розроблену в [12]) замінимо на обернену до неї, оскільки, по-перше, область комплексного потенціалу G_ω є прямокутником, на відміну від геометрично складної фізичної області G_z , а по-друге, перехід до оберненого відображення автоматично вирішує проблему дискретизації задачі при застосуванні числових методів, дозволяє використати переваги методу сумарних зображень для розв'язання відповідних різницевих задач, будувати динамічну сітку руху речовини, визначити повну фільтраційну витрату Q (не розв'язуючи інтегрального рівняння) тощо.

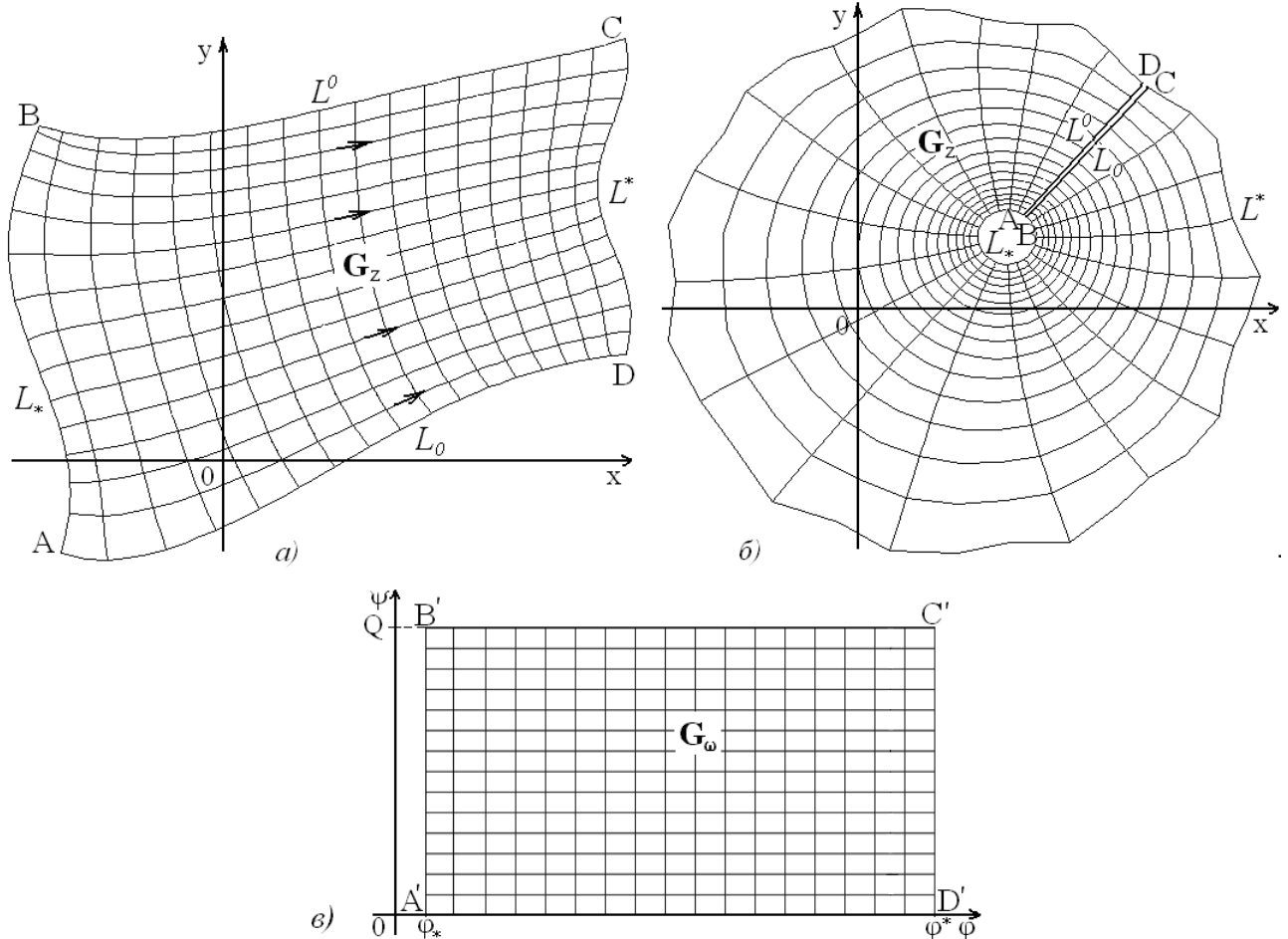


Рис. 2.1. Схема одно- (а) та двозв'язної (б) криволінійної LEF-області і відповідної їм області комплексного потенціалу (в)

Під терміном “обернення”, як і в [12], розумітимемо як перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_w до більш вигідного оберненого відображення $G_w \rightarrow G_z$ так і те, що задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_w$ ($G_w \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв’язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, крайові умови), адже при постановці крайової задачі в області G_w є невідомий параметр (повна витрата).

Використовуючи формули переходу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

(2.2)

відповідну крайову задачу на обернене конформне (квазіконформне) відображення $z = z(w) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_w на G_z при невідомому

значенні параметра $Q = \int_0^Q \frac{1}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi$, доповнену умовами

ортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області $\text{grad} \psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0$,
 $\text{grad} \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad} f_2(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0$, $\text{grad} \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot$
 $\cdot \text{grad} f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0$, $\text{grad} \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad} f_4(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0$
(випадок 1) чи $\text{grad} \psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0$,
 $\text{grad} \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot \text{grad} f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0$ (випадок 2), аналогічно до [12], зводимо до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$, $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$ за умов (у випадку 1):

$$\begin{aligned} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=0} = 0 \end{aligned}$$

(2.4)

чи умов (у випадку 2):

$$\begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0.$$

(2.6)

Різницевий аналог поставленої задачі отримаємо аналогічно [12], визначивши в G_ω ортогональну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1};$

$\psi_j = \Delta_\psi \cdot j$, $j = \overline{0, n+1}$; $\Delta_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}$, $\Delta_\psi = \frac{Q}{n+1}$, $m, n \in \mathbf{N}$, де $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$ –

конформний інваріант. При цьому, крайові умови та умови ортогональності (2.3), (2.4) в околі границі області апроксимуємо різницевиими рівняннями:

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} f'_{1x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f'_{1y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\ f'_{3x}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f'_{3y}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \\ f'_{2x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f'_{2y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \\ f'_{4x}(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f'_{4y}(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.8)$$

а умови (2.5), (2.6):

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, & y_{i,0} = y_{i,n+1}, & i = \overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} x_{i,0} = \alpha(x_{i+1,0} + x_{i-1,0}) + \beta(x_{i,1} + x_{i,n}) + 0.05(x_{i-1,1} + x_{i+1,1} + x_{i-1,n} + x_{i+1,n}), \\ y_{i,0} = \alpha(y_{i+1,0} + y_{i-1,0}) + \beta(y_{i,1} + y_{i,n}) + 0.05(y_{i-1,1} + y_{i+1,1} + y_{i-1,n} + y_{i+1,n}), \\ i = \overline{1, m}, & \alpha = \frac{0.5\Delta_\psi^2 - 0.1\Delta_\varphi^2}{\Delta_\varphi^2 + \Delta_\psi^2}, & \beta = \frac{0.5\Delta_\varphi^2 - 0.1\Delta_\psi^2}{\Delta_\varphi^2 + \Delta_\psi^2}, \\ (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, & (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + \\ + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j})(y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) = 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Формулу для наближеного знаходження конформного інваріанту γ отримаємо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників областей G_φ^γ (різницевої сітки) і G_z^γ (динамічної сітки, що утворена у фізичній області G_z шляхом перетину ліній течії і еквіпотенціалей) [12]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}, \quad (2.11)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}. \quad (2.12)$$

Невідому витрату Q у процесі ітераційних наближень знаходитимемо за формулою [12]:

$$Q = \Delta_\varphi \cdot (n+1)/\gamma. \quad (2.13)$$

Різницеві аналоги рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ у сітковій області G_φ^γ , як і у розділі 1, запишемо за різницевиими схемами з п'ятиточковим шаблоном (що мають другий порядок апроксимації, їх збіжність та стійкість повністю досліджена в [136]):

$$\mathbf{L}_\gamma x_{i,j} = 0, \quad \mathbf{L}_\gamma y_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.14)$$

розв'язки яких у процесі ітерацій знаходимо за формулами сумарних зображень (1.5), котрі тут мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right) \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right) \\ & \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$,

елементи матриці $P = [p_{j,k}]_{j,k=1}^n$ (P -трансформацій) обчислюються як

$$p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \quad (2.16)$$

елементи діагональних матриць $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$, $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n$ визначаються за формулами

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right), \quad (2.17)$$

а довільні сталі a_k, b_k, c_k, d_k знаходяться із умов на ділянках AB і CD границі:

$$\left\{ \begin{aligned} a_k + b_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{0,j} - S_k^{(0)}, \\ \mu_k^{m+1} a_k + \nu_k^{m+1} b_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{m+1,j} - S_k^{(m+1)}, \quad k = \overline{1, n}; \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_k + d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{0,j} - S_k^{*(0)}, \\ \mu_k^{m+1} c_k + \nu_k^{m+1} d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{m+1,j} - S_k^{*(m+1)}, \quad k = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

У системах рівнянь (2.18)–(2.19) (які розв'язуються явно): $p_{j,k}^*$ ($j, k = \overline{1, n}$) –

елементи матриці P^* , оберненої до P , $S_k^{(0)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^t}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1})$,

$$S_k^{(m+1)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{m+1-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}), \quad S_k^{*(0)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^t}{\mu_k - \nu_k} \times \\ \times (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}), \quad S_k^{*(m+1)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{m+1-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}), \quad k = \overline{1, n}.$$

Зауважимо, що контури L_* , L^* двозв'язної області зручно задавати параметрично: $L_* = \{x + iy : x = x_*(\tau), y = y_*(\tau), \tau_* \leq \tau \leq \tau_* + 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(\tau), y = y^*(\tau), \tau^* \leq \tau \leq \tau^* + 2\pi\}$, оскільки тоді умови відповідності граничних вузлів виконуватимуться автоматично. Тут τ_* – параметр (кут), що визначає розміщення заданої точки A (початкової точки умовного розрізу), τ^* – розраховується в процесі розв'язання задачі, як параметр, що характеризує кінцеву точку умовного розрізу (точку, що належить тій же лінії течії, що і A); на початковому етапі задання області можна покласти $\tau^* = \tau_*$.

У роботах [40–46] відмічалось, що коли відома тільки геометрія області фільтрації (контури границі та умови на них), дуже важливим є задання “якісного” початкового наближення розміщення як граничних, так і внутрішніх вузлів області, оскільки, швидкість збіжності ітераційного процесу сильно залежить від цього. І, якщо задання початкового наближення розміщення точок на контурах області не викликає труднощів, то для побудови початкового наближення координат внутрішніх вузлів пропонувалося використовувати один із алгебраїчних чи варіаційних методів побудови сіток, зокрема, метод трансфінитної інтерполяції [4]. Проте, як було зазначено, застосування цих

методів для геометрично складних областей, досить часто призводило до небажаних результатів, наприклад, у деяких місцях лінії динамічної сітки перетинали самі себе тощо і для уникнення таких ефектів потрібно було вводити корегуючі поправки на взаємне розміщення вузлів або здійснювати їх поправки вручну. Використання ж методів сумарних зображень для знаходження координат внутрішніх вузлів, що пропонується у цій роботі, дозволяє вирішити такі проблеми, оскільки, уже початкове наближення при заданих граничних значеннях розраховується за формулами сумарних зображень, які відразу “дають” хороший результат і не потребують додаткової корекції.

Алгоритм знаходження розв’язку поставленої задачі побудовано шляхом поетапної параметризації величини γ (або значення витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів динамічної сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації. А саме, задавши кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ , параметр ε , що характеризує точність наближення розв’язку відповідної різницевої задачі, бажаний рівень конформності відображення δ_* , нульове наближення невідомої величини γ (або шуканої витрати Q), початкові значення функцій x і y у граничних вузлах сіткової області G_ω^γ (початкові наближення координат граничних вузлів динамічної сітки G_z^γ) $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ з урахуванням крайових умов (2.7) (у випадку 1) чи (2.9) (у випадку 2) та обчисливши методом сумарних зображень (2.15)–(2.19) відповідні початкові значення функцій x і y у внутрішніх вузлах сіткової області G_ω^γ (початкові наближення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки G_z^γ) $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, знаходимо за формулою (2.11) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ конформного інваріанта γ і за формулою (2.13) – початкове наближення повної витрати Q . Далі, уточнюємо значення функцій x і y у граничних вузлах (координати граничних вузлів динамічної сітки) за формулами (2.7)–(2.8) чи (2.9)–(2.10) – даний граничний вузол на k -ому кроці підправляємо за умов, що фіксованими є два навколишні та відповідні приграничні [12]. Нове наближення значення функцій x і y у

внутрішніх вузлах (координат внутрішніх вузлів) $x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)}$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) знову проводимо за формулами сумарних зображень (2.15)–(2.19), які, на відміну від сіткових ітераційних методів, дозволяють відразу (за один крок без організації внутрішнього ітераційного процесу) отримати прийнятний розв'язок. Після цього, знову уточнюємо γ та Q за формулами (2.11) і (2.13).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів динамічної сітки. Визначаємо величину $S = \max_{i=0, m+1, j=0, n+1} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення вузлів на границі за проведену k -ту ітерацію; якщо вона більша за ε , то переходимо до подальшого уточнення вузлів. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь конформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій умов Коші-Рімана:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max_{i,j=1}^{m,n} |\delta_{i,j}^{(1)}|, & \delta_{i,j}^{(1)} &= \gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}), \\ \delta_2 &= \max_{i,j=1}^{m,n} |\delta_{i,j}^{(2)}|, & \delta_{i,j}^{(2)} &= \gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Якщо $\delta \leq \delta_*$, то вважаємо, що задача розв'язана із необхідною точністю, інакше, збільшуємо кількість вузлів розбиття області чи змінюємо співвідношення між m і n (значення параметрів m і n доцільно задавати так, щоб виконувалася умова $\gamma \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної) та повторно виконуємо кроки алгоритму.

Побудовані за описаним вище алгоритмом динамічні сітки є основою для досліджень інших кількісних характеристик, зокрема, швидкості руху тощо.

Швидкість руху $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ знаходимо за формулою $\vec{v} = \frac{d\omega}{dz} = 1 \Big/ \frac{dz}{d\omega}$ [12]. Різницеві формули для обчислення величини швидкості $v_{i,j} = v(x_{i,j}, y_{i,j})$ мають вигляд:

$$v_{i,j} = 2 \frac{\Delta\psi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2},$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$v_{0,j} = 2 \frac{\Delta_\psi}{J_{0,j}} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2},$$

$$J_{0,j} = (x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j}), \quad j = \overline{1, n};$$

$$v_{i,n+1} = \frac{\Delta_\psi}{J_{i,n+1}} \sqrt{(x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})^2 + (y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1})^2},$$

$$J_{i,n+1} = (x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - (x_{i,n+1} - x_{i,n})(y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1}), \quad i = \overline{1, m};$$

$$v_{m+1,j} = 2 \frac{\Delta_\psi}{J_{m+1,j}} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$J_{m+1,j} = (x_{m+1,j} - x_{m,j})(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j-1}) - (x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j-1})(y_{m+1,j} - y_{m,j});$$

$$v_{i,0} = \frac{\Delta_\psi}{J_{i,0}} \sqrt{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})^2 + (y_{i+1,0} - y_{i-1,0})^2},$$

$$J_{i,0} = (x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}), \quad i = \overline{1, m};$$

$$v_{0,0} = \frac{\Delta_\psi}{J_{0,0}} \sqrt{(x_{1,0} - x_{0,0})^2 + (y_{1,0} - y_{0,0})^2},$$

$$J_{0,0} = (x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,0}) - (x_{0,1} - x_{0,0})(y_{1,0} - y_{0,0});$$

$$v_{0,n+1} = \frac{\Delta_\psi}{J_{0,n+1}} \sqrt{(x_{1,n+1} - x_{0,n+1})^2 + (y_{1,n+1} - y_{0,n+1})^2},$$

$$J_{0,n+1} = (x_{1,n+1} - x_{0,n+1})(y_{0,n+1} - y_{0,n}) - (x_{0,n+1} - x_{0,n})(y_{1,n+1} - y_{0,n+1});$$

$$v_{m+1,n+1} = \frac{\Delta_\psi}{J_{m+1,n+1}} \sqrt{(x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})^2 + (y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1})^2},$$

$$J_{m+1,n+1} = (x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})(y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n}) - (x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})(y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1});$$

$$v_{m+1,0} = \frac{\Delta_\psi}{J_{m+1,0}} \sqrt{(x_{m+1,0} - x_{m,0})^2 + (y_{m+1,0} - y_{m,0})^2},$$

$$J_{m+1,0} = (x_{m+1,0} - x_{m,0})(y_{m+1,1} - y_{m+1,0}) - (x_{m+1,1} - x_{m+1,0})(y_{m+1,0} - y_{m,0}). \quad (2.21)$$

Зазначимо, що для розрахунків за формулами сумарних зображень (на кожному ітераційному кроці), як визначено в п. 1.4.3, необхідно виконати $\approx 2nm$ операцій. Менша трудомісткість обчислень і менша кількість ітерацій, за яку досягається необхідна точність (як показали числові розрахунки) дають деяку “економію” комп'ютерних ресурсів, що дозволяє виконувати обчислення

для більшої кількості вузлів розбиття області, аніж це було зроблено в [12].

Числові експерименти, проведені для різних конфігурацій та дискретизацій області підтверджують, що запропонована обчислювальна схема розв'язування окресленого вище класу задач є швидкозбіжною і економною стосовно використовуваних комп'ютерних ресурсів (у порівнянні, наприклад, з [12]). Збіжність та стійкість побудованого алгоритму апробована шляхом проведення великої кількості числових розрахунків як для областей, що вже розглядалися в інших роботах, але з більшими значеннями параметрів розбиття області, так і для “нових” криволінійних областей більш складної геометрії. Перевірка точності наближень значень шуканих функцій за розробленим алгоритмом проводилася шляхом співставлення результатів, отриманих за ним, та результатів, отриманих в [12], за іншими алгоритмами. У 1-ому та 11-ому прикладах отримані результати порівнюються також і з точними розв'язками.

Результати обчислень для однозв'язних областей подано у вигляді порівняльних таблиць (табл. 2.1–2.5), зображень динамічних сіток (рис. 2.2 а, 2.2 б, 2.3–2.9 а), поверхонь значень швидкості (рис. 2.3–2.7 б) та поверхонь значень нев'язок апроксимацій умов Коші-Рімана (рис. 2.8–2.9 б), для двозв'язних областей – у вигляді порівняльних таблиць (табл. 2.6–2.8) і динамічних сіток (рис. 2.10–2.12).

В табл. 1, де через Q^* , δ^* , δ_Q^* , δ_T^* позначено отримані в [12] відповідно повна витрата, оцінка конформності відображення, відносна похибка повної витрати і відносна максимальна похибка значень координат вузлів (Q , δ , δ_Q , δ_T – відповідні отримані автором значення), подані результати розрахунку для області $G_z^{(1)}$, що обмежена двома дугами концентричних кіл радіусів 1 та e і променями, що виходять з початку координат під кутами 0.1 та 1.1 рад. при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$ (точний розв'язок цієї задачі: $x(\varphi, \psi) = e^\varphi \cos(\psi + 0.1)$, $y(\varphi, \psi) = e^\varphi \sin(\psi + 0.1)$).

Результати розрахунків для області $G_z^{(2)} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 10\pi, 3 + 3 \cos 0.2x \leq y \leq 25 - 7 \cos 0.2x\}$ подані в табл. 2.2 ($iter$ – кількість ітерацій; $iter^*$, Q^* , δ^* – результати з [12]; тут, як вище і надалі, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$) і на рис. 2.2 а, а для області $G_z^{(3)}$, що обмежена ортогональними дугами кіл радіусів

0.81 м, 1.6 м та 2 м, центри яких лежать на одній прямій на відстані 2.16 м та 2.56 м один від одного, – в табл. 2.3 і на рис. 2.2 б.

Розроблений алгоритм застосовано також для розрахунку гідродинамічної сітки руху рідини до системи горизонтальних дрен [12], де елемент симетрії цієї системи – область $G_z^{(4)}$ (рис 2.3) – $AB = \{z : 0 \leq x \leq 20, y = 13\}$, $BC = \{z : f(x, y) = 0\} = \{z : x = 20, 0 \leq y \leq 13\} \cup \{z : 0 \leq x \leq 20, y = 0\} \cup \{z : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$, $CD = \{z : x > 0, x^2 + (y - 2)^2 = 1\}$, $DA = \{z : x = 0, 3 \leq y \leq 13\}$. Результати обчислень подано у табл. 2.4, а динамічну сітку та поверхню величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу – на рис. 2.3. Зауважимо, що область $G_z^{(4)}$ має складну геометрію, оскільки одна із її граничних ліній течії задається декількома аналітичними співвідношеннями. Лініями Γ на рис. 2.3 і рис. 2.4 відокремлені ділянки найбільших за абсолютною величиною нев'язок $\delta_{i,j}^{(1)}$ і $\delta_{i,j}^{(2)}$ (що, з фізичної точки зору, є так званими “застійними” зонами, де швидкість фільтрації близька до нуля і де можуть залишатися важкодоступні поклади вуглеводнів).

Таблиця 2.1

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(1)}$

$n \times m$	Q	Q^*	δ_Q	δ_Q^*	δ_T	δ_T^*	δ	δ^*
12×12	1.00056	0.99596	0.000313	0.00428	0.00623	0.0067	0.00176	0.0075
24×24	1.00042	1.00012	0.000017	0.000126	0.0035	0.0032	0.00125	0.0051
28×28	1.00030	1.00009	0.000053	0.000156	0.0022	0.0024	0.00116	0.0015
40×40	1.00021		0.000039		0.00181		0.00098	
100×100	1.00027		0.000023		0.00169		0.00032	

Таблиця 2.2

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(2)}$

$n \times m$	$iter$	$iter^*$	Q	Q^*	δ	δ^*
12×12	42		0.57480		0.00196	
24×24	234	1387	0.56781	0.5538	0.00116	0.0018
28×28	315	1772	0.56632	0.5542	0.00103	0.0014
50×50	4		0.56615		0.00062	

Таблиця 2.3

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(3)}$

$n \times m$	$iter$	$iter^*$	Q	Q^*	δ	δ^*
20×20	6	141	1.15979	1.1686	0.00087	0.0054
24×24	8	183	1.16099	1.1692	0.00074	0.0038
28×28	10	227	1.16184	1.1695	0.00064	0.0028
50×50	21		1.16404		0.00038	

Область $G_z^{(5)}$ обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = x^2 + 1$. Очевидно, що у вершині С (рис. 2.4) порушена умова конформності відображення, що, проте, не заважає знаходити адекватний розв'язок задачі запропонованим методом. Розв'язок задачі у цій області подано у вигляді таблиці розрахункових значень при різних значеннях параметрів розбиття області (табл. 2.4), динамічної сітки і поверхні швидкості (рис. 2.4).

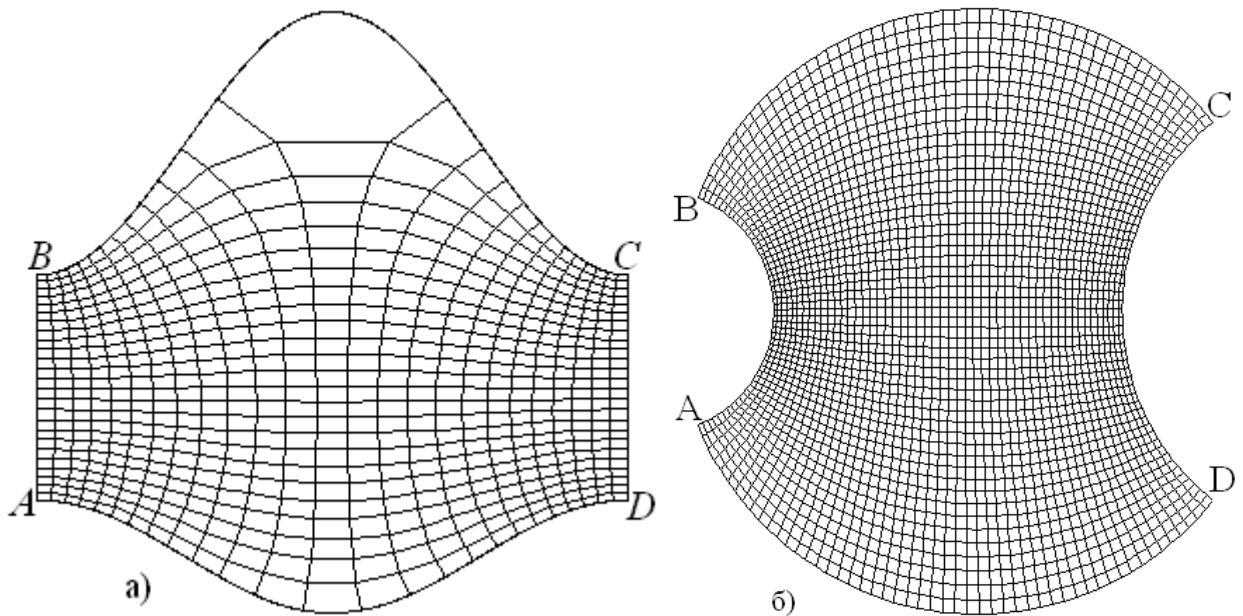


Рис. 2.2. Динамічні сітки в областях $G_z^{(2)}$ (а) і $G_z^{(3)}$ (б)

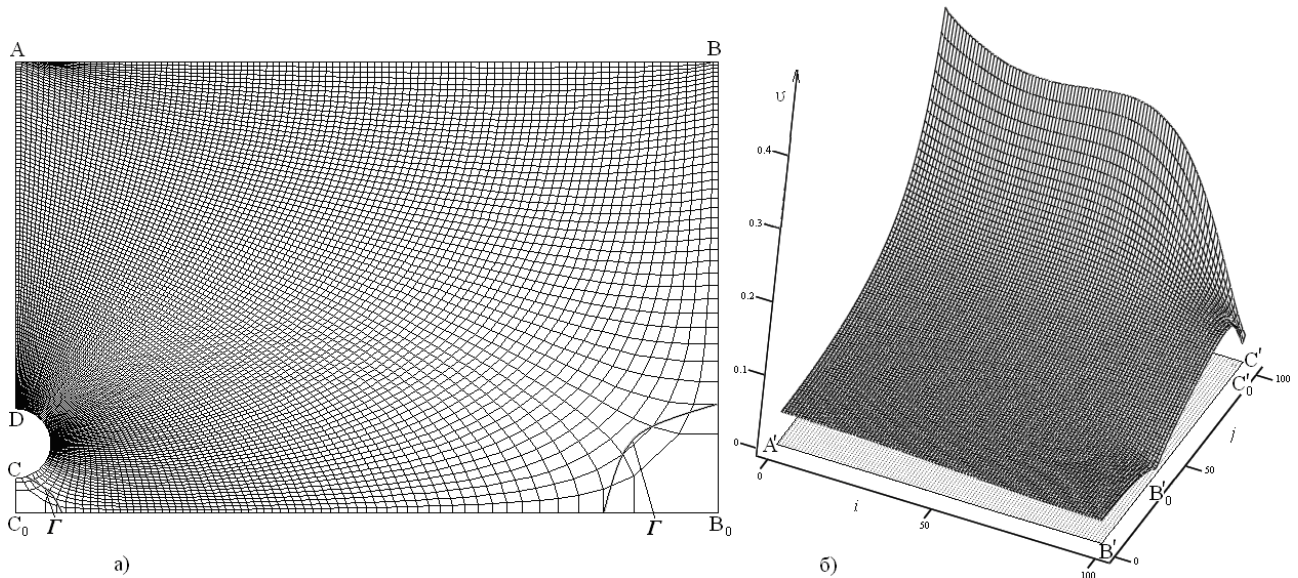


Рис. 2.3. Динамічна сітка в області $G_z^{(4)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

У табл. 2.5 та на рис. 2.5 наведені результати розрахунку для області $G_z^{(6)} = \{z = re^{i\theta}; 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Особливістю цієї області є те, що в точках A , B екіпотенціальні лінії перетинаються з лініями течії під кутом π . Як відомо, швидкість у цих точках теоретично дорівнює ∞ , а відповідно в їх околах мають місце великі похибки в обчисленнях.

Таблиця 2.4

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(4)}$

$n \times m$	$iter$	$iter^*$	Q	Q^*	δ	δ^*
12×12	104		0.70566		0.00814	
24×24	350	815	0.71766	0.7451	0.00952	0.072
28×28	459	1046	0.71421	0.7449	0.00985	0.075
40×40	270		0.70697		0.01034	
100×100	193		0.73667		0.00185	

Таблиця 2.5

Результати тестового розрахунку для областей $G_z^{(5)}$ і $G_z^{(6)}$

$n \times m$	$G_z^{(5)}$		$G_z^{(6)}$	
	Q	δ	Q	δ
20×20	1.11786	0.01689	1.67503	0.15517
24×24	1.08043	0.01326	1.68071	0.11929

40 × 40	1.12004	0.01352	1.69016	0.08264
100 × 100	1.09814	0.01073	1.69684	0.04377

Окрім розрахунків для областей, які вже розглядалися в інших роботах, з метою порівняння результатів і перевірки точності та ефективності роботи алгоритму, були проведені також багаточисельні числові експерименти для областей більш складної конфігурації з особливостями (негладкими ділянками границі, що може задаватися декількома аналітичними співвідношеннями та містити “зломи” під різними кутами, ділянками (точками) порушення конформності відображення тощо). Ці експерименти показали, що описаний підхід може успішно застосовуватись і у таких випадках, а порушення конформності відображення в окремих ділянках області має лише незначний локальний вплив на точність розрахунків в околах цих ділянок і не впливає на розв'язання відповідних задач у цілому.

На рис. 2.6 і 2.7 зображені розраховані динамічні сітки і поверхні значень швидкості для областей $G_z^{(7)}$ і $G_z^{(8)}$ відповідно, границі яких $\partial G_z^{(7)}$ і $\partial G_z^{(8)}$ задані таким чином: $\partial G_z^{(7)} = \{z : x = 100 \cos \tau, y = 75 \sin \tau, \tau \in [0.75\pi, 1.25\pi] \cup [0.25\pi, 0.75\pi] \cup [1.75\pi, 2.25\pi] \cup [1.25\pi, 1.75\pi]\}$, $\partial G_z^{(8)} = \{z : x = 1.5 \cos \tau - 2, y = 1.5 \sin \tau, 5.545 \leq \tau \leq 2\pi + 0.457\} \cup \{z : x = 1.4 \cos \tau, y = 1.4 \sin \tau + 1.9, 4.226 \leq \tau \leq 5.171\} \cup \{z : x = 1.8 \cos \tau + 2.3, y = 1.8 \sin \tau, 2.775 \leq \tau \leq 3.702\} \cup \{z : x = 2 \cos \tau, y = 2 \sin \tau - 2.8, 1.173 \leq \tau \leq 2.032\}$.

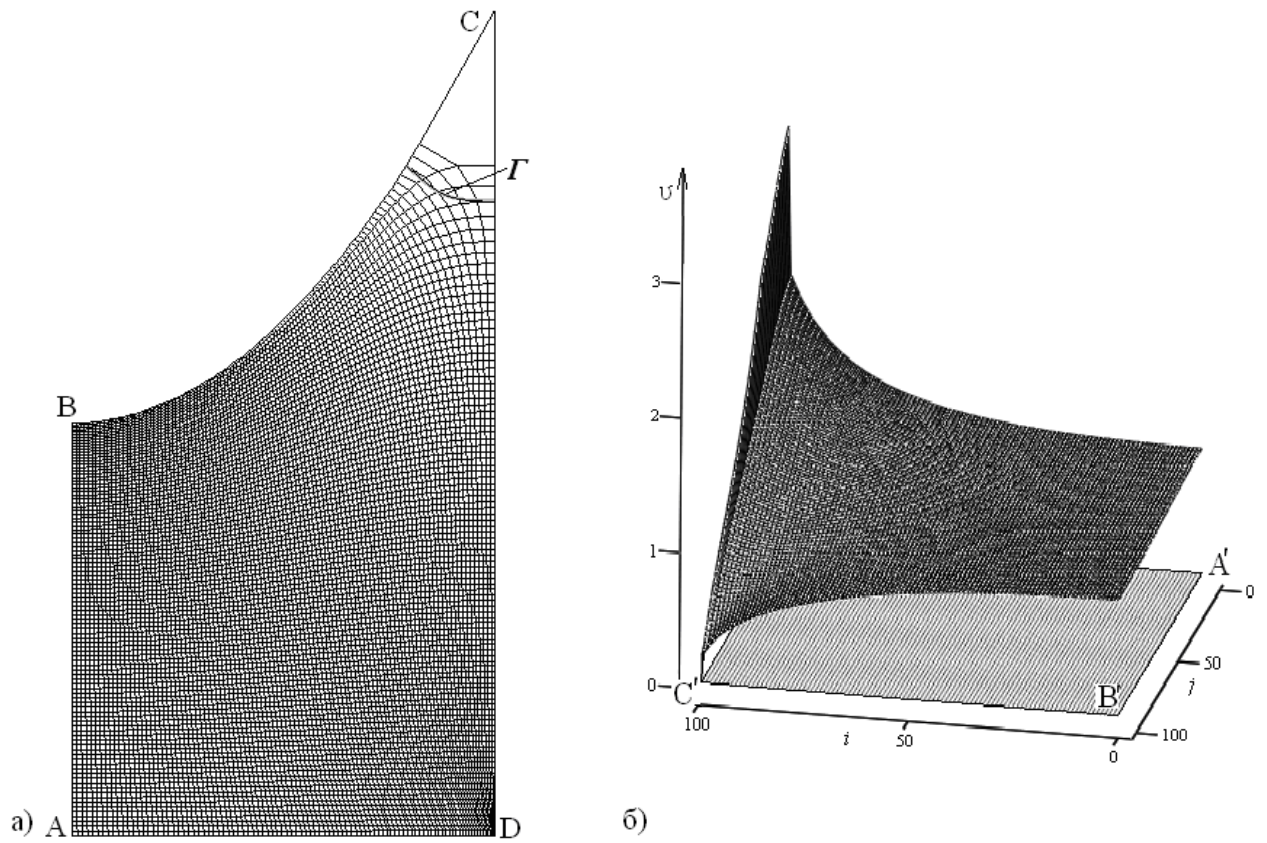


Рис. 2.4. Динамічна сітка в області $G_z^{(5)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

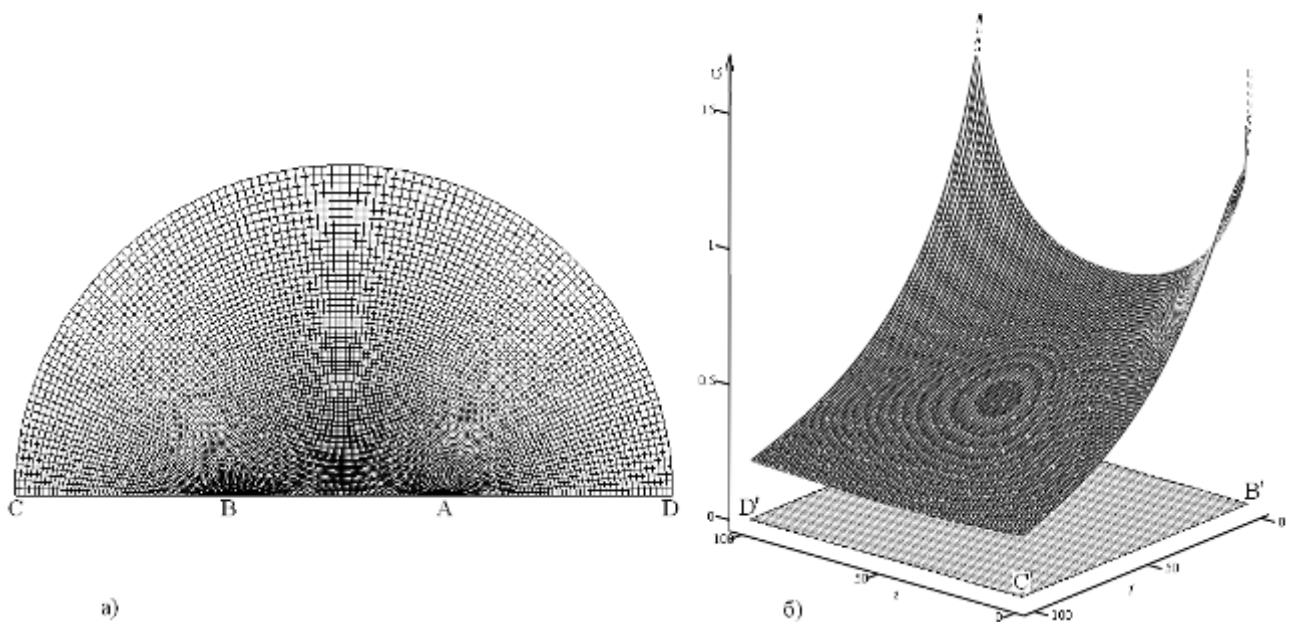


Рис. 2.5. Динамічна сітка в області $G_z^{(6)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

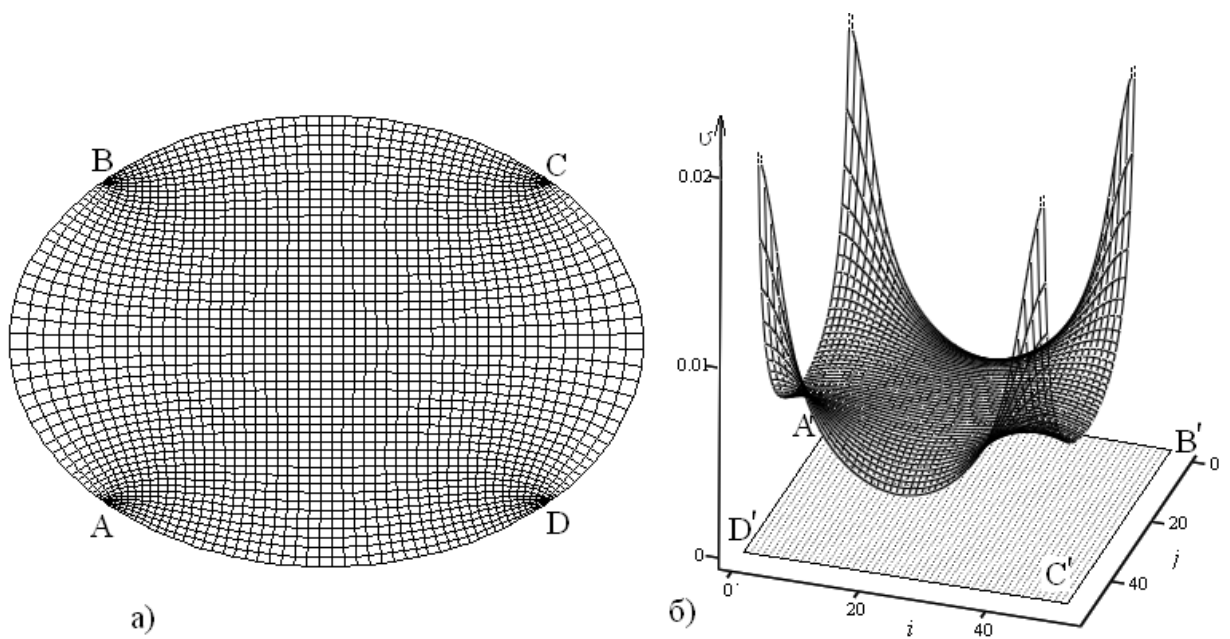


Рис. 2.6. Динамічна сітка в області $G_z^{(7)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

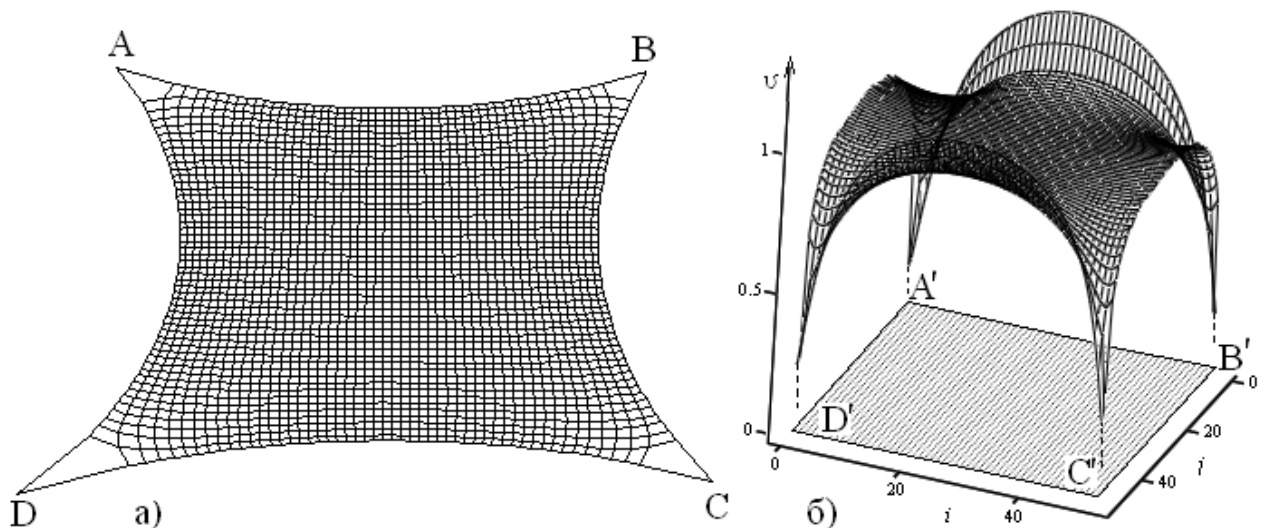


Рис. 2.7. Динамічна сітка в області $G_z^{(8)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

Область $G_z^{(9)}$ (рис. 2.8) обмежена кривими $AB = \{z: x = 2 \sin 0.25\pi y, 0 \leq y \leq 8\}$, $BC = \{z: 0 \leq x \leq 3\pi, y = 10 - 2 \cos(x/3)\}$, $CD = \{z: x = 3\pi + \sin 0.5\pi y, 6 \leq y \leq 12\}$, $DA = \{z: 3\pi \geq x \geq 0, y = 3 - 3 \cos(x/3)\}$. При розбитті області 140×100 отримано значення повної витрати $Q = 0.56755$ і ступінь конформності відображення $\delta = 0.08689$. На рис. 2.8 б зображено поверхню значень нев'язок конформності (2.19) відносно відповідної області комплексного потенціалу, де $\delta_{i,j} = \sqrt{(\delta_{i,j}^{(1)})^2 + (\delta_{i,j}^{(2)})^2}$.

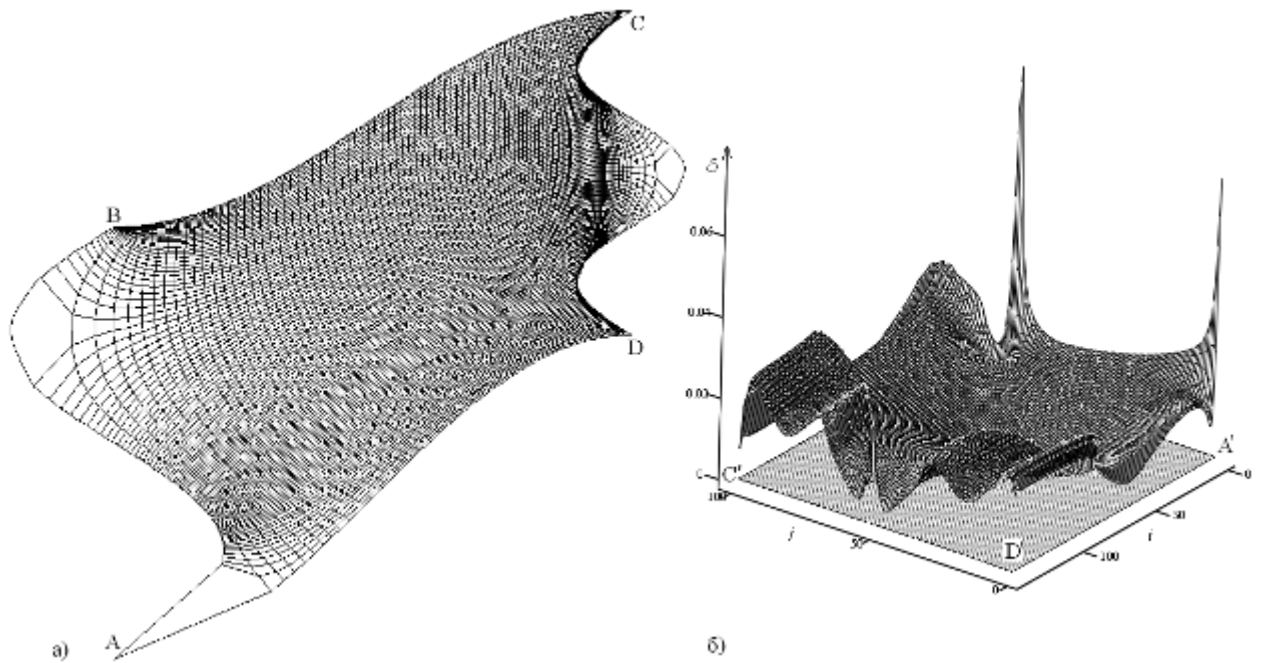


Рис. 2.8. Динамічна сітка в області $G_z^{(9)}$ (а) і поверхня значень нев'язок конформності відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

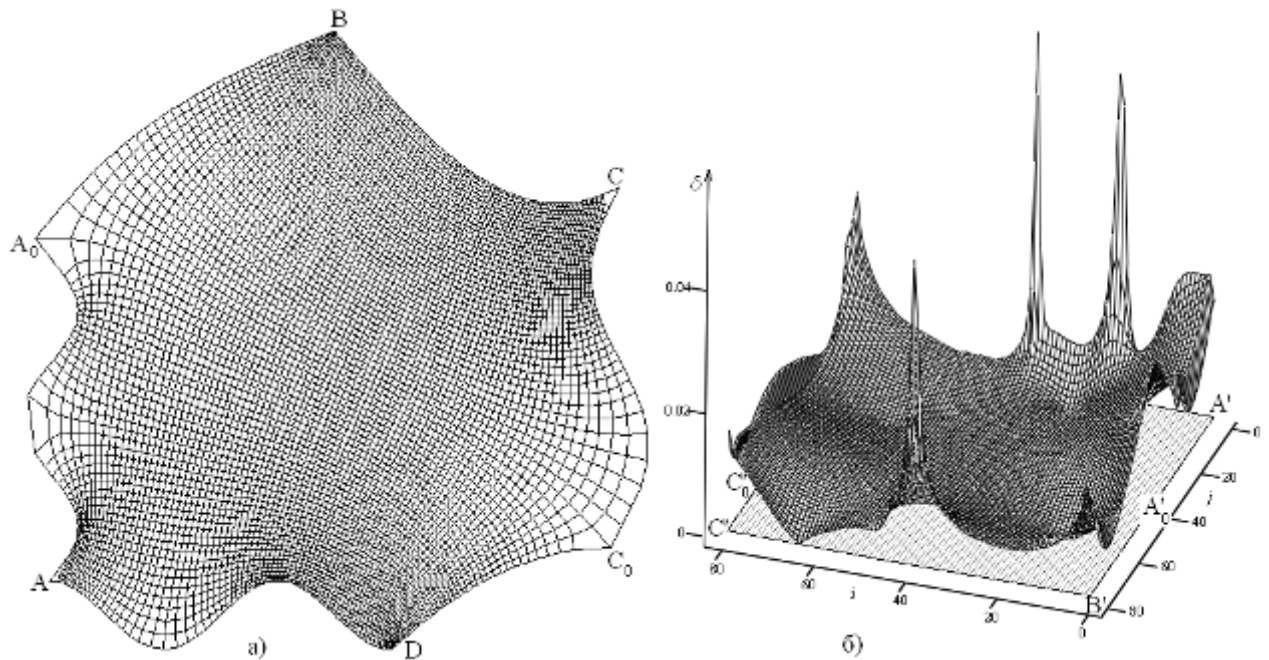


Рис. 2.9. Динамічна сітка в області $G_z^{(10)}$ (а) і поверхня значень нев'язок конформності відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

Динамічна сітка для області $G_z^{(10)}$, що обмежена кривими $AA_0 = \{z : x = \sin(y+a) - 10, -a \leq y \leq 4, a = 3 + 0.05(8 + \sin \pi(\sin 2 - 3))^2\}$, $A_0B = \{z : x = 0.021(y-4)^3 + y + \sin(4+a) - 14, 4 \leq y \leq 10\}$, $BC = \{z : 0 \leq x \leq 10, y = -5 \sin 0.2x + 10\}$, $CC_0 = \{z : x = \sin 0.2\pi(y+b) + 10, -b \leq y \leq -5, b = 5 \sin 2 - 10\}$, $C_0D = \{z :$

$2 \leq x \leq c, y = -0.05(x - c)^2 - 5, c = \sin \pi(\sin 2 - 3) + 10\}$, $AD = \{z : -10 \leq x \leq 2, y = -\sin 0.25\pi x - a - 1\}$, наведена на рис. 2.9 а, поверхня значень нев'язок – на рис. 2.9 б. При розбитті області 80×80 отримані значення $Q = 1.03043$, $\delta = 0.07605$. Як бачимо, не зважаючи на “значну криволінійність” цих областей, найбільші “порушення” конформності відображення спостерігаються лише в околах особливих точок.

У двозв'язній області $G_z^{(11)}$, яка обмежена контурами $L_* = \{x + iy : x = \cos \tau, y = \sin \tau, 0 \leq \tau \leq 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = 2 \cos \tau, y = 2 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, за умов, що $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = \ln(2)$, маємо точний розв'язок: $x(\varphi, \psi) = e^\varphi \cdot \cos(\psi)$, $y(\varphi, \psi) = e^\varphi \cdot \sin(\psi)$. Результати розрахунків, отримані за наведеним алгоритмом та в [12] для різних $n \times m$, подані в табл. 2.6. Результати обчислень при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 0.5$ для області $G_z^{(12)}$, що задається кривими $L^* = \{x + iy : x = 2 \cos \tau, y = 2 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L_* = \{x + iy : x = \cos \tau, y = 0.5 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, наведені в табл. 2.7 і на рис. 2.10 а. Числові розрахунки для області $G_z^{(13)}$, обмеженої контурами $L^* = \{x + iy : x = 4 \cos \tau, y = 2 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L_* = \{x + iy : x = \cos \tau, y = \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 2 \ln 2$, приведені в табл. 2.8 і на рис. 2.10 б.

У наступних прикладах задані області більш складної конфігурації: із зміщеними центрами контурів чи значним співвідношенням між розмірами обмежуючих кривих. Як бачимо, запропонований алгоритм без складнощів застосовується і у випадках таких “не зручних” для обчислень областей.

Область $G_z^{(14)}$ (рис. 2.11а) обмежена колами з радіусами 1 і 35 відповідно, внутрішнє коло має зміщений центр на 10 по осях $0x$ і $0y$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$. За $k = 196$ ітерацій при розбитті області 50×80 отримано значення повної витрати $Q = 1.54383$ і рівень конформності відображення $\delta = 0.07467$.

Для області $G_z^{(15)}$ (рис. 2.11 б), обмеженої лініями $L_* = \{x + iy : x = 1.8 \cos \tau, y = 1.8 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = 30 \cos \tau + \cos 10\tau, y = 30 \sin \tau - \sin 10\tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, і заданих $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, за $k = 109$ ітерацій при розбитті області 50×70 отримано значення $Q = 1.84626$ і $\delta = 0.08087$.

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(11)}$

$n \times m$	$iter$	$iter^*$	Q	Q^*	δ_Q	δ_Q^*	δ	δ^*
5×45	12	236	6.28527	6.28813	0.00033	0.00494	0.01881	0.00482
7×63	14	236	6.28452	6.28571	0.00021	0.00252	0.01947	0.00183
10×91	18	183	6.28413	6.28445	0.00015	0.00126	0.0181	0.00065
15×134	19	187	6.28384	6.28372	0.00010	0.00054	0.0159	0.00023
20×181	39	182	6.28372	6.28349	0.00008	0.00031	0.0131	0.00012
25×227	45		6.28372		0.00008		0.0115	

Таблиця 2.7

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(12)}$

$n \times m$	$iter$	$iter^*$	Q	Q^*	δ	δ^*
5×32	38	465	3.22030	3.22268	0.01658	0.02085
7×45	65	539	3.21891	3.22036	0.01817	0.00829
11×64	51	640	3.21839	3.21909	0.01491	0.00311
15×97	76	569	3.21829	3.21844	0.01688	0.00097
20×129	98	588	3.21820	3.21819	0.01573	0.00044
25×161	111	577	3.21821	3.21809	0.01505	0.00024

Таблиця 2.8

Результати тестового розрахунку для області $G_z^{(13)}$

$n \times m$	$iter$	$iter^*$	Q	Q^*	δ	δ^*
5×35	166	402	7,11987	7,13451	0,47691	0,34824
7×50	64	537	7,12443	7,13194	0,21217	0,41325
10×71	51	651	7,12856	7,12947	0,14907	0,17809
20×143	51	990	7,12649	7,12763	0,07684	0,07084

В області $G_z^{(16)}$ має місце велика різниця між розмірами граничних екіпотенціалей (моделює те, що діаметр свердловини є суттєво меншим, ніж контур її живлення) та значне зміщення їхніх центрів один відносно одного. На рис. 2.12 а зображена динамічна сітка для цієї області при розбитті 80×120 , $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = \ln 85$, $L_* = \{x + iy : x = 10 \cos \tau + 200, y = 10 \sin \tau + 100, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = 1000 \cos \tau, y = 700 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ (отримано $Q = 3.45237$, $\delta = 0.22943$).

Отримані результати для області $G_z^{(17)}$ (рис. 2.12 б), що обмежена лініями $L_* = \{x + iy : x = 0.095 \cos \tau - 0.1, y = 0.095 \sin \tau + 0.15, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : + 0.1 \cos 3\tau, y = 1.5 \sin \tau - 0.1 \sin 3\tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, якщо $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$ і $m \times n = 50 \times 70$, становлять: $k = 193$, $Q = 2.02231$, $\delta = 0.00667$.

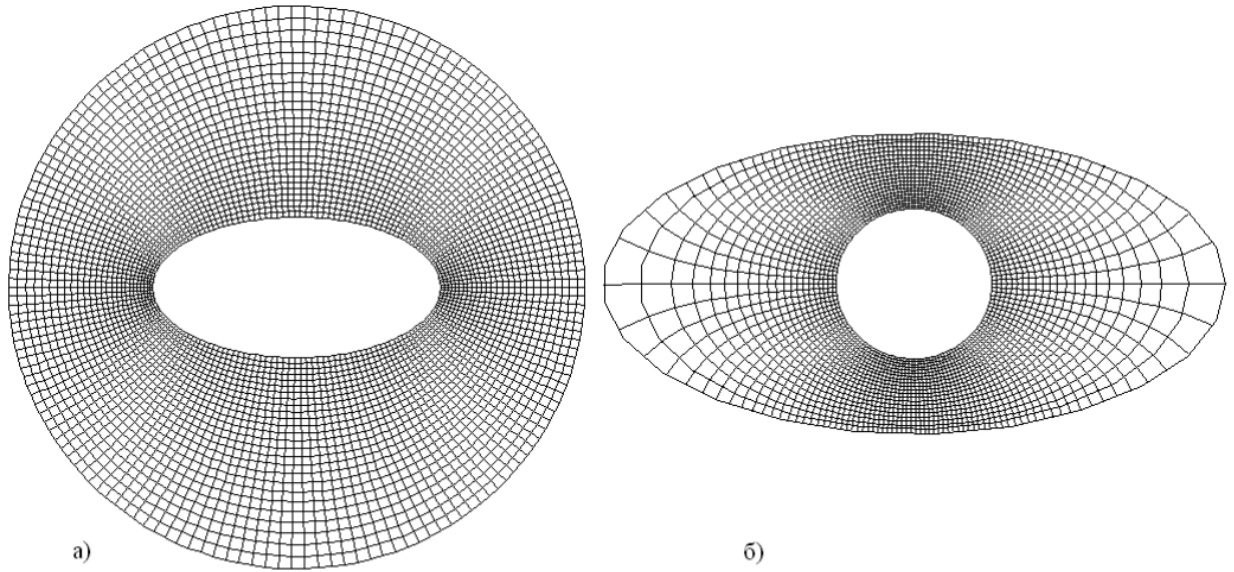


Рис. 2.10. Динамічні сітки в областях $G_z^{(12)}$ (а) і $G_z^{(13)}$ (б)

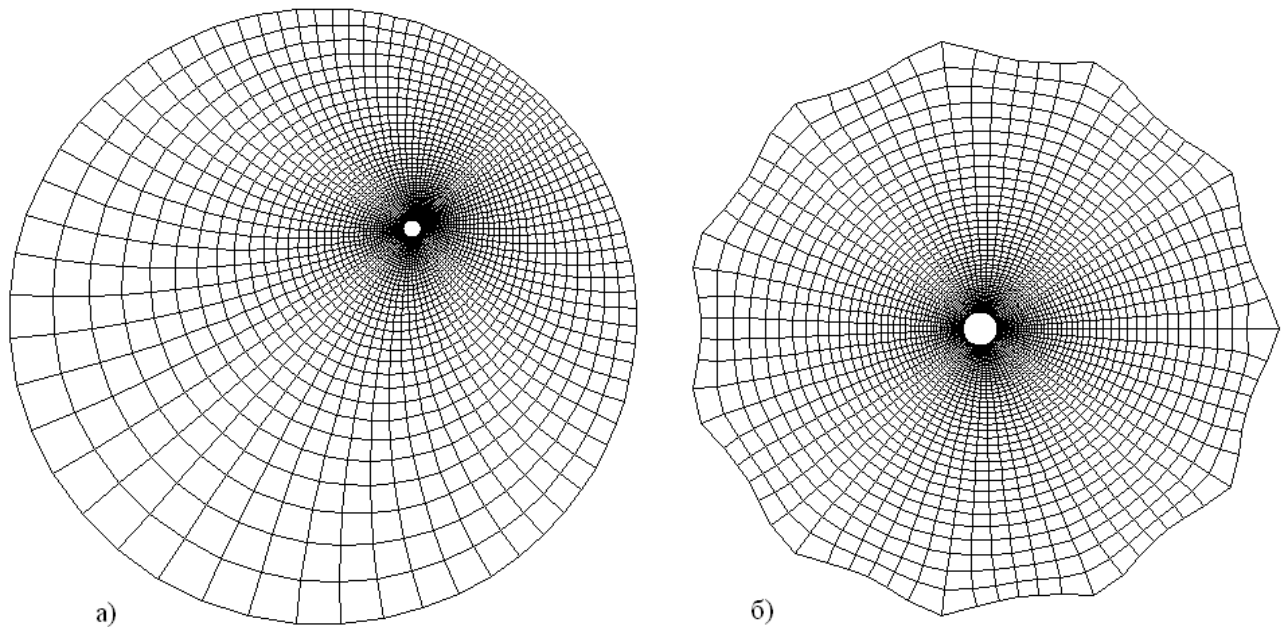


Рис. 2.11. Динамічні сітки в областях $G_z^{(14)}$ (а) і $G_z^{(15)}$ (б)

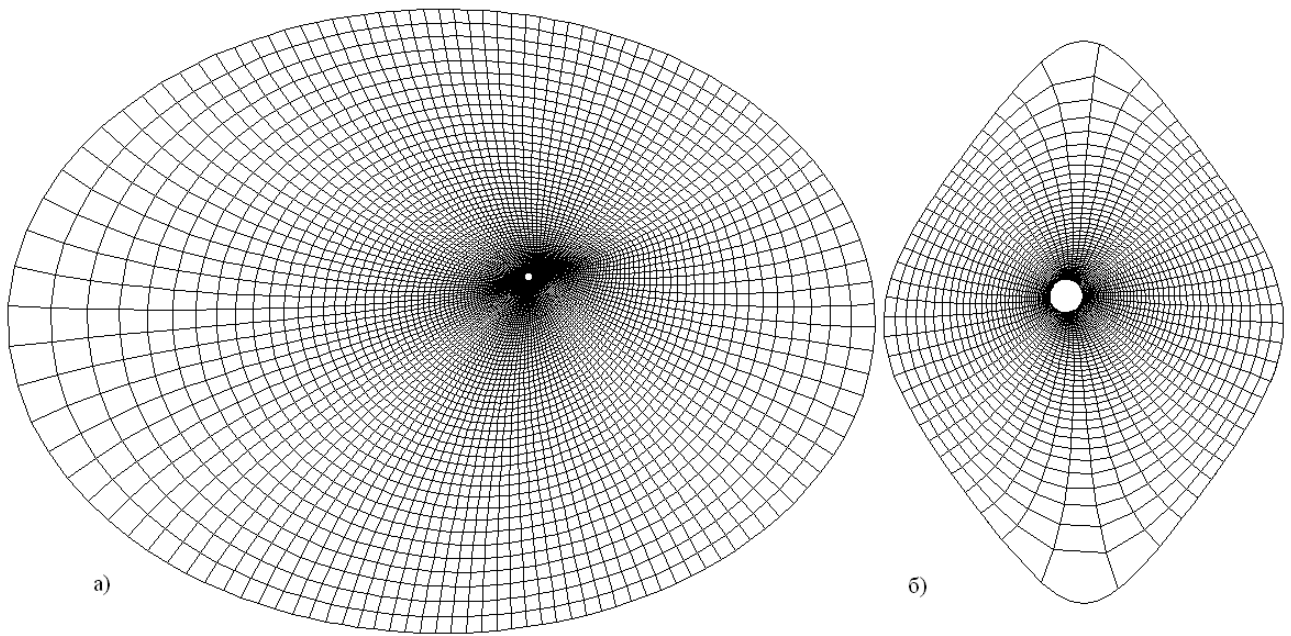


Рис. 2.12. Динамічні сітки в областях $G_z^{(16)}$ (а) і $G_z^{(17)}$ (б)

2.2. Синтез ЧМКА та СЗ при математичному моделюванні фільтраційних процесів для LEF-областей з вільними ділянками меж

Викладену у попередньому параграфі методику моделювання ідеальних полів на основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень поширено на розв'язання модельних крайових задач для розрахунку фільтраційного режиму у криволінійних LEF-областях з вільною межею – невідомою ділянкою границі, що є кривою депресії.

Тут наведена загальна постановка модельної крайової задачі для LEF-області з вільною межею та проілюстровано її застосування до задачі, що моделює процес фільтрації у ґрунтовій загаті без проміжка височування і до модельної задачі безнапірного руху нафти в елементі нафтоносного пласта. Розв'язування задачі зводиться до обернення конформного відображення даної фізичної області на відповідну область комплексного потенціалу з невідомим параметром. При цьому, вузли динамічної сітки розраховуються за формулами сумарних зображень. В результаті розв'язування задачі автоматично вирішується проблема розрахунку вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомої ділянки границі області і координат точки перетину її з заданою ділянкою та значення потенціалу (напору) у цій точці, обчислення повної фільтраційної витрати [23, 38].

Розглянемо стаціонарний процес фільтрації у криволінійній LEF-області G_z ($z = x + iy$), що обмежена кривими: $AB = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, $B_0C = \{z : f^*(x, y) = 0, y_C \leq y \leq y_*\}$, $CD = \{z : f^*(x, y) = 0, y \leq y_C\}$, $DA = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, BB_0 – вільна (невідома) межа (крива депресії), y_B, y_C – задані ординати точок B і C відповідно, y_* – шукана ордината точки B_0 (рис. 2.13).

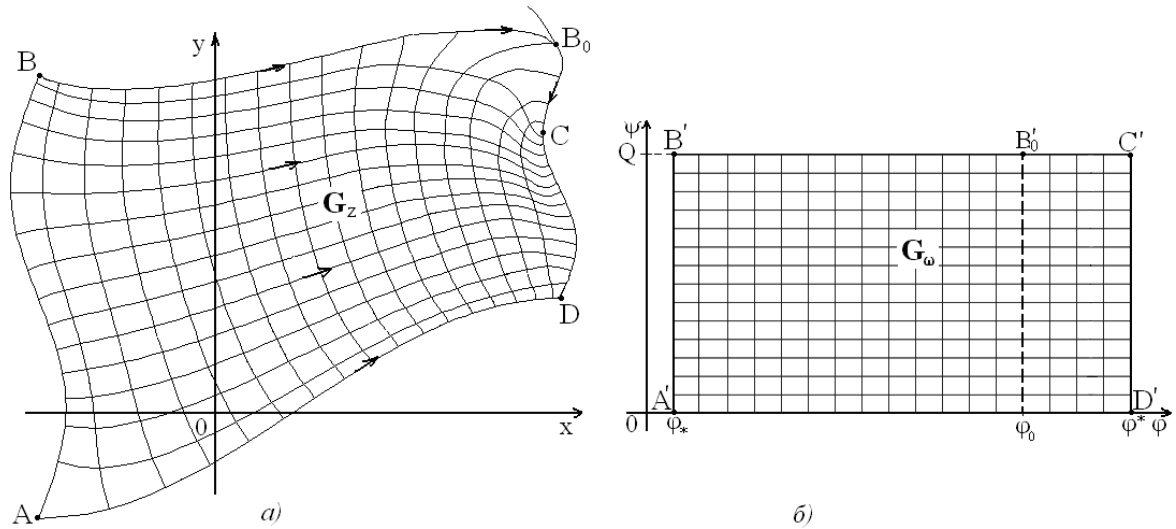


Рис. 2.13. Схема LEF-області з вільною межею (а) і відповідної їй області комплексного потенціалу (б)

Як і в [11–12], процес фільтрації описуватимемо рівнянням руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ – швидкість фільтрації, κ – коефіцієнт провідності, φ – потенціал поля, такий, що $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{BB_0C} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{DA} = 0$, $\varphi|_{BB_0} = \Phi(y)$ ($\Phi(y)$ – монотонна функція, $\Phi(y_B) = \varphi_*$, $\Phi(y_*) = \varphi^*$).

Задача на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ ($\psi = \psi(x, y)$ – функція течії комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) з невідомим параметром – повною витратою $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$

матиме вигляд [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{BB_0} = \Phi(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BB_0C} = Q, \\ v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Умови ортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області AB , AD , CD , B_0C і BB_0 , де останнє рівняння – це умова ортогональності ліній динамічної сітки, в якому не використовується рівняння самої границі, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{grad } \psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad } f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad } f_*(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) &= 0, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot \text{grad } f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } f^*(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) &= 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } \psi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Використавши формули переходу (2.2), обернену до (2.22) задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z отримаємо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_*(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad y(\varphi, Q) = \Phi^{-1}(\varphi), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ Q = \int_0^Q \kappa \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

а умови ортогональності (2.23) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} &= 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_*^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_*^*}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=0} &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0. \quad (2.25)$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі (аналоги рівнянь Лапласа при $\kappa = 1$) запишуться у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0. \quad (2.26)$$

Компоненти вектора швидкості визначаються за формулами:

$$v_x = \frac{\kappa}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\kappa}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}. \quad (2.27)$$

2.2.1. Задача фільтрації у ґрунтовій загаті без ділянки височування

На відміну від традиційних постановок задачі фільтрації через ґрунтову загату, тут замість ділянки височування є непроникна ділянка границі: B_0C – лінія течії (рис. 2.13, 2.14). Відповідна LEF-область \tilde{G}_z (рис. 2.14) задана так: $AB = \{z : f_*(x, y) = \alpha_1 y - x = 0, 0 \leq y \leq H_*\}$, $B_0C = \{z : f^*(x, y) = \alpha_2 y + x - L = 0, y_* \leq y, y \leq H^*\}$, $CD = \{z : f^*(x, y) = \alpha_2 y + x - L = 0, H^* \leq y \leq 0\}$, $AD = \{z : f_*(x, y) = y = 0, 0 \leq x \leq L\}$, BB_0 – вільна (невідома) межа (крива депресії), AD – непроникна основа загати, H_G та H_* , H^* – відповідно висота загати та напори на ній, b – ширина гребеня, $\alpha_1 = l_1/H_G$ та $\alpha_2 = l_2/H_G$ – коефіцієнти закладання верхового та низового відкосів, $L = l_1 + b + l_2$ – загальна ширина загати, y_* – шукана ордината точки B_0 .

Процес фільтрації, як зазначено вище, описуємо рівняннями $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } h$, $\text{div } \vec{v} = 0$, де покладемо $\kappa = 1$, $h = h(x, y)$ – напір у точці (x, y) , такий що

$$h|_{AB} = H_*, \quad h|_{CD} = H^*, \quad h|_{BB_0} = y; \quad \varphi = -\kappa \tilde{h} = -\tilde{h} \quad \text{– потенціал поля } \left(\tilde{h} = \frac{h - H^*}{H^* - H_*} \right),$$

$$\text{тоді } \varphi|_{AB} = \varphi_* = 0, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^* = 1, \quad \varphi|_{BB_0} = \frac{H^* - y}{H^* - H_*}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{BB_0C} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{DA} = 0.$$

Задача (2.22)–(2.23) на конформне відображення області \tilde{G}_z на область комплексного потенціалу $\tilde{G}_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q\}$ з невідомою витратою Q набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x, \quad (x, y) \in \tilde{G}_z, \\ \varphi|_{AB} = 0, \quad \varphi|_{CD} = 1, \quad \varphi|_{BB_0} = -y, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ \text{grad } \psi(x(0, \psi), y(0, \psi)) \cdot \text{grad}(\alpha_1 y(0, \psi) - x(0, \psi)) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad } y(\varphi, 0) = 0, \\ \text{grad } \psi(x(1, \psi), y(1, \psi)) \cdot \text{grad}(\alpha_2 y(1, \psi) + x(1, \psi) - L) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad}(\alpha_2 y(\varphi, Q) + x(\varphi, Q) - L) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } \psi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \end{array} \right.$$

а відповідна їй обернена задача запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_\omega, \\ \alpha_1 y(0, \psi) - x(0, \psi) = 0, \quad \alpha_2 y(1, \psi) + x(1, \psi) - L = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, 0) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \alpha_2 y(\varphi, Q) + x(\varphi, Q) - L = 0, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq 1, \\ y(\varphi, Q) = H_* + (H^* - H_*)(1 - \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ Q = \int_0^Q \frac{1}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi, \\ \left(\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=0} = 0, \\ \left(\alpha_2 \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0. \end{array} \right.$$

(2.28)

Ця задача зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$, $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$ при заданих крайових умовах та умовах ортогональності (2.28).

Різницевий аналог поставленої задачі у рівномірній сітковій області $\tilde{G}_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta_\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}, \Delta_\varphi = (m+1)^{-1}, \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}, \Delta_\psi = Q/(n+1), m, n \in \mathbf{N}\}$ складатиметься з рівнянь (2.14) і різницевих апроксимацій крайових умов та умов ортогональності:

$$\begin{aligned}
(y_{1,j} - y_{0,j}) + \alpha_1(x_{1,j} - x_{0,j}) &= 0, & (y_{m,j} - y_{m+1,j}) - \alpha_2(x_{m,j} - x_{m+1,j}) &= 0, \\
\alpha_1 y_{0,j} - x_{0,j} &= 0, & \alpha_2 y_{m+1,j} + x_{m+1,j} - L &= 0, & j = \overline{0, n+1}, \\
y_{i,0} &= 0, & x_{i,1} - x_{i,0} &= 0, & i = \overline{0, m+1}, \\
(x_{i+1,n+1} - x_{i,n+1})(y_{i+1,n+1} - y_{i,n+1}) &+ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) &= 0, \\
y_{i,n+1} &= H_* + (H^* - H_*)(1 - \varphi_i), & i = \overline{0, m_* - 1}, \\
\alpha_2 y_{i,n+1} + x_{i,n+1} - L &= 0, & (y_{i,n} - y_{i,n+1}) - \alpha_2(x_{i,n} - x_{i,n+1}) &= 0, & i = \overline{m_*, m+1}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

де m_* – номер вузла сітки, що відповідає шуканому значенню φ_0 потенціалу точки B_0 : $\varphi_0 = \Delta_\varphi \cdot m_*$.

Алгоритм числового розв'язання цієї задачі будемо з використанням формул сумарних зображень (2.15)–(2.19), що є розв'язками (2.14).

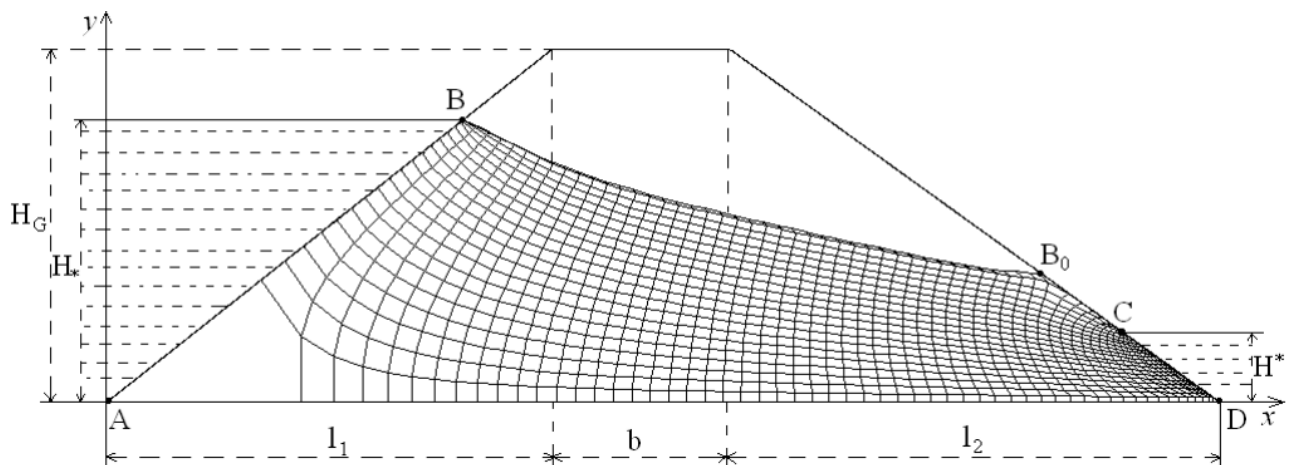


Рис. 2.14. Схема LEF-області \tilde{G}_z і розрахована динамічна сітка

В алгоритмі, як і у п. 2.1, будемо поетапно фіксувати значення параметрів γ (або Q), координат граничних та внутрішніх вузлів динамічної сітки, використовуючи ідеї методу блочної ітерації. Задаємо кількість вузлів розбиття сіткової області \tilde{G}_φ^γ , параметри точності наближення розв'язку, значення m_* і, з урахуванням крайових умов (2.29), початкові наближення координат граничних вузлів. Обчислюємо методом сумарних зображень (2.15)–(2.19) відповідні початкові наближення координат внутрішніх вузлів і знаходимо за формулами (2.11)–(2.13) початкові значення конформного інваріанту γ та витрати Q . Розраховуємо у вузлах сітки значення величини швидкості за формулами (2.21).

Далі, уточнюємо значення m_* і координати граничних вузлів (2.29); знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів за формулами (2.15)–

(2.19); перераховуємо γ та Q за (2.11)–(2.13); розраховуємо нові значення поля величини швидкості. Умови завершення алгоритму визначаємо аналогічно [12].

Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при розбитті області $m \times n = 60 \times 20$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, заданих $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, конструктивних параметрах загати $H_G = 15\text{ м}$, $H_* = 12\text{ м}$, $H^* = 3\text{ м}$, $b = 8\text{ м}$, $l_1 = 20\text{ м}$, $l_2 = 22\text{ м}$ отримано динамічну сітку (рис. 2.14), знайдено повну фільтраційну витрату $Q = 0.20277\text{ м}^3/\text{добу}$, координати точки $B_0(41.548, 5.763)$ і відповідне їй значення потенціалу $\varphi_0 = 0.693$.

2.2.2. Задача витіснення у нафтоносному пласті з вільною межею

У цьому пункті розглядається безнапірний рух рідини (нафти) у нафтоносному пласті-колекторі, де п'єзометрична поверхня є вільною поверхнею. Задачі безнапірного руху (з вільними межами), здебільшого вивчаються в гідродинаміці та гідротехніці при розрахунках процесів фільтрації через ґрунтові греблі, притоку води до дрен, свердловин тощо. У видобуванні нафти безнапірний рух зустрічається значно рідше, ніж напірний, в основному, при шахтній чи кар'єрній розробці родовищ. Але розв'язування задач з вільними межами є значно складнішим, ніж у випадках повністю заданих границь. На сьогоднішній день розроблені підходи до розв'язування таких задач лише для окремих випадків чи для геометрично простих областей. Окрім цього, вивчення безнапірного руху рідини має велике практичне значення, оскільки такий рух є аналогічним до фільтрації газу [7].

Розглядається стаціонарний процес витіснення нафти із пласта-колектора у LEF-області G_z (рис. 2.15 а, 2.16 а), що задана так: $AB = \{z : y = f_*(x)\}$, $CD = \{z : y = f^*(x), x \leq x_*\}$, $AD = \{z : y = f^*(x), 0 \leq x \leq l\}$, BC – вільна межа (крива депресії), AD – непроникна підшва пласта, x_* – шукана абсциса точки C .

Як і раніше, процес витіснення описуємо законом Дарсі $\vec{v} = \kappa_f \cdot \text{grad } \varphi$ і рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [12], де $\kappa_f = \kappa/\mu_n$ – коефіцієнт фільтрації, κ – коефіцієнт проникності пласта, μ_n – динамічна в'язкість нафти в пластових умовах, а для потенціалу швидкості $\varphi = \varphi(x, y)$ задані умови $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$

, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{AD} = 0$, $\varphi|_{BC} = g(y)$, $H \geq y \geq y_* = f^*(x_*)$ ($g(y)$ – деяка монотонно спадна функція: $g(H) = \varphi_*$, $g(y_*) = \varphi^*$, H – ефективна товщина пласта).

Задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ з невідомою витратою Q має вигляд [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa_f \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{BC} = g(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad}(y(\varphi_*, \psi) - f_*(x(\varphi_*, \psi))) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad}(y(\varphi, 0) - f^*(x(\varphi, 0))) = 0, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot \text{grad}(y(\varphi^*, \psi) - f^*(x(\varphi^*, \psi))) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } \psi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \end{array} \right.$$

а обернена до неї на конформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ зводиться до задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ y(\varphi_*, \psi) &= f_*(x(\varphi_*, \psi)), \quad y(\varphi^*, \psi) = f^*(x(\varphi^*, \psi)), \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, 0) &= f^*(x(\varphi, 0)), \quad y(\varphi, Q) = g^{-1}(\varphi), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} &= 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0,$$

$$v_x = \frac{\kappa_f}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\kappa_f}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad Q = \int_0^Q \frac{\kappa_f}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi.$$

Різницевий аналог задачі (2.30) при $g(y) = -y$ у сітковій області G_ω^γ має вигляд:

$$\begin{aligned} \gamma^2 (\dot{\kappa}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \dot{\kappa}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})}{\dot{\kappa}_{i+1/2,j}} - \\ - \frac{(x_{i,j} - x_{i-1,j})}{\dot{\kappa}_{i-1/2,j}} = 0, \quad \gamma^2 (\dot{\kappa}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \dot{\kappa}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \\ + \frac{(y_{i+1,j} - y_{i,j})}{\dot{\kappa}_{i+1/2,j}} - \frac{(y_{i,j} - y_{i-1,j})}{\dot{\kappa}_{i-1/2,j}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
y_{0,j} &= f_*(x_{0,j}), \quad y_{m+1,j} = f^*(x_{m+1,j}), \quad j = \overline{0, n+1}, \\
y_{i,0} &= f_*(x_{i,0}), \quad y_{i,n+1} = -\varphi_i, \quad i = \overline{0, m+1}, \\
f_*'(x_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + (x_{1,j} - x_{0,j}) &= 0, \\
f_*'(x_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + (x_{m,j} - x_{m+1,j}) &= 0, \quad j = \overline{0, n+1},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
&f_*'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) + (x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \\
&(x_{i+1, n+1} - x_{i, n+1})(y_{i+1, n+1} - y_{i, n+1}) + (x_{i, n} - x_{i, n+1})(y_{i, n} - y_{i, n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\
&\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}, \quad Q = \Delta_\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
(\nu_x, \nu_y)_{i,j} &= 2\kappa_{i,j} \Delta_\psi J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}, x_{i+1,j} - x_{i-1,j}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \\
(\nu_x, \nu_y)_{0,j} &= 2\kappa_{0,j} \Delta_\psi J_{0,j}^{-1}(y_{1,j} - y_{0,j}, x_{1,j} - x_{0,j}), \quad j = \overline{1, n}, \\
(\nu_x, \nu_y)_{i, n+1} &= \kappa_{i, n+1} \Delta_\psi J_{i, n+1}^{-1}(y_{i+1, n+1} - y_{i-1, n+1}, x_{i+1, n+1} - x_{i-1, n+1}), \quad i = \overline{1, m}, \\
(\nu_x, \nu_y)_{m+1, j} &= 2\kappa_{m+1, j} \Delta_\psi J_{m+1, j}^{-1}(y_{m+1, j} - y_{m, j}, x_{m+1, j} - x_{m, j}), \quad j = \overline{1, n}, \\
(\nu_x, \nu_y)_{i, 0} &= \kappa_{i, 0} \Delta_\psi J_{i, 0}^{-1}(y_{i+1, 0} - y_{i-1, 0}, x_{i+1, 0} - x_{i-1, 0}), \quad i = \overline{1, m}, \\
(\nu_x, \nu_y)_{0, 0} &= \kappa_{0, 0} \Delta_\psi J_{0, 0}^{-1}(y_{1, 0} - y_{0, 0}, x_{1, 0} - x_{0, 0}), \\
(\nu_x, \nu_y)_{0, n+1} &= \kappa_{0, n+1} \Delta_\psi J_{0, n+1}^{-1}(y_{1, n+1} - y_{0, n+1}, x_{1, n+1} - x_{0, n+1}), \\
(\nu_x, \nu_y)_{m+1, n+1} &= \kappa_{m+1, n+1} \Delta_\psi J_{m+1, n+1}^{-1}(y_{m+1, n+1} - y_{m, n+1}, x_{m+1, n+1} - x_{m, n+1}), \\
(\nu_x, \nu_y)_{m+1, 0} &= \kappa_{m+1, 0} \Delta_\psi J_{m+1, 0}^{-1}(y_{m+1, 0} - y_{m, 0}, x_{m+1, 0} - x_{m, 0}),
\end{aligned} \tag{2.34}$$

де $\gamma_{i,j}$, $J_{i,j}$, $J_{0,j}$, $J_{i,n+1}$, $J_{m+1,j}$, $J_{i,0}$, $J_{0,0}$, $J_{0,n+1}$, $J_{m+1,n+1}$, $J_{m+1,0}$ – визначаються як в (2.12), (2.21), $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\kappa_{i,j} = \kappa_f(\varphi_i, \psi_j)$, $\dot{\kappa}_{i,j+1/2} = \kappa_f\left(\frac{x_{i,j+1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j}}{2}\right)$, $\dot{\kappa}_{i,j-1/2} = \kappa_f\left(\frac{x_{i,j} + x_{i,j-1}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2}\right)$, $\dot{\kappa}_{i+1/2,j} = \kappa_f\left(\frac{x_{i+1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i+1,j} + y_{i,j}}{2}\right)$, $\dot{\kappa}_{i-1/2,j} = \kappa_f\left(\frac{x_{i,j} + x_{i-1,j}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i-1,j}}{2}\right)$.

Алгоритм числового розв'язання різницевої задачі (2.31)–(2.34) при $\kappa = const$, як і раніше, конструємо з використанням формул сумарних зображень (2.15)–(2.19), що є розв'язками різницевих рівнянь Лапласа, а також методу блочної ітерації шляхом поетапної параметризації значень γ та Q ,

координат граничних та внутрішніх вузлів динамічної сітки.

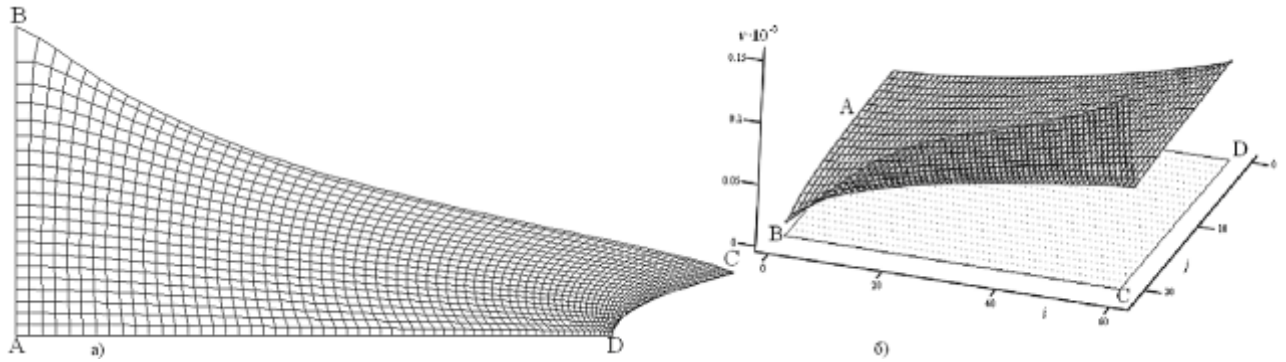


Рис. 2.15. Динамічна сітка в області $G_z^{(18)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

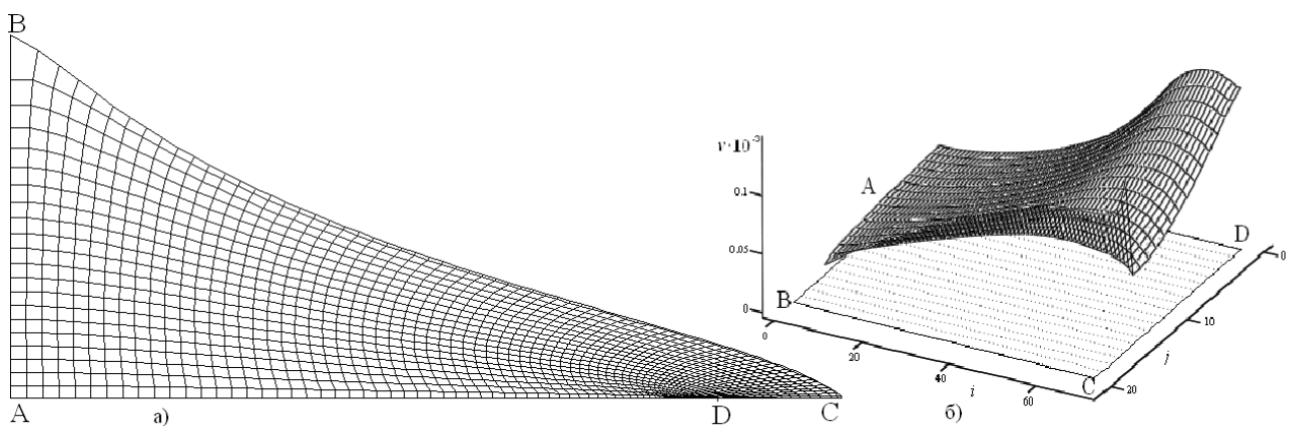


Рис. 2.16. Динамічна сітка в області $G_z^{(19)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

Результати розрахунків за цим алгоритмом при розбитті області $m \times n = 70 \times 20$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, модельних параметрах елемента пласта-колектора $H = 10$ м, $l = 20$ м і заданих $\kappa_f = 10^{-3} \text{ мм}^2 / \text{Па} \cdot \text{с}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$ подано на рис. 2.15 і рис. 2.16 для областей $G_z^{(18)}$: $AD = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, y = 0\}$, $CD = \{(x, y) : y = \sqrt{x-l}, l \leq x \leq x_*\}$, $AB = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\}$, і $G_z^{(19)}$: $AD = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, y = 0\}$, $AB = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\}$, $CD = \{(x, y) : y = 0, l \leq x \leq x_*\}$. Знайдено значення фільтраційної витрати $Q = 0,023501 \text{ м}^3 / \text{добу}$ і $Q = 0,022982 \text{ м}^3 / \text{добу}$ та координати точки С $(23.946, 1.986)$ і $(23.423, 0)$ (для областей $G_z^{(18)}$ і $G_z^{(19)}$ відповідно).

2.3. Синтез ЧМКА та СЗ при математичному моделюванні процесів витіснення для тризв'язних LEF-областей

Розроблену методику на основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень адаптовано також до розв'язання нелінійних крайових задач для тризв'язних криволінійних LEF-областей, обмежених двома екіпотенціальними лініями і непроникним контуром, що моделюють процеси витіснення (фільтрації) у нафтогазовому пласті з двома свердловинами.

Розглянемо стаціонарний процес витіснення, породжений взаємодією нагнітальної та експлуатаційної свердловин у продуктивному пласті, де для спрощення викладок вважатимемо, що витісняюча речовина і речовина, що видобувається, мають однакові фізичні та механічні властивості, який, як і в п. 2.2, описуватимемо рівняннями $\vec{v} = \kappa_f \cdot \text{grad } \varphi$ і $\text{div } \vec{v} = 0$.

Область фільтрації визначимо як тризв'язну криволінійну LEF-область G_z , що обмежена непроникним зовнішнім контуром $L = \{z : f(x, y) = 0\}$ і двома внутрішніми контурами свердловин – екіпотенціальними лініями $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, на яких задані умови $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_L = 0$, де n – зовнішня нормаль до L (рис. 2.17).

Використовуючи методи комплексного аналізу [12], вводимо комплексно спряжену до φ функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, а задачу на побудову динамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати, поля швидкостей та інших характерних фільтраційних параметрів зводимо до задачі на конформне відображення заданої криволінійної LEF-області на прямокутну область комплексного квазіпотенціалу. При цьому, для однозначної побудови такого відображення, на відміну від двозв'язних областей, де умовний розріз робився вздовж вибраної лінії течії (будь-якої) і існування та єдиність розв'язку задачі забезпечувались знаходженням невідомої висоти прямокутника Q – повної витрати [12], у випадку описаної вище тризв'язної області необхідно здійснити два умовні розрізи Γ_* і Γ^* області G_z вздовж таких ліній течії (що є лініями розділення течії), які однозначно визначаються точками “призупинки” потоку

$H_* = \bar{B} = \underline{B} = (x_*, y_*) \in L$ і $H^* = \bar{C} = \underline{C} = (x^*, y^*) \in L$.

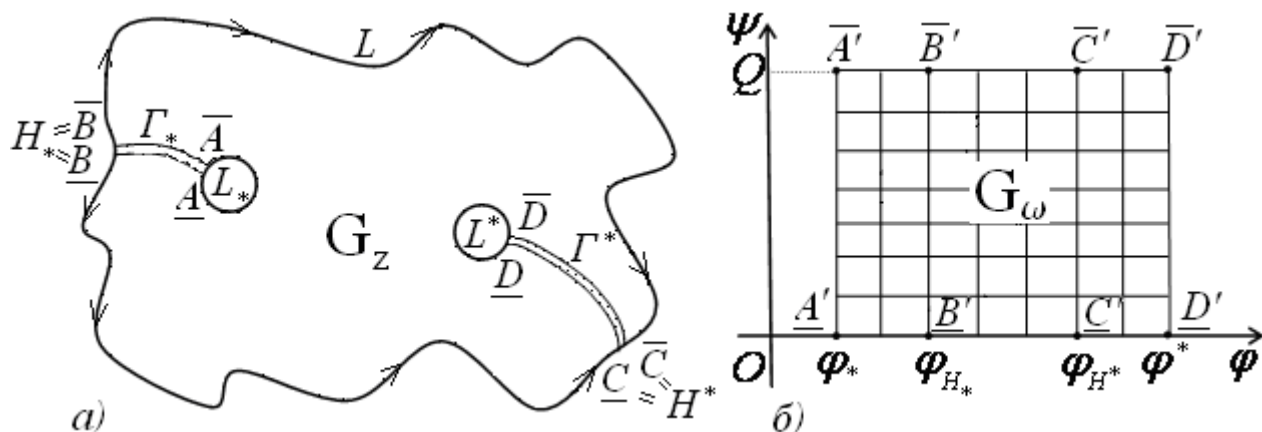


Рис. 2.17. Схема трив'язної LEF-області типу "нагнітальна-експлуатаційна свердловина" (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б)

Задача на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області $G_z^\Gamma = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу G_ω з трьома невідомими параметрами – фільтраційною витратою $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ і координатами точок H_* та H^* – записується у вигляді [43]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa_f \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, & (x, y) \in G_z^\Gamma, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, & \varphi|_{L^*} = \varphi^*, & \psi|_{\underline{AD}} = 0, & \psi|_{\overline{AD}} = \oint_{L_*} -\kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \\ v(x_*, y_*) = 0, & v(x^*, y^*) = 0, \end{cases}$$

(2.35)

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$.

Обернена до (2.35) крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^Γ при невідомій витраті Q та умовних розрізах Γ_* , Γ^* має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_f \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa_f \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi_{H_*}, \quad \varphi_{H^*} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \nu(x(\varphi_{H_*}, 0), y(\varphi_{H_*}, 0)) = 0, \quad \nu(x(\varphi_{H_*}, Q), y(\varphi_{H_*}, Q)) = 0, \\ \nu(x(\varphi_{H^*}, 0), y(\varphi_{H^*}, 0)) = 0, \quad \nu(x(\varphi_{H^*}, Q), y(\varphi_{H^*}, Q)) = 0, \end{array} \right. \quad (2.36)$$

а з урахуванням диференціальних рівнянь для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ та уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх “роздвоєння” при переході від області G_z до G_ω) і формул для обчислення компонент швидкості (2.27) є еквівалентною задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi_{H_*}, \quad \varphi_{H^*} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \Xi(\varphi_{H_*}, 0) = \Xi(\varphi_{H_*}, Q) = \Xi(\varphi_{H^*}, 0) = \Xi(\varphi_{H^*}, Q) = 0, \\ Q = \int_0^Q \frac{\kappa_f}{J(\varphi, \psi)} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$$\text{де } \Xi(\varphi, \psi) = \frac{\kappa_f}{J(\varphi, \psi)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2};$$

$\varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}$ – значення потенціалу в шуканих точках H_* і H^* відповідно.

Для побудови різницевого аналога задачі (2.37) в області комплексного потенціалу конструємо ортогональну сітку і замінюємо G_ω сітковою областю

$$G_\omega^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + \Delta_{\varphi_1} \cdot i, & \Delta_{\varphi_1} = \frac{\varphi_{H^*} - \varphi_*}{m_1 + 1}, \quad i = \overline{0, m_1}, \\ \varphi_{H^*} + \Delta_{\varphi_2} \cdot (i - m_1), & \Delta_{\varphi_2} = \frac{\varphi_{H^*} - \varphi_{H^*}}{m_2 - m_1 - 1}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ \varphi_{H^*} + \Delta_{\varphi_3} \cdot (i - m_2), & \Delta_{\varphi_3} = \frac{\varphi^* - \varphi_{H^*}}{m - m_2}, \quad i = \overline{m_2 + 1, m + 1}, \end{cases} \right.$$

$\psi_j = \Delta_\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n + 1}, \quad \Delta_\psi = \frac{Q}{n + 1}, \quad m_1, m_2, m, n \in \mathbf{N}$

а крайові умови, умови періодичності на розрізах і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок границі фізичної області – різницевиими аналогами:

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n + 1}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & f(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1}, & i = \overline{0, m_1}, \quad i = \overline{m_2 + 1, m + 1}, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + \\ + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j})(y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2}) \times \\ \times (y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \quad (3x_{i,n} + x_{i,n-2} - 4x_{i,n-1})(x_{i+1,n} - x_{i-1,n}) + \\ + (3y_{i,n} + y_{i,n-2} - 4y_{i,n-1})(y_{i+1,n} - y_{i-1,n}) = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Величини квазіконформних інваріантів $\gamma_\sigma = \Delta_{\varphi\sigma} / \Delta_\psi, \quad \sigma = \overline{1, 3}$ отримуємо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1 = \frac{1}{(m_1 + 1)(n + 1)} \sum_{i,j=0}^{m_1-1,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{(m_2 - m_1 - 1)(n + 1)} \sum_{i=m_1+1,j=0}^{m_2-1,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{(m - m_2)(n + 1)} \sum_{i=m_2+1,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}, \quad (2.40)$$

де $\kappa_{i,j} = \kappa_f(\varphi_i, \psi_j)$; $\gamma_{i,j}$ визначається (2.12).

Невідому фільтраційну витрату Q та значення потенціалів $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$ шукаємо в процесі ітераційних розрахунків за формулами:

$$Q = \frac{(n+1)}{3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\Delta_{\varphi\sigma}}{\gamma_{\sigma}}, \quad \varphi_{H^*} = \varphi_* + m_1 \Delta_{\varphi 1}, \quad \varphi_{H^*} = \varphi^* - m_2 \Delta_{\varphi 3}. \quad (2.41)$$

Диференціальні рівняння задачі (2.37) при $\kappa_f = 1$ у внутрішніх вузлах сіткової області G_{ω}^{γ} апроксимуємо, як і раніше, різницевиими рівняннями:

$$\begin{aligned} x_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_{\sigma}^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma_{\sigma}^2(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) &= 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_{\sigma}^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma_{\sigma}^2(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) &= 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

розв'язки яких при фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомих величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (або шуканої витрати Q і значеннях $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$) та функцій x і y у граничних вузлах сіткової області $x_{0,j}, y_{0,j}, x_{m+1,j}, y_{m+1,j}, x_{i,n+1}, y_{i,n+1}, x_{i,0}, y_{i,0}$ з урахуванням крайових умов (2.38) визначаємо за формулами сумарних зображень:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \gamma_{\sigma}^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \gamma_{\sigma}^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\text{де } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sigma = \begin{cases} 1, & \text{при } i = \overline{0, m_1}, \\ 2, & \text{при } i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ 3, & \text{при } i = \overline{m_2 + 1, m + 1}. \end{cases}$$

Значення величини швидкості знаходимо за (2.34).

Алгоритм розв'язання поставленої задачі в загальному вигляді може бути описаний так. Задаємо кількість вузлів розбиття сіткової області m_1, m_2, m, n , параметри точності $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ та бажаний рівень конформності відображення δ_* . Задаємо нульове наближення невідомих величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ і знаходимо $Q, \varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$ за формулами:

$$Q = \frac{n \cdot (\varphi^* - \varphi_*)}{m_1 \gamma_1 + (m_2 - m_1) \gamma_2 + (m - m_2) \gamma_3}, \quad \varphi_{H^*} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha} \varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \varphi_{H^*} = \frac{\tilde{\beta} \varphi_* + \varphi^*}{1 + \tilde{\beta}},$$

$$\text{де } \tilde{\alpha} = \frac{m_1 \gamma_1}{(m_2 - m_1) \gamma_2 + (m - m_2) \gamma_3}, \quad \tilde{\beta} = \frac{(m - m_2) \gamma_3}{m_1 \gamma_1 + (m_2 - m_1) \gamma_2}.$$

Також задаємо початкові наближення координат граничних вузлів динамічної сітки так, щоб виконувались крайові умови (2.38), і обчислюємо початкові наближення координат внутрішніх вузлів за формулами сумарних зображень (2.43), знаходимо нові значення $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Q$ і $\varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}$ за формулами (2.40)–(2.41). Розраховуємо значення величини швидкості за (2.34) і уточнюємо значення m_1, m_2 . Після цього перераховуємо координати граничних вузлів за (2.38)–(2.39), знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки за (2.43), знову обчислюємо $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Q, \varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}$ за формулами (2.40)–(2.41) і, якщо зміна Q за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Наприкінці кожної ітерації перевіряємо також виконання умов стабілізації координат граничних вузлів: якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену ітерацію більша за ε_2 , то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і розраховуємо матрицю величини швидкості та оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення.

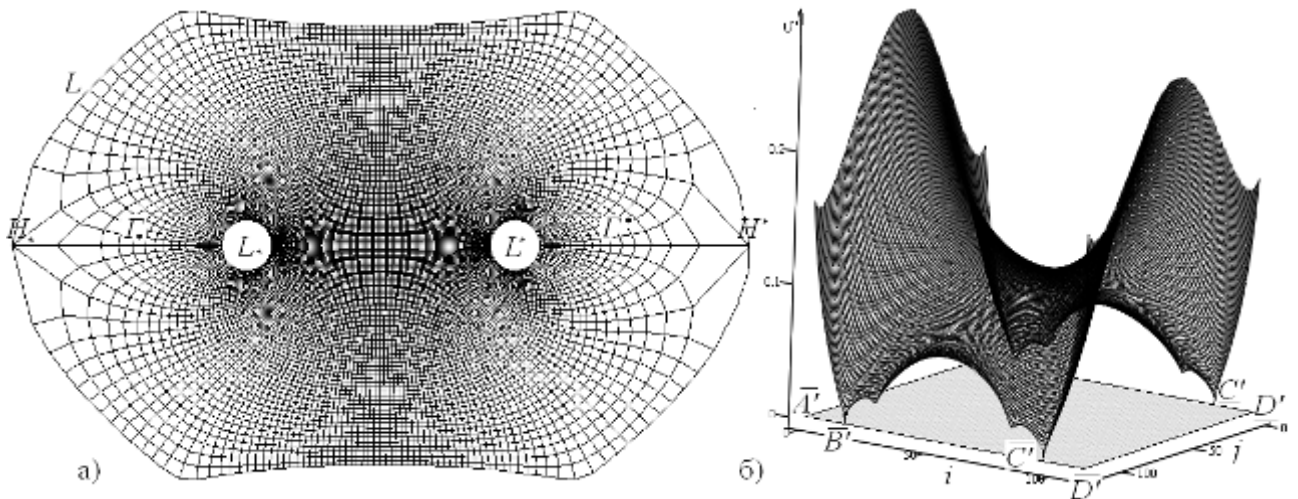


Рис. 2.18. Динамічна сітка в області $G_z^{(20)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного квазіпотенціалу (б)

Результати тестового розрахунку за наведеним алгоритмом подані на рис. 2.18. Область $G_z^{(20)}$ обмежена контуром $L = \{x + iy : x = 10 \cos \tau + \cos 5\tau, y = 8 \sin \tau + 1.5 \sin 3\tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ і еквіпотенціалами $L_* = \{x + iy : x = 0.75 \cos \tau - 4, y = 0.75 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = 0.75 \cos \tau + 4, y = 0.75 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ із заданими на них граничними потенціалами $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$ відповідно. При

розбитті області $15 \times 80 \times 15 \times 120$ отримано $Q = 1.12495$, $x_* = -10$, $y_* = 0$,
 $x^* = 10$, $y^* = 0$.

2.4. Системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів для багатозв'язних криволінійних LEF-областей

У роботах [40–43] запропоновано підхід до моделювання фільтраційних процесів (процесів витіснення у нафтогазових пластах) для тризв'язних областей, обмежених екіпотенціальними лініями (двома свердловинами та зовнішнім контуром живлення), а також для чотиризв'язних областей, обмежених екіпотенціальними лініями (три свердловини у горизонтальному пласті) та лініями течії (які визначаються шуканими точками “призупинки” на зовнішньому непроникному контурі), з використанням математичного апарату комплексного аналізу. Також у цих роботах на основі евристичних міркувань з наступним логічним обґрунтуванням встановлено можливі випадки формування течії в залежності від співвідношення значень граничних потенціалів і розроблено процедури автоматизованого вибору відповідного випадку. Запропоновано алгоритм розв'язання таких задач, що дає можливість будувати динамічні сітки, знаходити лінії розділу течії і обчислювати значення швидкості та величини різного роду перетоків, який апробовано для окремих проміжних та ключових випадків. Такий підхід зумовлює необхідність для кожного з випадків окремо будувати алгоритм числового розв'язання відповідної задачі, виконавши перед тим, так званий, “алгоритм вибору випадку” (що полягає у розв'язуванні двох допоміжних (ключових) задач).

Не зважаючи на складність квазіконформних відображень багатозв'язних LEF-областей, яка полягає у неповній визначеності вигляду області комплексного квазіпотенціалу (що залежить від впливу багатьох чинників: конфігурації фізичної області, зокрема, взаємного розміщення свердловин, способів проведення умовних розрізів з метою зведення багатозв'язної області до однозв'язної, співвідношення значень граничних потенціалів тощо), у всіх випадках формування течії область комплексного квазіпотенціалу може бути багатокутником, сторони якого паралельні осям координат, а, отже, може розглядатися як сукупність, певним чином, “склеєних” між собою

прямокутників. Це дозволяє у повній мірі використати переваги методу сумарних зображень для знаходження розв'язків відповідних задач.

У цій роботі пропонується дещо інший підхід до класифікації випадків формування течії, що дозволяє уніфікувати для всіх випадків постановки задач на обернення квазіконформних відображень, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання, а також поєднання методів квазіконформних відображень з числово-аналітичними методами сумарних зображень. У даному параграфі методика математичного моделювання квазіідеальних полів, що базується на синтезі числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень, поширена на випадки тризв'язної криволінійної LEF-області, обмеженої трьома екіпотенціальними лініями, і чотиризв'язної криволінійної LEF-області, обмеженої трьома екіпотенціальними лініями та непроникним контуром, що моделюють роботу відповідно двох чи трьох свердловин у пласті. Нелінійна крайова задача, що виникає при цьому, зводиться до обернення квазіконформного відображення даної області із умовними розрізами вздовж деяких ліній течії (ліній розділу течії, які знаходяться в процесі розв'язання задачі) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу, побудова якої, загалом, є неоднозначною. Ця проблема вирішена шляхом спеціального проведення умовних розрізів і подання області комплексного квазіпотенціалу як об'єднання чотирьох суміжних прямокутників.

Розглядається стаціонарний процес витіснення, що описується рівняннями $\vec{v} = \kappa_f \cdot \text{grad } \varphi$ і $\text{div } \vec{v} = 0$, у криволінійній LEF-області G_z , яка є тризв'язною, обмеженою замкнутими екіпотенціальними лініями – двома внутрішніми контурами свердловин L_1, L_2 і зовнішнім контуром живлення L_3 (випадок Т), чи чотиризв'язною, обмеженою трьома екіпотенціальними лініями (контурами свердловин) $L_s = \{z : f_s(x, y) = 0\}$ ($s = 1, 2, 3$) та непроникним контуром $L = \{z : f(x, y) = 0\}$ (випадок Ч), із заданими на екіпотенціалах відповідними граничними потенціалами: $\varphi|_{L_s} = \Phi_s$ ($s = 1, 2, 3$).

Якщо у попередніх параграфах відповідна область комплексного квазіпотенціалу є прямокутником з невідомою висотою і однозначно визначається значенням повної витрати (поток через відповідну екіпотенціальну лінію) $Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy$, то для заданої криволінійної області з трьома екіпотенціалами відповідна область комплексного

квазіпотенціалу набуває різної геометричної конфігурації в залежності від співвідношення між граничними потенціалами $\Phi_s, s = \overline{1,3}$. Проте, у всіх цих випадках існує квазіконформне відображення, при якому відповідна область комплексного квазіпотенціалу є багатокутником, “складеним” з прямокутників, набір варіантів формування течії є аналогічним, і однозначний вибір такого варіанту (а отже, і єдиність відповідного квазіконформного відображення) визначається значеннями витрат (потоків чи перетоків) через еквіпотенціали L_s : $Q_s = \int_{L_s} -v_y dx + v_x dy$ ($s = \overline{1,3}$) і невідомого потенціалу φ_H точки H , через яку проходять лінії розділу течії (випадок Т, рис. 2.19) та додатково потенціалів $\varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}$ точок “призупинки” потоку H_* і H^* відповідно на контурі L (випадок Ч, рис. 2.21).

Зробивши умовний розріз $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ вздовж невідомих ліній розділу течії, що проходять через шукану точку H (випадок Т) та точки H_*, H^* (випадок Ч), і отримавши однозв’язну область $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$ та ввівши, аналогічно до [12], функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, квазіконформно спряжену до φ , приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z^Γ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу. При цьому вигляд області комплексного квазіпотенціалу відрізняється для різних випадків формування течії, що залежать від співвідношень між граничними потенціалами (наприклад, у роботі [43] наведено 9 таких випадків і вигляд області комплексного квазіпотенціалу для кожного із них за умов, що $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \Phi_3$; у роботі [42] – 23 випадки, за умов $\Phi_1 < \Phi_3$, а Φ_2 – довільне тощо). Проте, якщо подати відповідну область комплексного квазіпотенціалу як об’єднання чотирьох суміжних прямокутників, то усі випадки формування течії зводяться до трьох ситуаційних станів, що принципово відрізняються між собою, і при цьому не робиться жодних обмежень на співвідношення між граничними потенціалами.

Позначимо: $\varphi_* = \min_s \Phi_s, \varphi^* = \max_s \Phi_s$ ($s = \overline{1,3}$), $\varphi_0 = \sum_{s=1}^3 \Phi_s - (\varphi_* + \varphi^*)$; L_*, L^*, L_0 – відповідні цим потенціалам контури L_s ; Q_*, Q^*, Q_0 – величини потоків Q_s через контури L_*, L^*, L_0 відповідно. Тоді маємо три різні

конфігурації області комплексного квазіпотенціалу, що відповідають таким випадкам: 1) $Q_*^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ – відсутність перетоку між контурами L^* , L_0 (рис. 2.20 а, 2.21 а'), 2) $Q_0^0 = 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$ – відсутність перетоку між контурами L^* , L_0 (рис. 2.20 б, 2.21 б'), 3) $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ – наявність перетоків між усіма контурами (рис. 2.20 в, в', 2.21 в', в"). При цьому єдиність розв'язку відповідних задач забезпечується визначенням для тризв'язної області трьох невідомих параметрів: двох значень витрат і значення потенціалу φ_H точки розділу течії (для випадків 1 і 3) або трьох значень витрат (для випадку 2), а для чотиризв'язної області – додатково ще двох значень потенціалів φ_{H_*} , φ_{H^*} точок “призупинки” потоку H_* і H^* на контурі L .

На рис. 2.19 наведені схеми формування течії, що відповідають цим випадкам (1 – рис. 2.19 а, а', а"; 2 – рис. 2.19 б, б', б"; 3 – рис. 2.19 в, в', в") і моделюють ситуації, коли є дві нагнітальні свердловини (рис. 2.19 а, б), дві експлуатаційні свердловини (рис. 2.19 б', в') і нагнітальна та експлуатаційна свердловини (рис. 2.19 а', а", б", в, в").

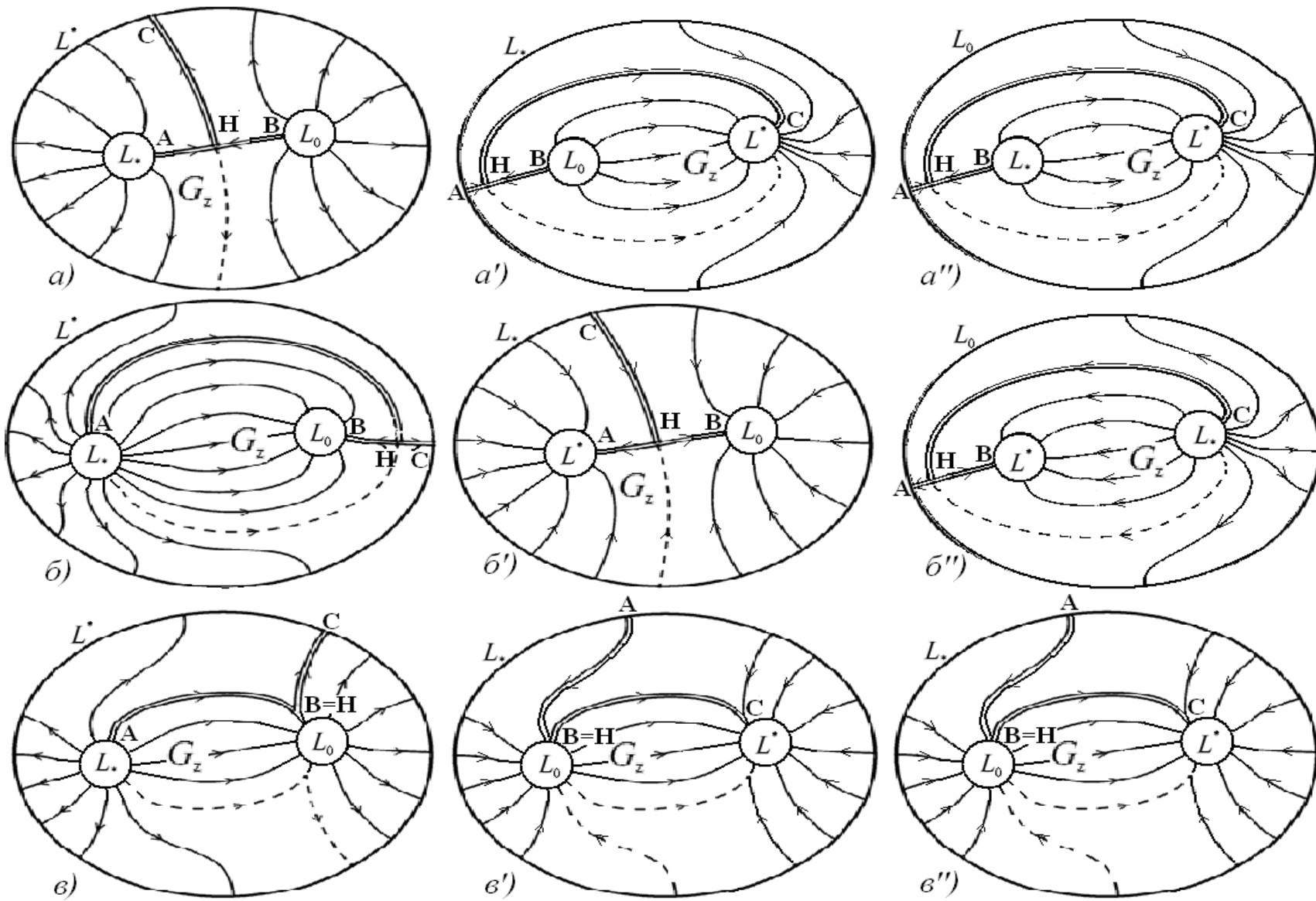


Рис. 2.19. Схеми формування течії для тривз'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_*^0 = 0$ (а, а', а''), 2) $Q_0^* = 0$ (б, б', б''),
3) $Q_*^0 > 0, Q_0^* > 0$ (в, в', в'')

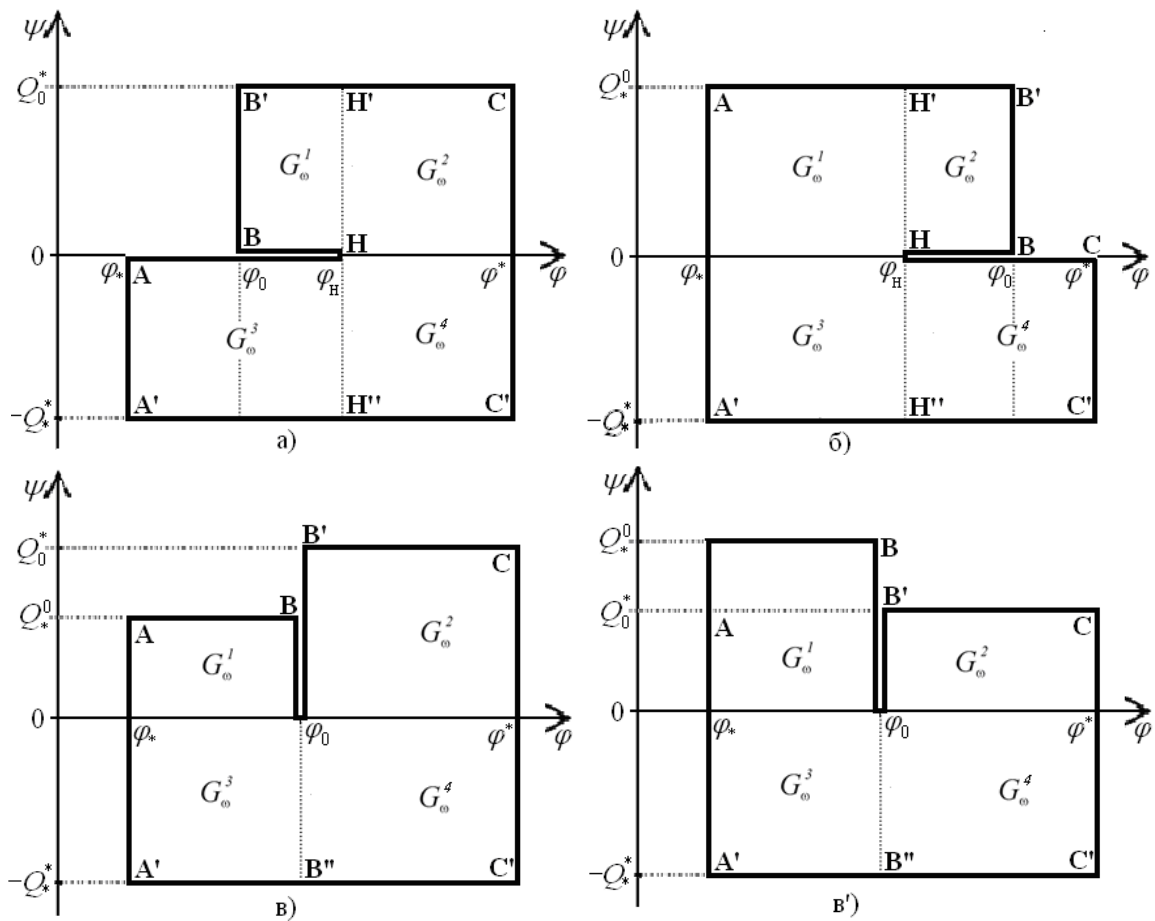


Рис. 2.20. Конфігурації області комплексного квазіпотенціалу для тризв'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_0^* = 0$ (а), 2) $Q_0^* = 0$ (б), 3) $Q_*^* > 0, Q_0^* > 0$ (в, в')

Такий підхід до класифікації способів формування течії та задання області комплексного потенціалу є суттєво іншим, ніж у [40–43], і дозволяє уніфікувати постановки задач, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання.

Загалом область комплексного квазіпотенціалу має вигляд: $G_\omega = \bigcup_{k=1}^4 G_\omega^k$, $G_\omega^k = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_*^{(k)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(k)}, 0 \leq \psi \leq Q^{(k)}\}$, де $\varphi_*^{(1)} = \varphi_*^{(2)} = \varphi_*^{(3)} = \varphi_*^{(4)} = \varphi_H$, $\varphi_*^{(3)} = \varphi_*$, $\varphi_*^{(4)} = \varphi^*$, $\varphi_*^{(1)} = \begin{cases} \varphi_*, & Q_*^0 \neq 0, \\ \varphi_0, & Q_*^0 = 0, \end{cases}$ $\varphi_*^{(2)} = \begin{cases} \varphi^*, & Q_0^* \neq 0, \\ \varphi_0, & Q_0^* = 0, \end{cases}$ $Q^{(1)} = \begin{cases} Q_*^0, & Q_*^0 \neq 0, \\ Q_0^*, & Q_*^0 = 0, \end{cases}$ $Q^{(2)} = \begin{cases} Q_0^*, & Q_0^* \neq 0, \\ Q_*^0, & Q_0^* = 0, \end{cases}$ $Q^{(3)} = Q^{(4)} = Q_*^*$ (рис. 2.21,

рис. 2.21 а', б', в', в'). Такий опис області комплексного квазіпотенціалу, взагалі кажучи, є неоднозначним, оскільки не відомі величини потоків Q_*^* , Q_*^0 , Q_0^* , але враховуючи монотонно-зростаючу залежність Q_s від потенціалів Φ_s і знаючи граничні потенціали можна припустити, у більшості випадків, яким буде

співвідношення перетоків між контурами ще до числового розв'язування задач.

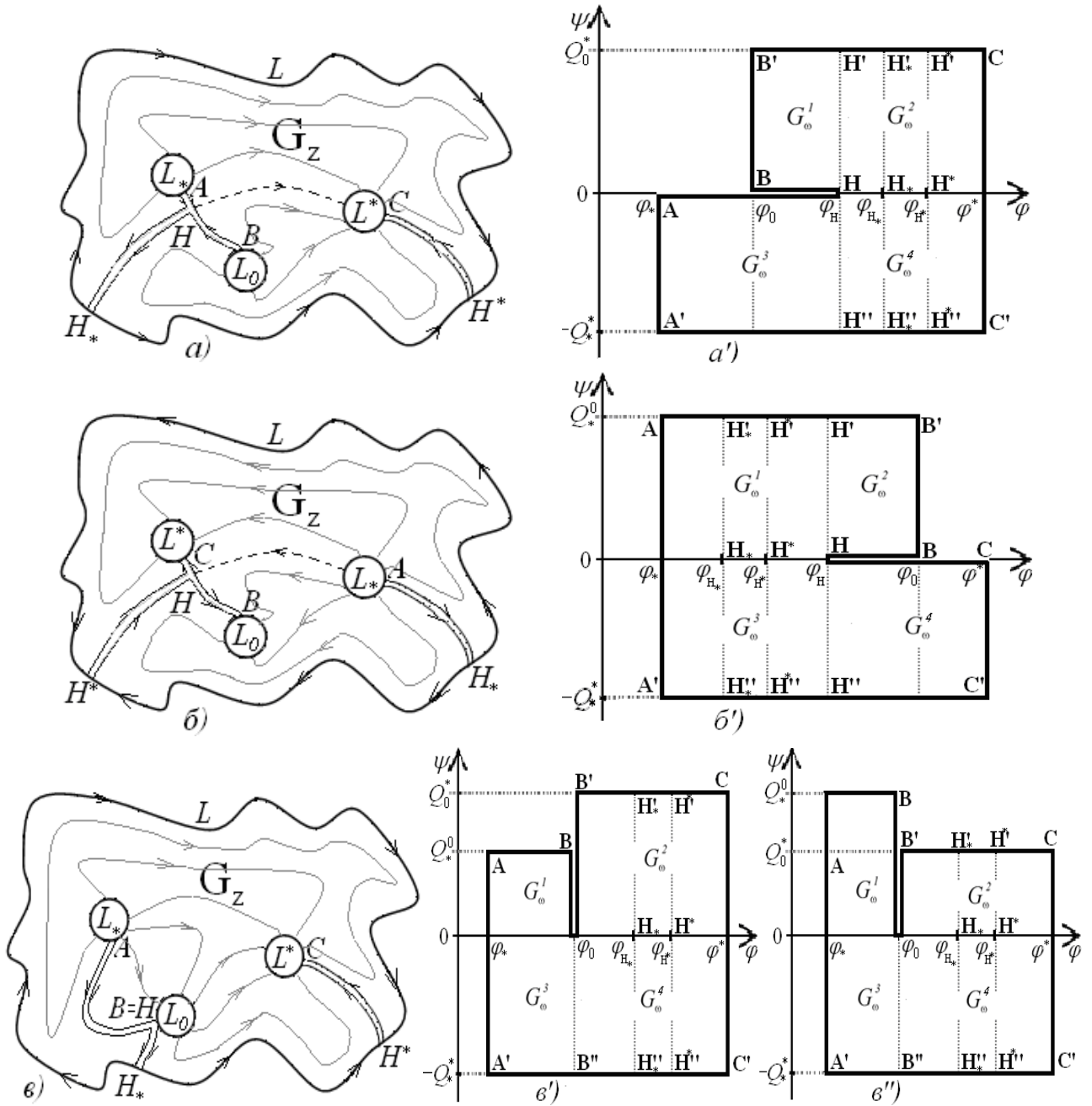


Рис. 2.21. Схеми формування течії (а, б, в) і конфігурації відповідної області комплексного квазіпотенціалу (а', б', в', в'') для чотириз'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_*^0 = 0$ (а, а'), 2) $Q_*^0 = 0$ (б, б'), 3) $Q_*^0 > 0, Q_0^* > 0$ (в, в', в'')

Відповідні задачі у підобластях G_ω^k ($k = \overline{1,4}$) на обернене квазіконформне відображення області G_ω на G_z^Γ зводяться до задач типу (2.37), де крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сітки до границі та умови “роздвоєння” і періодичності на розрізах мають вигляд:

$$\begin{aligned}
f_*(x(\varphi_*^{(3)}, \psi), y(\varphi_*^{(3)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(3)}, \\
f^*(x(\varphi_*^{(4)}, \psi), y(\varphi_*^{(4)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(4)}, \\
\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_s} &= 0, \quad s = \overline{1,3},
\end{aligned}$$

у випадку 1 ($Q_*^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$):

$$\begin{aligned}
f_0(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)}, \\
f^*(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(1)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(1)}), \quad \varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}, \\
x(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} &= x(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \quad y(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} = y(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \\
x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \\
x(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} &= x(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \\
y(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} &= y(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \\
x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(3)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(3)}), \quad \varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}, \\
x(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} &= x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \quad y(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}};
\end{aligned}$$

у випадку 2 ($Q_*^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$\begin{aligned}
f_*(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)}, \\
f_0(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
x(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} &= x(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \quad y(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} = y(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \\
x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \\
x(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} &= x(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \\
y(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} &= y(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \\
x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(2)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(2)}), \quad \varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}, \\
x(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} &= x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \quad y(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \\
x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(4)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(4)}), \quad \varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)};
\end{aligned}$$

у випадку 3 ($Q_*^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$\begin{aligned}
& f_*(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) = 0, \quad f_0(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)}, \\
& f_0(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
& x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} = x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \\
& \quad x(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} = x(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \\
& \quad y(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)}} = y(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)}}, \\
& x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \\
& \quad x(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = x(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \\
& \quad y(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = y(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \\
& x(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \quad y(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}.
\end{aligned}$$

Тут $f_* = f_s$, якщо $\varphi_* = \varphi_s$, $f^* = f_s$, якщо $\varphi^* = \varphi_s$, $f_0 = f_s$, якщо $\varphi_0 = \varphi_s$ ($s = 1, 2, 3$).

В області G_ω визначимо ортогональну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_*^{(1)} + i \cdot \Delta_{\varphi 1}, i = \overline{0, m_1}, \\ \varphi_*^{(2)} + (i - m_1) \cdot \Delta_{\varphi 2}, i = \overline{m_1 + 1, m + 1}, \\ \varphi_*^{(3)} + i \cdot \Delta_{\varphi 3}, i = \overline{0, m_3}, \\ \varphi_*^{(4)} + (i - m_2) \cdot \Delta_{\varphi 4}, i = \overline{m_3 + 1, m + 1}, \end{cases} \quad \psi_j = \begin{cases} j \cdot \Delta_{\psi 1}, j = \overline{0, n_1 + 1}, \\ j \cdot \Delta_{\psi 2}, j = \overline{0, n_2 + 1}, \\ j \cdot \Delta_{\psi 3}, j = \overline{0, n_3 + 1}, \\ j \cdot \Delta_{\psi 4}, j = \overline{0, n_4 + 1}, \end{cases}$$

$$m_2 = m - m_1,$$

$$m_4 = m - m_3,$$

$$\Delta_{\varphi k} = \frac{\varphi_*^{(k)} - \varphi_*^{(k)}}{m_k + 1}, \quad 2n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4, \quad \Delta_{\psi k} = \frac{Q^{(k)}}{n_k + 1}, \quad \gamma_k = \frac{\Delta_{\varphi k}}{\Delta_{\psi k}},$$

$m, m_1, m_3, n, n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N}$, $k = \overline{1, 4}$.

Різницеві аналоги крайових умов, умов ортогональності ліній динамічної сітки до границі та умов “роздвоєння” і періодичності на розрізах мають вигляд у випадку 1 ($Q_*^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$):

$$f_0(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, f'_{0x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f'_{0y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, j = \overline{1, n_1},$$

$$x_{m_1+1,j}^{(1)} = x_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad y_{m_1+1,j}^{(1)} = y_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, \min(n_1, n_2)},$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,n_1+1}^{(1)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,n_1+1}^{(1)}, \quad i = \overline{1, m_1},$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i,n_2}^{(2)} = x_{i,n_4}^{(4)}, \quad y_{i,n_2}^{(2)} = y_{i,n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m},$$

$$f^*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, f'^*_{0x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - f'^*_{0y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, j = \overline{1, n_3},$$

$$x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},$$

$$x_{i,0}^{(3)} = x_{i,n_3+1}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(3)} = y_{i,n_3+1}^{(3)}, \quad i = \overline{1, m_3},$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4};$$

у випадку 2 ($Q_0^* = 0, Q_0^0 > 0, Q_0^* > 0$):

$$f^*(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, f'^*_{0x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f'^*_{0y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, j = \overline{1, n_1},$$

$$x_{m_1+1,j}^{(1)} = x_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad y_{m_1+1,j}^{(1)} = y_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, \min(n_1, n_2)},$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,0}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,0}^{(3)}, \quad x_{i,n_1}^{(1)} = x_{i,n_3}^{(3)}, \quad y_{i,n_1}^{(1)} = y_{i,n_3}^{(3)}, \quad i = \overline{1, \min(m_1, m_3)},$$

$$f'_{0x}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f'_{0y}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_0(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,n_2+1}^{(2)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,n_2+1}^{(2)}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m},$$

$$f^*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, f'^*_{0x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - f'^*_{0y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, j = \overline{1, n_3},$$

$$x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},$$

$$x_{i,0}^{(4)} = x_{i,n_4+1}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(4)} = y_{i,n_4+1}^{(4)}, \quad i = \overline{m_3 + 1, m},$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4};$$

у випадку 3 ($Q_*^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$\begin{aligned} f_*(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f'_{*y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, \\ f'_{0x}(x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)})(y_{m_1,j}^{(1)} - y_{m_1+1,j}^{(1)}) - f'_{0y}(x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)})(x_{m_1,j}^{(1)} - x_{m_1+1,j}^{(1)}) = 0, \\ f_0(x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \end{aligned}$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,0}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,0}^{(3)}, \quad x_{i,n_1}^{(1)} = x_{i,n_3}^{(3)}, \quad y_{i,n_1}^{(1)} = y_{i,n_3}^{(3)}, \quad i = \overline{1, \min(m_1, m_3)},$$

$$f'_{0x}(x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)})(y_{m_1,j}^{(2)} - y_{m_1+1,j}^{(2)}) - f'_{0y}(x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)})(x_{m_1,j}^{(2)} - x_{m_1+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_0(x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)}) = 0, \quad f^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i,n_2}^{(2)} = x_{i,n_4}^{(4)}, \quad y_{i,n_2}^{(2)} = y_{i,n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m},$$

$$f_*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3},$$

$$x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4},$$

де $x_{i,j}^{(k)} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(k)} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{\gamma(k)}$, $k = \overline{1, 4}$.

Як приклад числових розрахунків зроблено обчислення для одного з варіантів формування течії у трив'язній LEF-області (рис. 2.22), що обмежена трьома еквіпотенціалами – двома контурами експлуатаційних свердловин L_* , L_0 з потенціалами φ_* , φ_0 і еліптичним контуром їх живлення $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos(t), y = 6 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалом $\varphi^* = 1$. На рис. 2.22 а, б зображені розраховані динамічні сітки за наявності двох симетрично розміщених свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) - 3, y = 0.3 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) + 3, y = 0.3 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ у випадках з однаковими потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (рис. 2.23 а) і різними потенціалами $\varphi_* = 0$, $\varphi_0 = 0.2$ (рис. 2.23 б). При цьому, розраховані витрати свердловин складають $Q_*^* = Q_0^* = 1.90504$ і $Q_*^* = 1.94942$, $Q_0^* = 1.08008$ відповідно. На рис. 2.23 в наведена динамічна сітка для свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) - 3, y = 0.3 \sin(t) - 1.5, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) + 3, y = 0.3 \sin(t) + 1.5, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (отримано $Q_*^* = Q_0^* = 1.99013$), на

рис. 2.23 г – динамічна сітка для свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) - 2.5, y = 0.3 \sin(t) - 1, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) + 2.5, y = 0.3 \sin(t) + 1, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = 0.3$, $\varphi_0 = 0$ (отримано $Q_*^* = 0.59339$, $Q_0^* = 1.7718$). На рис. 2.23 г, 2.23 ж маємо випадки не симетричного розміщення свердловин різних діаметрів: $L_* = \{x + iy : x = 0.2 \cos(t) - 2.5, y = 0.2 \sin(t) + 2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) + 3.5, y = 0.3 \sin(t) + 0.5, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (рис. 2.23 г) і $\varphi_* = 0$, $\varphi_0 = 0.2$ (рис. 2.23 ж). Отримані витрати становлять $Q_*^* = Q_0^* = 1.84901$ і $Q_*^* = 1.98889$, $Q_0^* = 0.98397$ відповідно.

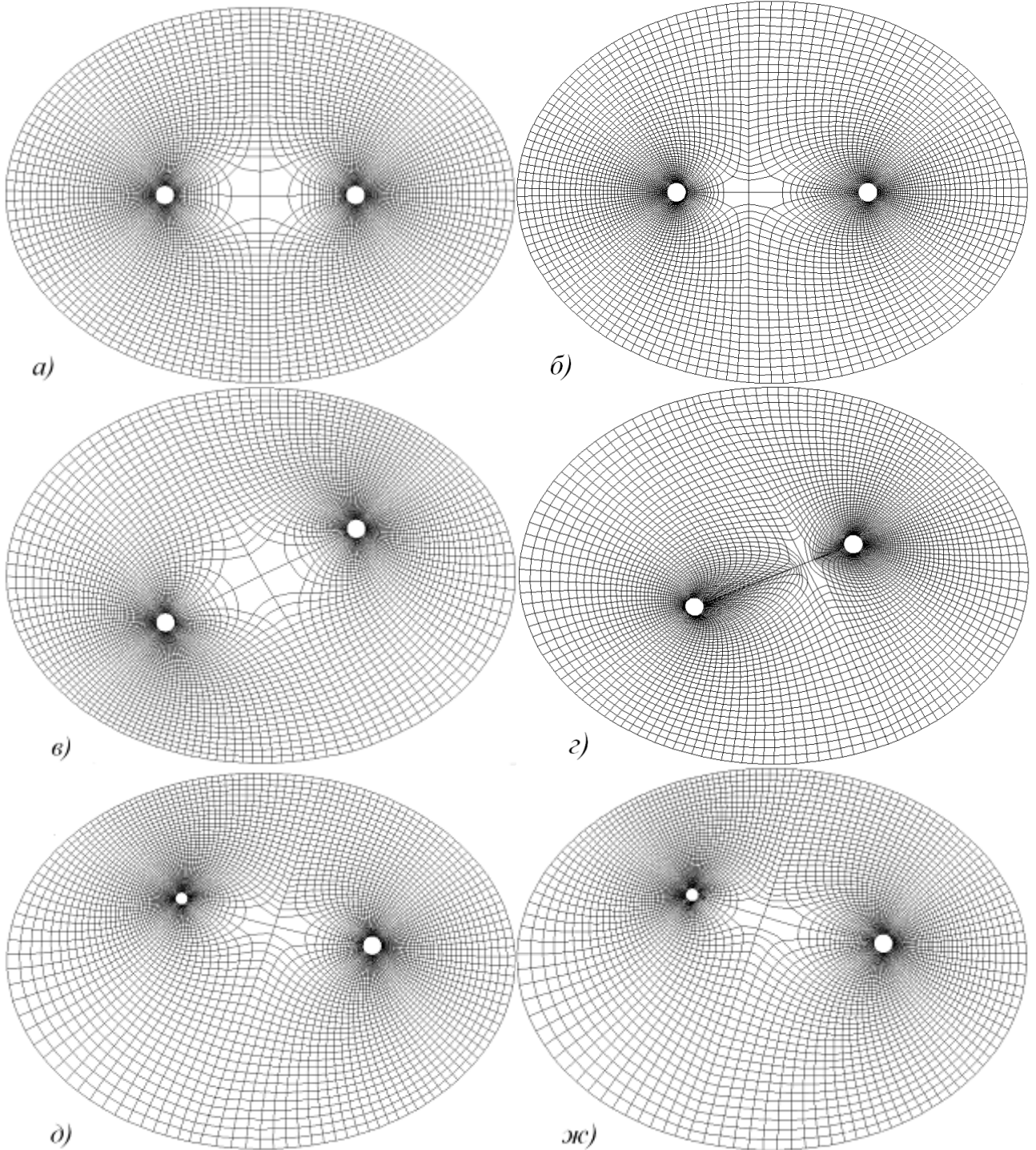


Рис. 2.22. Розраховані динамічні сітки

2.5. Висновки до другого розділу

1. Розроблено методику розв'язування крайових задач, що описують фільтраційні процеси для криволінійних одно-, дво- та багатозв'язних LEF-областей і LEF-областей з вільними ділянками меж, на основі синтезу числових методів конформних відображень і сумарних зображень. Запропоновано підхід до вирішення проблеми неоднозначності побудови області комплексного квазіпотенціалу для багатозв'язних LEF-областей.

2. Вперше методи сумарних зображень застосовані як компоненти розроблених раніше (на основі комплексного аналізу) обчислювальних процедур. Поєднання методів комплексного аналізу (обернень конформних відображень) і методів сумарних зображень для наближення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки дозволило суттєво покращити існуючі методики розв'язання такого класу задач, підвищити ефективність (швидкість збіжності) відповідного ітераційного процесу, оскільки, вирішило проблему відшукування необхідної точності початкового наближення шуканих функцій, а також дало можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і всіх граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки, а тому значно пришвидшило досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

3. Створено обчислювальну технологію розв'язування відповідних нелінійних крайових задач для систем еліптичних диференціальних рівнянь основи синтезу методів сумарних зображень і поетапної фіксації характеристик середовища та процесу, яка реалізована у вигляді пакетів прикладних програм для подальшого комп'ютерного моделювання, що автоматично вирішує проблему побудови динамічних сіток і поля величини швидкості, розрахунку інших невідомих параметрів моделі.

4. Проведені числові експерименти показали, що при різних значеннях параметрів розбиття області розрахункові значення величини повної витрати практично співпадають, а це підтверджує обчислювальну стійкість алгоритму. Покращити нев'язку конформності можна не лише за рахунок збільшення кількості вузлів розбиття області, а й шляхом зміни співвідношення $n \times m$, яке доцільно задавати так, щоб виконувалася умова $\gamma \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

РОЗДІЛ 3

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ
ВИТІСНЕННЯ У ГОРИЗОНТАЛЬНИХ НАФТОГАЗОВИХ
LEF-ПЛАСТАХ**

У розділі розроблено підхід до моделювання нелінійних процесів витіснення (одно- та двофазної фільтрації) у неоднорідних малопроникних нафтогазових (чи ущільнених, сланцевих) деформівних пластах (LEF-пластах, геометрія зон неоднорідності яких наперед невідома) з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища. Побудовано методуку та обчислювальну технологію розв'язання відповідних крайових задач для нелінійно-шаруватих, нелінійно двоякошаруватих, нелінійно-неоднорідних та анізотропних одно-, дво- та трив'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями і лініями течії, на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами чи числово-аналітичних узагальнень методів сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца.

3.1. Синтез ЧМКА, СЗ та декомпозиції області (ДО) моделювання процесів витіснення у нелінійно-шаруватих LEF-пластах

Як відзначено у першому розділі, для детального вивчення особливостей протікання фільтраційних процесів у нафтогазових (сланцевих) пластах у роботі використано просторово двовимірні математичні моделі. Вважатимемо, що потужність розроблюваних продуктивних пластів, які досліджуються у цьому розділі, значно менша за їх протяжність по довжині, експлуатаційні і нагнітальні свердловини досконалі по ступеню і характеру розкриття пласта, а тому фільтрацію можна розглядати як плоску, а відповідні задачі – як просторово двовимірні з усередненими по потужності $H = H(x, y)$ параметрами:

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{H} \int_{-z_H}^{z_H} K(x, y, z) dz, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{H} \int_{-z_H}^{z_H} \Phi(x, y, z) dz,$$

де $K(x, y, z)$, $\Phi(x, y, z)$ – проникність і потенціал (тиск, напір) пласта,

$\kappa(x, y)$, $\varphi(x, y)$ – відповідні усереднені характеристики.

Також важливою, як уже зазначалося, є проблема моделювання зворотнього впливу процесу витіснення вуглеводнів із неоднорідних нафтогазових покладів на вихідні характеристики середовища, яка полягає в адекватному математичному описі змін фільтраційно-ємнісних характеристик пластів, що відбуваються в процесі експлуатації свердловин. Так, в окремих зонах пори породи можуть закупорюватися механічними домішками, парафінами чи смолистими речовинами, проходить процес утворення і накопичення осаду завислих частинок (кольматаж), що призводить до зменшення коефіцієнта проникності і пористості середовища. Як правило, у навколосвердловинних зонах є багато тріщин, розміри яких у значній мірі залежать від режиму роботи свердловин і суттєво впливають на проникність пласта. Окрім цього, у присвердловинних зонах може відбуватися зміна фільтраційних характеристик породи за рахунок переміщення (вимивання) дрібних її частинок (суфозії), що також зумовлює зміну проникності середовища.

Запропонована у попередньому розділі методика моделювання ідеальних полів для криволінійних одно-, дво- та багатозв'язних LEF-областей на основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень у цьому параграфі поширена на нелінійні задачі для двозв'язних криволінійних LEF-областей – математичні моделі стаціонарного процесу витіснення вуглеводнів із шаруватих нафтогазових пластів, провідність яких задається кусково-сталими функціями, залежними від шуканого квазіпотенціалу. Такі середовища тут називатимемо нелінійно-шаруватими. Побудована відповідна обчислювальна технологія [16, 25–29, 34], що базується на поєднанні числових методів квазіконформних (“кусково-конформних”) відображень і сумарних зображень з ідеєю альтернуючого методу Шварца, при створенні якої використані прийоми декомпозиції задачі, що були розроблені і застосовані у п. 1.4, та синтез ЧМКА і СЗ із п. 2.1.

Числово-аналітичні методи сумарних зображень, як уже зазначалося, є добре адаптованими до комп'ютерної реалізації, дозволяють уникати накопичення обчислювальних похибок [127–128]. Окрім цього, у роботах, зокрема, І.І. Ляшка, А.А. Глущенко, О.Ю. Грищенко, А.П. Кузьменка (див., напр., [62–63, 90–101, 108, 111]) розглянуті моделі шарувато-неоднорідних

середовищ і виведені формули сумарних зображень, що є розв'язками крайових задач для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами у випадках однієї (чи двох) ліній розділу. Обмеження застосування методів сумарних зображень для криволінійних областей, як і у попередньому розділі, тут “зняте” шляхом переходу від прямих задач на знаходження комплексного потенціалу поля до обернених (на знаходження характеристичної функції течії), оскільки у даному випадку відповідні області комплексних потенціалів є об'єднанням прямокутників з горизонтальними та вертикальними ділянками меж.

Декомпозиція області на підобласті з “накладками” (кожна підобласть містить по два прошарки сталості коефіцієнта проникності середовища; кожен прошарок, окрім крайніх, є частиною двох сусідніх підобластей) [52, 116] за альтернуючим методом Шварца дає можливість ефективно “склеювати” розв'язок у випадку великої кількості ліній розриву параметра задачі (коефіцієнта проникності), а також – розпаралелювати обчислювальний процес. Використання цього методу для декомпозиції області дозволяє також вирішити проблему значних співвідношень у розмірах області (оскільки алгоритм розв'язання вихідної задачі зводиться до розв'язання послідовності задач для більш “зручних” підобластей).

У цьому параграфі розроблена методика викладена на прикладі розв'язання нелінійної крайової задачі для двозв'язної обмеженої екіпотенціальними лініями LEF-області – шаруватого середовища – з кусково-сталім коефіцієнтом проникності та невідомими лініями розділу шарів, що зводиться до обернення квазіконформного (“кусково-конформного”) відображення даної області із умовним розрізом вздовж деякої лінії течії (яка знаходиться в процесі розв'язання задачі) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу, яка складається із суміжних прямокутників з невідомою висотою (повною фільтраційною витратою). У результаті розв'язування задачі автоматично вирішується проблема вибору вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомих ліній розділу шарів сталості коефіцієнта проникності середовища, обчислення повної витрати та розрахунку поля величини швидкості.

Розглянемо задачу розрахунку характерних параметрів стаціонарної ізотермічної фільтрації у нелінійно-шаруватому горизонтальному нафтовому LEF-пласті з однією свердловиною. Вона зводиться до задачі знаходження

кусково-гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (квазіпотенціалу) в області

$$G_z = \left(\bigcup_{l=1}^s G_z^{(l)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{s-1} L_z^{(l)} \right), \quad G_z^{(l)} = \{z \in G_z : \varphi^{(l-1)} < \varphi < \varphi^{(l)}\}, \quad L_z^{(l)} = \{z \in G_z : \varphi = \varphi^{(l)}\}$$

, обмеженій двома гладкими замкненими лініями: контуром свердловини $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і контуром живлення $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, що у кожній із підобластей $G_z^{(l)}$ задовольняє рівняння

$$\operatorname{div}(\kappa_f \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (3.1)$$

і крайові умови $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, де коефіцієнт фільтрації $\kappa_f = \kappa(\varphi)/\mu_n$, а функція $\kappa(\varphi(x, y))$, що характеризує проникність середовища і його схильність до деформації, має вигляд:

$$\kappa(\varphi(x, y)) = \begin{cases} \kappa_1, & \varphi^{(0)} = \varphi_* < \varphi \leq \varphi^{(1)}, \\ \kappa_2, & \varphi^{(1)} < \varphi \leq \varphi^{(2)}, \\ \dots & \\ \kappa_l, & \varphi^{(l-1)} < \varphi \leq \varphi^{(l)}, \\ \dots & \\ \kappa_s, & \varphi^{(s-1)} < \varphi \leq \varphi^{(s)} = \varphi^*. \end{cases}$$

Тут κ_l ($l = \overline{1, s}$) – дійсні додатні числа, а вздовж шуканих ліній розриву $L_z^{(l)}$ функції $\kappa(\varphi(x, y))$ задані умови спряження:

$$\left[\varphi \right]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, s-1}.$$

Як і в п. 2.1, ввівши, аналогічно [12], функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до φ , зафіксувавши на внутрішньому контурі L_* деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне (“кусково-конформне”) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ утвореної при цьому однозв’язної області $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} =$

$$= \left(\bigcup_{l=1}^s G_\omega^{(l)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{s-1} L_\omega^{(l)} \right), \quad G_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(l-1)} < \varphi < \varphi^{(l)}, 0 < \psi < Q\}, \quad L_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega :$$

$\varphi = \varphi^{(l)}\}$ з невідомим параметром (повною фільтраційною витратою)

$$Q = \int_{L^*} -\frac{\kappa}{\mu_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\kappa}{\mu_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\kappa(\varphi(x, y))}{\mu_n} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\kappa(\varphi(x, y))}{\mu_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^\Gamma, \\ \kappa(\varphi(x, y)) = \kappa_l, \quad (x, y) \in G_z^{(l)}, \quad [\varphi]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, s}, \\ \varphi|_{L^*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = Q. \end{array} \right.$$

(3.2)

Обернена до (3.2) (з урахуванням формул переходу (2.2)) нелінійна крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^Γ при невідомій витраті Q та розрізі Γ , що має вигляд:

$$\frac{\kappa(\varphi(x, y))}{\mu_n} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\kappa(\varphi(x, y))}{\mu_n} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^{(l)},$$

$$\kappa(\varphi(x, y)) = \kappa_l, \quad l = \overline{1, s}, \quad [(x, y)]_{\varphi=\varphi^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, s-1},$$

$$\left[\frac{1}{\kappa(\varphi(x, y))} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(l)}} = \left[\frac{1}{\kappa(\varphi(x, y))} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, s-1},$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0,$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi},$$

$$Q = \int_0^Q \frac{\kappa}{\mu_n J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi$$

(3.3)

зводиться до розв'язування в $G_\omega^{(l)}$ рівнянь Лапласа $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$, $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$ при заданих умовах “склеювання” вздовж ліній $\varphi = \varphi^{(l)}$ ($l = \overline{1, s-1}$), крайових умовах та умовах періодичності вздовж розрізу Γ , умовах ортогональності ліній течії до відповідних ділянок границі фізичної області та умовах ортогональності екіпотенціальних ліній до розрізу.

Для знаходження розв'язку поставленої задачі в області комплексного

квазіпотенціалу визначимо рівномірну сіткову область $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^s G_\omega^{\gamma(l)}$ так, щоб

відповідні вузли належали лініям розділу $\varphi = \varphi^{(l)}$ ($l = \overline{1, s-1}$):

$$G_\omega^{\gamma(l)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi^{(l-1)} + \Delta_\varphi \cdot (i - i_l), i = \overline{i_{l-1}, i_l}, i_0 = 0, i_s = m + 1; \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, \right. \\ \left. j = \overline{0, n+1}; m, n \in \mathbf{N}, \Delta_\varphi = \frac{\varphi^{(l)} - \varphi^{(l-1)}}{i_l - i_{l-1}}, \Delta_\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_\psi} \right\}.$$

Рівняння Лапласа у внутрішніх вузлах сіткових прямокутників $G_\omega^{\gamma(l)}$ апроксимуємо різницевиими рівняннями з відповідними умовами спряження вздовж ліній $L_z^{(l)}$ розриву $\kappa(\varphi(x, y))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}_\gamma x_{i,j}^{(l)} = 0, \quad \mathbb{L}_\gamma y_{i,j}^{(l)} = 0, \quad i = \overline{i_l+1, i_{l+1}-1}, \quad l = \overline{1, s}, \\ x_{i,j}^{(l-1)} = x_{i,j}^{(l)}, \quad y_{i,j}^{(l-1)} = y_{i,j}^{(l)}, \\ \kappa_l(x_{i,j}^{(l-1)} - x_{i-1,j}^{(l-1)}) = \kappa_{l-1}(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}), \\ \kappa_l(y_{i,j}^{(l-1)} - y_{i-1,j}^{(l-1)}) = \kappa_{l-1}(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}), \quad l = \overline{1, s-1}, \quad j = \overline{1, n}, \end{array} \right.$$

(3.4)

де $x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{\gamma(l)}$, $l = \overline{1, s}$.

Різницеві аналоги крайових умов та умов ортогональності мають вигляд:

$$f^*(x_{i_0,j}^{(0)}, y_{i_0,j}^{(0)}) = 0, \quad f^*(x_{i_s,j}^{(s)}, y_{i_s,j}^{(s)}) = 0, \\ (4x_{i_0+1,j}^{(0)} - 3x_{i_0,j}^{(0)} - x_{i_0+2,j}^{(0)})(x_{i_0,j+1}^{(0)} - x_{i_0,j-1}^{(0)}) + (4y_{i_0+1,j}^{(0)} - 3y_{i_0,j}^{(0)} - y_{i_0+2,j}^{(0)}) \times \\ \times (y_{i_0,j+1}^{(0)} - y_{i_0,j-1}^{(0)}) = 0, \quad (3x_{i_s,j}^{(s)} + x_{i_s-2,j}^{(s)} - 4x_{i_s-1,j}^{(s)})(x_{i_s,j+1}^{(s)} - x_{i_s,j-1}^{(s)}) + \\ + (3y_{i_s,j}^{(s)} + y_{i_s-2,j}^{(s)} - 4y_{i_s-1,j}^{(s)})(y_{i_s,j+1}^{(s)} - y_{i_s,j-1}^{(s)}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{i,0}^{(l)} = \alpha(x_{i+1,0}^{(l)} + x_{i-1,0}^{(l)}) + \beta(x_{i,1}^{(l)} + x_{i,n}^{(l)}) + 0.05(x_{i-1,1}^{(l)} + x_{i+1,1}^{(l)} + x_{i-1,n}^{(l)} + x_{i+1,n}^{(l)}), \\ y_{i,0}^{(l)} = \alpha(y_{i+1,0}^{(l)} + y_{i-1,0}^{(l)}) + \beta(y_{i,1}^{(l)} + y_{i,n}^{(l)}) + 0.05(y_{i-1,1}^{(l)} + y_{i+1,1}^{(l)} + y_{i-1,n}^{(l)} + y_{i+1,n}^{(l)}) \\ \alpha = \frac{0.5\Delta_\psi^2 - 0.1\Delta_\varphi^2}{\Delta_\varphi^2 + \Delta_\psi^2}, \quad \beta = \frac{0.5\Delta_\varphi^2 - 0.1\Delta_\psi^2}{\Delta_\varphi^2 + \Delta_\psi^2}, \\ x_{i,n+1}^{(l)} = x_{i,0}^{(l)}, \quad y_{i,n+1}^{(l)} = y_{i,0}^{(l)}, \quad i = \overline{i_{l-1}+1, i_l-1}, \quad l = \overline{1, s}.$$

(3.5)

Квазіконформний інваріант γ , як і в пп. 2.1–2.2, отримаємо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{\mu_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{l=1}^s \gamma_{i,j}^{(l)}, \quad (3.6)$$

$$\gamma_{i,j}^{(l)} = \frac{1}{\kappa_l} \sum_{i=i_{l-1}+1, j=0}^{i_j-1, n} \left(\sqrt{(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)})^2} \right) \times \left(\sqrt{(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)})^2} \right)^{-1}.$$

Невідому фільтраційну витрату Q обчислюємо за формулою (2.13).

Розв'язки $x_{i,j}^{(l)}$, $y_{i,j}^{(l)}$ скінченно-різницевих рівнянь Лапласа (3.4) у внутрішніх вузлах сіткової області комплексного квазіпотенціалу (сукупності суміжних вздовж вертикальних ліній сіткових прямокутників) з урахуванням умов спряження знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами у багат шарових областях з вертикальними лініями розділу [108]. Для цього область G_ω^γ “розіб'ємо” на сіткові прямокутники з “накладками”: $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{s-1} \tilde{G}_l$, де $\tilde{G}_l = G_\omega^{\gamma^{(l)}} \cup G_\omega^{\gamma^{(l+1)}}$. Отримаємо $s-1$ підзадачу (проекцію задачі (3.5) стосовно підобластей \tilde{G}_l) [66, 102] для знаходження послідовностей сіткових функцій $\left(\left\{ \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \left\{ \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^{\infty} \right)$: $x_{i,j}^{(l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)}$, $y_{i,j}^{(l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)}$, де ξ – номер кроку ітераційного процесу методу Шварца.

Розв'язки цих підзадач подамо формулами сумарних зображень:

$$\tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^i a_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} \nu_k^i b_k^{(l)(\xi)} + \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i, g) h_{g,k}^{(x,l)} \right),$$

$$\tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^i c_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^i d_k^{(l)(\xi)} + \gamma^2 \sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i, g) h_{g,k}^{(y,l)} \right), \quad (3.7)$$

$$i = \overline{i_{l-1}+1, i_{l+1}-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, s-1},$$

де $\tilde{\kappa}_l = \kappa_l / \kappa_{l+1}$, $h_{g,k}^{(x,l)} = p_{1,k} x_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} x_{g,n+1}^{(l)}$, $h_{g,k}^{(y,l)} = p_{1,k} y_{g,0}^{(l)} + p_{n,k} y_{g,n+1}^{(l)}$,

елементи матриць $P = [p_{j,k}]_{j,k=1}^n$, $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$, $v^i = [v_k^i]_{k=1}^n$ обчислюються за (2.16)–(2.17),

системи рівнянь для визначення $a_k^{(l)(\xi)}$, $b_k^{(l)(\xi)}$, $c_k^{(l)(\xi)}$, $d_k^{(l)(\xi)}$ ($k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s-1}$):

$$\begin{cases} \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l-1}} a_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{i_{l-1}} b_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{x}_{i_{l-1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k^{(l)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l+1}} a_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{i_{l+1}} b_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{x}_{i_{l+1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k^{\prime(l)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l-1}} c_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{i_{l-1}} d_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{y}_{i_{l-1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k^{\prime\prime(l)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} \mu_k^{i_{l+1}} c_k^{(l)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{i_{l+1}} d_k^{(l)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{y}_{i_{l+1},j}^{(l)(\xi-1)} - S_k^{\prime\prime\prime(l)}, \end{cases}$$

($p_{j,k}^*$ ($j, k = \overline{1, n}$) – елементи матриці P^* , оберненої до P ,

$$\begin{aligned} S_k^{(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l-1}, g) h_{g,k}^{(x,l)}, & S_k^{\prime(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l+1}, g) h_{g,k}^{(x,l)}, \\ S_k^{\prime\prime(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l-1}, g) h_{g,k}^{(y,l)}, & S_k^{\prime\prime\prime(l)} &= \gamma^2 \sum_{g=i_{l-1}+1}^{i_{l+1}-1} \Phi(i_{l+1}, g) h_{g,k}^{(y,l)}, \end{aligned}$$

а функція $\Phi(i, g)$ має вигляд:

$$\Phi(i, g) = \left\{ \begin{array}{l} \left(v_k^{|i-g|} + \frac{1-\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{2i-i-g} \right) (\mu_k - v_k)^{-1}, \quad g = \overline{i_{l-1}+1, i_l-1}, \\ \left(v_k^{i-i} \right) (\mu_k - v_k)^{-1}, \quad g = i_l, \\ \left(\frac{2\tilde{\kappa}_l}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{g-i} \right) (\mu_k - v_k)^{-1}, \quad g = \overline{i_l+1, i_{l+1}-1}, \\ \left(\frac{2}{1+\tilde{\kappa}_l} v_k^{i-g} \right) (\mu_k - v_k)^{-1}, \quad g = \overline{i_{l-1}+1, i_l-1}, \\ \left(v_k^{i-i} \right) (\mu_k - v_k)^{-1}, \quad g = i_l, \\ \left(v_k^{|i-g|} + \frac{\tilde{\kappa}_l-1}{\tilde{\kappa}_l+1} v_k^{i+g-2i} \right) (\mu_k - v_k)^{-1}, \quad g = \overline{i_l+1, i_{l+1}-1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = \overline{i_{l-1}+1, i_l}, \\ \\ \\ \\ \\ i = \overline{i_l+1, i_{l+1}-1}, \end{array}$$

Алгоритм розв'язування скінченно-різницевої задачі (3.4)–(3.6), (2.13) будується аналогічно до викладеного в п.2.1 із додаванням елементів “декомпозиції” і “шаруватості” та, в загальних рисах, може бути описаний так.

Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів, критичні значення потенціалів на лініях розділу та відповідні значення коефіцієнта проникності. Задаємо кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ (так, щоб відповідні вузли лежали на лініях $\varphi_{i_l} = \varphi^{(l)}$ і $\gamma \approx 1$), параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень конформності відображення δ_* , нульове наближення невідомої величини γ (так, щоб значення $\Delta_\varphi \cdot (n+1)/\gamma$ не перевищувало шуканої витрати Q), початкові наближення координат граничних вузлів динамічної сітки $x_{0,j}^{(0)(0)}$, $y_{0,j}^{(0)(0)}$, $x_{m+1,j}^{(s)(0)}$, $y_{m+1,j}^{(s)(0)}$, $x_{i,n+1}^{(l)(0)}$, $y_{i,n+1}^{(l)(0)}$, $x_{i,0}^{(l)(0)}$, $y_{i,0}^{(l)(0)}$, так, щоб виконувались умови (3.5).

Наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(l)(k)}, y_{i,j}^{(l)(k)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку загальної ітерації) отримуємо як результат ітераційного процесу по ξ обчислення функцій $(\tilde{x}_{i,j}^{(l)(\xi)(k)}, \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)(k)})$ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s}$ за формулами (3.7), де, для спрощення викладок, номер кроку k загальної ітерації

опущено. При цьому, значення граничних вузлів у підобластях \tilde{G}_l визначатимемо як значення внутрішніх вузлів (вздовж відповідних вертикальних відрізків) сусідніх підобластей з “накладками”. Зазначимо, що достатньо провести щонайбільше $s+1$ ітерацію по ξ для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількарразове повторення цих обчислювальних процедур за подальшого уточнення інших параметрів задачі.

Далі за формулами (3.6), (2.13) обчислюємо значення квазіконформного інваріанта γ і повної витрати Q . Після цього “підправляємо” координати граничних вузлів (3.5), знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів шляхом ітераційного процесу по ξ в підобластях \tilde{G}_l за формулами сумарних зображень (3.7), знову уточнюємо γ та Q за (3.6), (2.13).

Умовою завершення роботи алгоритму є стабілізація координат граничних вузлів: якщо величина $S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(l)(k)} - x_{i,j}^{(l)(k-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(l)(k)} - y_{i,j}^{(l)(k-1)}\right)^2}$ ($i = 0, m+1, j = 0, n+1$) зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію більша за ε , то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення за формулами (2.20). Якщо розрахована динамічна сітка відповідає очікуваному ступеню точності, то обчислюємо швидкість фільтрації (витіснення) у вузлах динамічної сітки за різницевиими формулами ($v_{i,j}^{(l)} = v(x_{i,j}^{(l)}, y_{i,j}^{(l)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, s}$):

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{(l)} &= 2\Delta_\psi \kappa_l J_{i,j}^{-1} \sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}\right)^2}, \\ v_{0,j}^{(1)} &= 2\Delta_\psi \kappa_1 J_{0,j}^{-1} \sqrt{\left(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}\right)^2 + \left(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}\right)^2}, \\ v_{m+1,j}^{(s)} &= 2\Delta_\psi \kappa_s J_{m+1,j}^{-1} \sqrt{\left(x_{m+1,j}^{(s)} - x_{m,j}^{(s)}\right)^2 + \left(y_{m+1,j}^{(s)} - y_{m,j}^{(s)}\right)^2}, \\ v_{i,0}^{(l)} &= v_{i,n+1}^{(l)} = \Delta_\psi \kappa_l J_{i,0}^{-1} \sqrt{\left(x_{i+1,0}^{(l)} - x_{i-1,0}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,0}^{(l)} - y_{i-1,0}^{(l)}\right)^2}, \\ v_{0,0}^{(1)} &= v_{0,n+1}^{(1)} = \Delta_\psi \kappa_1 J_{0,0}^{-1} \sqrt{\left(x_{1,0}^{(1)} - x_{0,0}^{(1)}\right)^2 + \left(y_{1,0}^{(1)} - y_{0,0}^{(1)}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$v_{m+1,0}^{(s)} = v_{m+1,n+1}^{(s)} = \Delta_\psi \kappa_s J_{m+1,0}^{-1} \sqrt{\left(x_{m+1,0}^{(s)} - x_{m,0}^{(s)}\right)^2 + \left(y_{m+1,0}^{(s)} - y_{m,0}^{(s)}\right)^2},$$

де $J_{i,j} = (x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)})(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j-1}^{(l)}) - (x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j-1}^{(l)})(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)})$, $J_{0,j} = (x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)})(y_{0,j+1}^{(1)} - y_{0,j-1}^{(1)}) - (x_{0,j+1}^{(1)} - x_{0,j-1}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)})$, $J_{m+1,j} = (x_{m+1,j}^{(s)} - x_{m,j}^{(s)})(y_{m+1,j+1}^{(s)} - y_{m+1,j-1}^{(s)}) - (x_{m+1,j+1}^{(s)} - x_{m+1,j-1}^{(s)})(y_{m+1,j}^{(s)} - y_{m,j}^{(s)})$, $J_{i,0} = (x_{i+1,0}^{(l)} - x_{i-1,0}^{(l)})(y_{i,1}^{(l)} - y_{i,n}^{(l)}) - (x_{i,1}^{(l)} - x_{i,n}^{(l)})(y_{i+1,0}^{(l)} - y_{i-1,0}^{(l)})$, $J_{0,0} = (x_{1,0}^{(1)} - x_{0,0}^{(1)})(y_{0,1}^{(1)} - y_{0,n}^{(1)}) - (x_{0,1}^{(1)} - x_{0,n}^{(1)})(y_{1,0}^{(1)} - y_{0,0}^{(1)})$, $J_{m+1,0} = (x_{m+1,0}^{(s)} - x_{m,0}^{(s)})(y_{m+1,1}^{(s)} - y_{m+1,n}^{(s)}) - (x_{m+1,1}^{(s)} - x_{m+1,n}^{(s)})(y_{m+1,0}^{(s)} - y_{m,0}^{(s)})$.

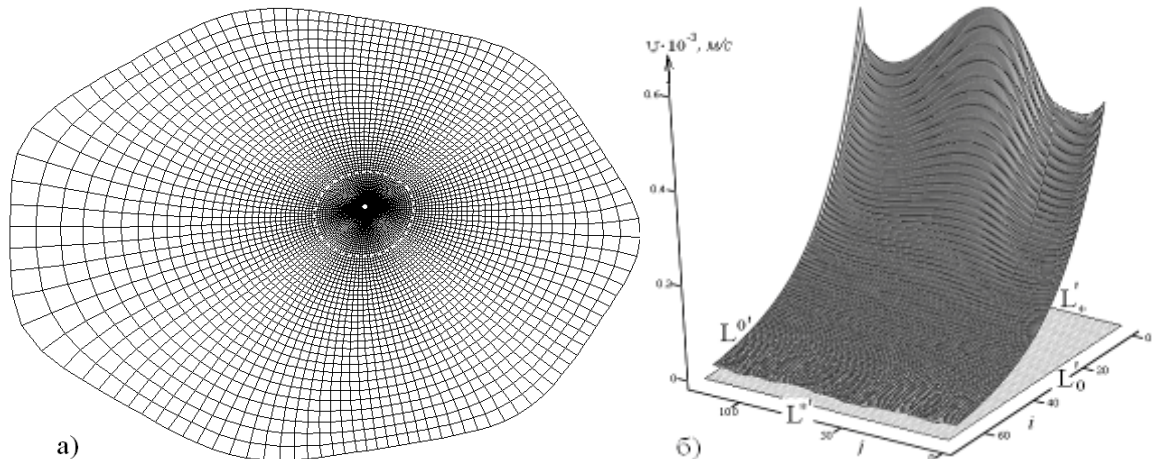


Рис. 3.1. Динамічна сітка при $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ (а) і поверхня величини швидкості(б)

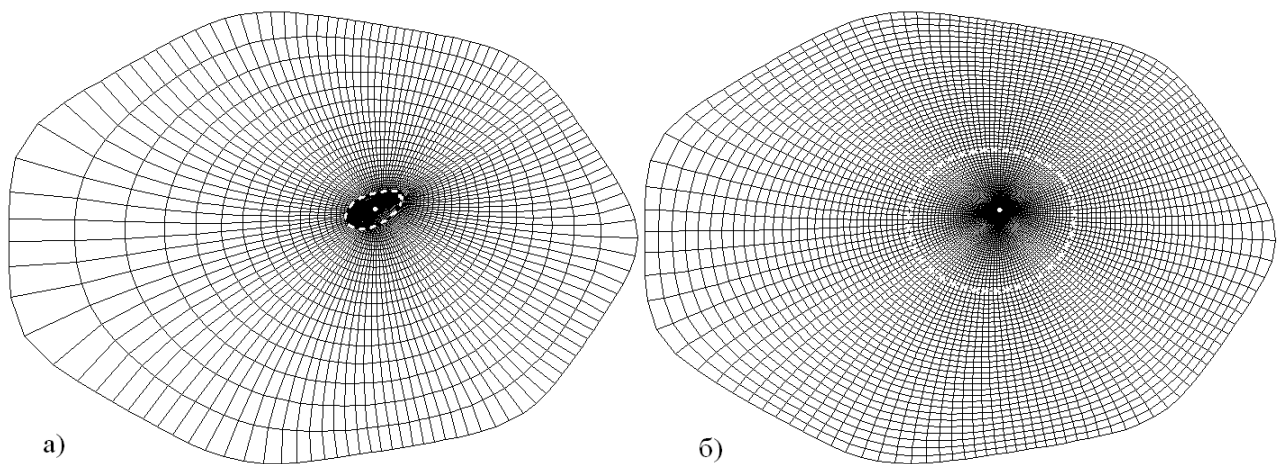


Рис. 3.2. Динамічні сітки при $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1.5$ (а) і $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0.5$ (б)

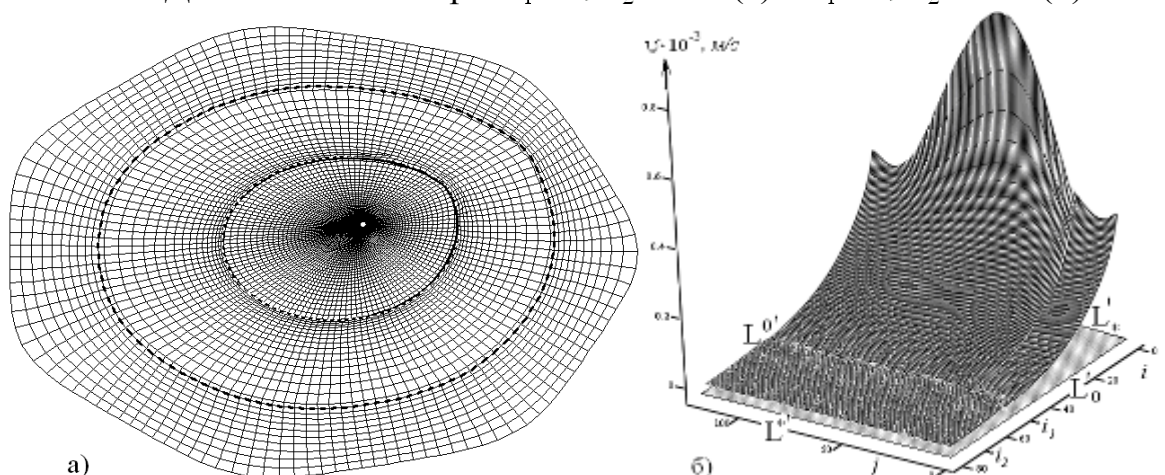


Рис. 3.3. Динамічна сітка при $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1.2, \kappa_3 = 0.75$ (а) і поверхня швидкості(б)

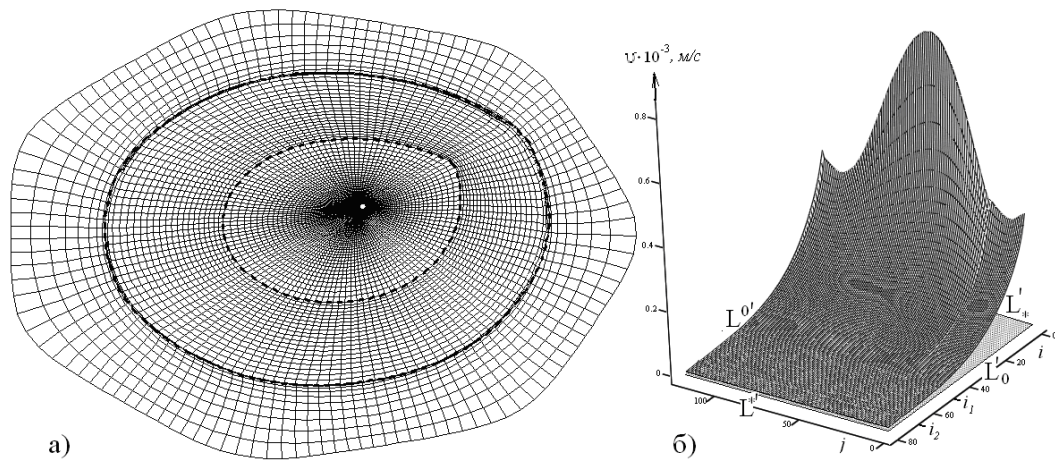


Рис. 3.4. Динамічна сітка при $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0.5, \kappa_3 = 1.5$ (а) і поверхня швидкості(б)

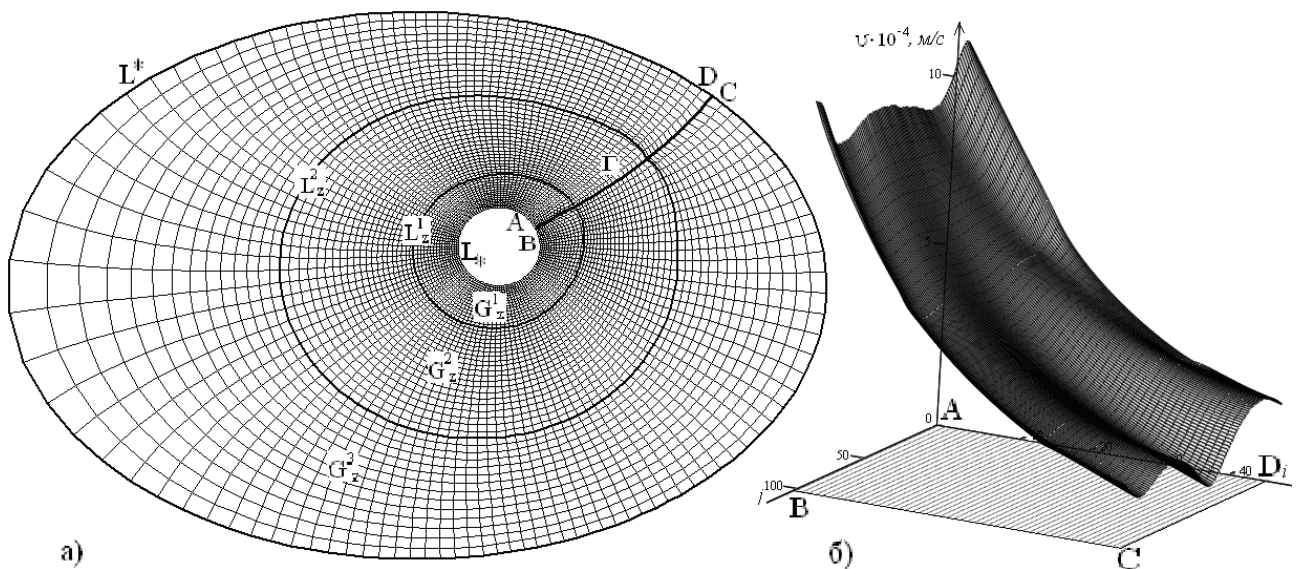


Рис. 3.5. Динамічна сітка при $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 1, \kappa_3 = 0.1$ (а) і поверхня швидкості(б)

Як приклад тестових числових розрахунків за наведеним алгоритмом, розглянуто стаціонарну задачу фільтрації у нафтовому пласті G_2 , що обмежений контуром живлення $L^* = \{x + iy : x = 1000 \cos \tau + 25 \cos 6\tau, y = 800 \sin \tau - 20 \sin 6\tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ і містить свердловину $L_* = \{x + iy : x = 10 \cos \tau, y = 10 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ при заданих значеннях граничних потенціалів $\varphi^* = 4.5$ і $\varphi_* = 0$ на цих контурах відповідно. Критичні значення потенціалів на лініях розділу шарів сталості коефіцієнта проникності становлять $\varphi^{(1)} = 1.6$ і $\varphi^{(2)} = 2.3$. Вважається, що динамічна в'язкість нафти у пластових умовах становить $\mu_n = 5 \text{ мПа}\cdot\text{с}$. На рис. 3.1–3.4 подані розраховані при розбитті $m \times n = 80 \times 120$ динамічні сітки із

знайденими лініями розділу та відповідні поверхні величини швидкості відносно областей комплексного квазіпотенціалу у випадках: однорідного пласта (рис. 3.1) при $\kappa_1 = \kappa_2 = 1 \text{ мкм}^2$ (отримано $Q = 3.57537 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}$, $\delta = 0.11952$), двошарового пласта (рис. 3.2 а) при $\kappa_2 = 1.5 \text{ мкм}^2$ ($Q = 3.43021 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}$, $\delta = 0.98804$) і (рис. 3.2 б) при $\kappa_2 = 0.5 \text{ мкм}^2$ ($Q = 3.61239 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}$, $\delta = 0.95176$), тришарового пласта (рис. 3.3) при $\kappa_2 = 1.2 \text{ мкм}^2$, $\kappa_3 = 0.75 \text{ мкм}^2$ ($Q = 3.17303 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}$, $\delta = 0.86924$) і (рис. 3.4) при $\kappa_2 = 0.5 \text{ мкм}^2$, $\kappa_3 = 1.5 \text{ мкм}^2$ (випадок нагнітальної свердловини, динамічна в'язкість води – $\mu_n = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$) отримано $Q = 15.98965 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}$, $\delta = 1.26881$.

На рис. 3.5 наведені результати числових розрахунків для задачі фільтрації у малопроникному пласті, обмеженому $L^* = \{x + iy : x = \cos \tau, y = 0.7 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ і $L_* = \{x + iy : x = 0.1 \cos \tau + 0.2, y = 0.1 \sin \tau + 0.1, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, при заданих значеннях потенціалів $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 2.3$ на цих контурах відповідно з коефіцієнтом фільтрації, що має вигляд:

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1 = \kappa_0 + \kappa_{\Gamma} + \kappa_{\Pi}, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(1)}, \\ \kappa_2 = \kappa_0 + \kappa_{\Gamma}, & \varphi^{(1)} < \varphi \leq \varphi^{(2)}, \\ \kappa_3 = \kappa_0, & \varphi^{(2)} < \varphi \leq \varphi^*, \end{cases}$$

де κ_0 – природний (малий) коефіцієнт проникності пласта,

κ_{Γ} – його збільшення (приріст) за рахунок зменшення тиску через відбір продукту (залежить, в основному, від потужностей помпувального обладнання),

κ_{Π} – збільшення коефіцієнта проникності внаслідок присвердловинних деформацій пласта,

при відповідних критичних значеннях потенціалу $\varphi^{(1)} = 0.7$, $\varphi^{(2)} = 1.6$ і заданих

$\kappa_1 = 2 \text{ мкм}^2$, $\kappa_2 = 1 \text{ мкм}^2$, $\kappa_3 = 0,1 \text{ мкм}^2$, $\mu_n = 5 \text{ мПа}\cdot\text{с}$.

3.2. Синтез ЧМКА, СЗ та ДО моделювання нелінійних фільтраційних процесів в ущільнених LEF-пластах із зонами підвищеної проникності

У попередньому параграфі викладено підхід до розв'язання крайових задач для двозв'язних криволінійних нелінійно-шаруватих LEF-областей, у яких провідність середовища задається як кусково-стала функція від шуканого квазіпотенціалу. Розроблена там обчислювальна технологія базується на поєднанні числових методів квазіконформних відображень, формул сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами і альтернуючого методу Шварца.

У пропонованому параграфі цю методику поширено на математичне моделювання процесів витіснення із ущільнених скелясто-осадових порід (що є малопроникними), в яких для промислової (економічно вигідної) експлуатації існуючі мікротріщини (що містять вуглеводні) об'єднані в єдину структуру між собою та із свердловинами за допомогою штучно утворених тріщин гідравлічного розриву пласта [17, 24, 29, 33]. Тут використані суттєво інші, ніж у п. 3.1, формули сумарних зображень для багат шарових областей з горизонтальними лініями розділу [108].

Розглянемо задачу знаходження квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$ у криволінійному LEF-пласті $G_z = G_z^0 \cup \left(\bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)} \right)$, що експлуатується однією свердловиною, і обмежений двома гладкими замкненими екіпотенціалами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ – контуром свердловини та $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – контуром живлення, де $L_z^{(l)}$ ($l = \overline{1, s}$) – тріщини гідророзриву пласта (зони підвищеної проникності), $G_z^0 = G_z \setminus \bigcup_{l=1}^s L_z^{(l)}$ – решта пласта без тріщин.

Процес витіснення із пласта описуватимемо рівнянням (3.1) за умов на контурах та умов спряження на границях тріщин $\partial L_z^{(l)}$ ($l = \overline{1, s}$):

$$[\varphi]_{\partial L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\partial L_z^{(l)}} = 0$$

з коефіцієнтом проникності пласта $\kappa(x, y)$, який визначатимемо так:

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} \kappa_0, & (x, y) \in G_z^0, \\ \kappa_{l, \tilde{l}}, & (x, y) \in L_z^{(l)}, l = \overline{1, s}, \quad \tilde{l} = \overline{1, \tilde{s}}, \end{cases}$$

де κ_0 – коефіцієнт проникності недеформованого пласта,

$\kappa_{l, \tilde{l}}$ – коефіцієнт проникності у l -тій тріщині, $\kappa_0 \ll \kappa_{l, \tilde{l}}$.

Припустимо для початку, що тріщини гідророзриву строго обмежені лініями течії і екіпотенціалами. Для більш точної оцінки основних фільтраційних характеристик у випадках, коли напрямки тріщин дещо відхиляються від ліній течії, що, зазвичай, відповідає реальному процесу гідророзриву ущільненого пласта, можна скористатись методом мажорантних областей Г.М. Положого [108, 129], взявши за основу розрахунки, зроблені за викладеною далі методикою.

Задача на квазіконформне відображення утвореної шляхом умовного розрізу області $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = G_\omega^0 \cup \left(\bigcup_{l=1}^s L_0^{(l)} \right)$, $G_\omega^0 = G_\omega \setminus \bigcup_{l=1}^s L_0^{(l)}$, $L_0^{(l)} = \left\{ \omega \in G_\omega : \psi_*^{(l)} \leq \psi \leq \psi^{*(l)}, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(l)} \right\}$, $l = \overline{1, s}$ ($\psi = \psi_*^{(l)}$, $\psi = \psi^{*(l)}$ – лінії течії, що обмежують тріщини, $\varphi^{(l)}$ – задані значення квазіпотенціалу, що відповідають кінцям тріщин) з невідомим параметром Q (повною витратою) має вигляд :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\kappa(x, y)}{\mu_n} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\kappa(x, y)}{\mu_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^\Gamma, \\ \left[\varphi \right]_{\partial L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\partial L_z^{(l)}} = 0, \\ \kappa(x, y) = \kappa_0, (x, y) \in G_z^0, \kappa(x, y) = \kappa_{l, \tilde{l}}, (x, y) \in L_z^{(l)}, l = \overline{1, s}, \tilde{l} = \overline{1, \tilde{s}}, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \psi|_{L_0} = 0, \psi|_{L^0} = \oint_{L_*} -\frac{\kappa(x, y)}{\mu_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\kappa(x, y)}{\mu_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

а відповідна задача на обернене квазіконформне відображення G_ω на G_z^Γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_h \frac{\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{\mu_h} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ \left[\frac{\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{\mu_h J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right]_{\psi=\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \\ [(x, y)]_{\psi=\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(l)}, l = \overline{1, s}, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \end{array} \right.$$

зводиться до задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa/\mu_h} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa}{\mu_h} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa/\mu_h} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa}{\mu_h} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ Q = \int_0^Q \frac{\kappa}{\mu_h J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi, \quad [(x, y)]_{\psi=\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \\ \left[\frac{\kappa}{\mu_h J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right]_{\psi=\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}} = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi = \varphi^{(l)}, l = \overline{1, s}, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \kappa = \begin{cases} \kappa_0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad \psi \in [0, Q] \setminus \bigcup_{l=1}^s [\psi_*^{(l)}, \psi^{*(l)}], \\ \kappa_{l, \tilde{l}}, & \varphi_* \leq \varphi^{(\tilde{l}-1)} \leq \varphi < \varphi^{(\tilde{l})} \leq \varphi^{(l)}, \quad \psi_*^{(l)} \leq \psi \leq \psi^{*(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \quad \tilde{l} = \overline{1, \tilde{s}}, \end{cases} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0. \end{array} \right.$$

(3.9)

Для розв'язання задачі (3.9) в області комплексного квазіпотенціалу визначимо рівномірну сіткову область $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}$

$$, \quad \varphi^{(l)} = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot m_l, \quad 0 < m_l \leq m+1, \quad \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1},$$

$$\psi_*^{(l)} = \Delta_\psi \cdot (n_l - 1), \quad \psi^{*(l)} = \Delta_\psi \cdot (n_l + 1), \quad 0 \leq n_l \leq n, \quad m, m_l, n, n_l \in \mathbf{N}, \quad l = \overline{1, s},$$

$$\Delta_\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1), \quad \Delta_\psi = Q / (n+1), \quad \gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi \}.$$

У випадку однієї тріщини (рис. 3.6 а) диференціальним рівнянням у внутрішніх вузлах сіткової області ставимо у відповідність такі скінченно-різницеві системи рівнянь [108] (для спрощення викладок вважатимемо, що $\mu_n = 1$, $\kappa_0 = \kappa_1 = \text{const}$, $\kappa_{l,\bar{l}} = \kappa_2 = \text{const}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa_1}{2} M_\gamma x_{i,0} + \gamma^2 \kappa_1 x_{i,1} = -\gamma^2 \kappa_1 x_{i,0}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \kappa_1 M_\gamma x_{i,j} + \gamma^2 \kappa_1 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} i = \overline{m_1 + 1, m}, j = \overline{1, n-1}, \\ i = \overline{1, m_1}, j = 1, 2, \dots, n_1 - 2, n_1 + 2, \dots, n-1, \end{array} \right. \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} M_\gamma x_{i, n_1 \pm 1} + \gamma^2 (\kappa_1 x_{i, n_1 \mp 2} + \kappa_2 x_{i, n_1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_2 M_\gamma x_{i, n_1} + \gamma^2 \kappa_2 (x_{i, n_1 - 1} + x_{i, n_1 + 1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_1 M_\gamma x_{i,n} + \gamma^2 \kappa_1 x_{i, n-1} = -\gamma^2 \kappa_1 x_{i, n+1}, \quad i = \overline{1, m}; \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa_1}{2} M_\gamma y_{i,0} + \gamma^2 \kappa_1 y_{i,1} = -\gamma^2 \kappa_1 y_{i,0}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \kappa_1 M_\gamma y_{i,j} + \gamma^2 \kappa_1 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} i = \overline{m_1 + 1, m}, j = \overline{1, n-1}, \\ i = \overline{1, m_1}, j = 1, 2, \dots, n_1 - 2, n_1 + 2, \dots, n-1, \end{array} \right. \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} M_\gamma y_{i, n_1 \pm 1} + \gamma^2 (\kappa_1 y_{i, n_1 \mp 2} + \kappa_2 y_{i, n_1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_2 M_\gamma y_{i, n_1} + \gamma^2 \kappa_2 (y_{i, n_1 - 1} + y_{i, n_1 + 1}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \kappa_1 M_\gamma y_{i,n} + \gamma^2 \kappa_1 y_{i, n-1} = -\gamma^2 \kappa_1 y_{i, n+1}, \quad i = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

розв'язки яких подамо формулами сумарних зображень [108] ($j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$):

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k}^{(\xi)} \left(\mu_k^{(\xi)i} a_k + \nu_k^{(\xi)i} b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{(\xi)|i-t|}}{\mu_k^{(\xi)} - \nu_k^{(\xi)}} (p_{1,k}^{(\xi)} x_{t,0} + p_{n,k}^{(\xi)} x_{t,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k}^{(\xi)} \left(\mu_k^{(\xi)i} c_k + \nu_k^{(\xi)i} d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{(\xi)|i-t|}}{\mu_k^{(\xi)} - \nu_k^{(\xi)}} (p_{1,k}^{(\xi)} y_{t,0} + p_{n,k}^{(\xi)} y_{t,n+1}) \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

де $\xi = 1$, якщо $i = \overline{m_1 + 1, m}$ і $\xi = 2$, якщо $i = \overline{1, m_1}$;

елементи матриць P -трансформацій $P^{(1)} = [p_{j,k}^{(1)}]_{j,k=1}^n$ і $P^{(2)} = [p_{j,k}^{(2)}]_{j,k=1}^n$

знаходяться із співвідношень:

$$p_{j,k}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1},$$

$$P_{j,k}^{(2)} = C_k \begin{cases} \sin j\theta_k, & j = 1, 2, \dots, n_1, \\ \alpha_k \sin(n-j)\theta_k, & j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n, \end{cases}$$

θ_k – корені рівняння $\sin n\theta + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2 + \kappa_1} \sin(n - 2n_1)\theta = 0$ на проміжку $(0, \pi)$,

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\sin n_1\theta_k}{\sin(n - n_1)\theta_k}, & \text{якщо } \sin(n - n_1)\theta_k \neq 0, \\ -\frac{\kappa_1 \cos n_1\theta_k}{\kappa_2 \cos(n - n_1)\theta_k}, & \text{якщо } \sin(n - n_1)\theta_k = 0, \end{cases}$$

$$C_k = \left[\frac{\kappa_1}{2} \left(n_1 - \frac{\cos(n_1 - 1)\theta_k \sin n_1\theta_k}{\sin \theta_k} \right) + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \sin^2 n_1\theta_k + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_2}{2} \alpha_k^2 \left(n - n_1 - \frac{\cos(n - n_1 - 1)\theta_k \sin(n - n_1)\theta_k}{\sin \theta_k} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

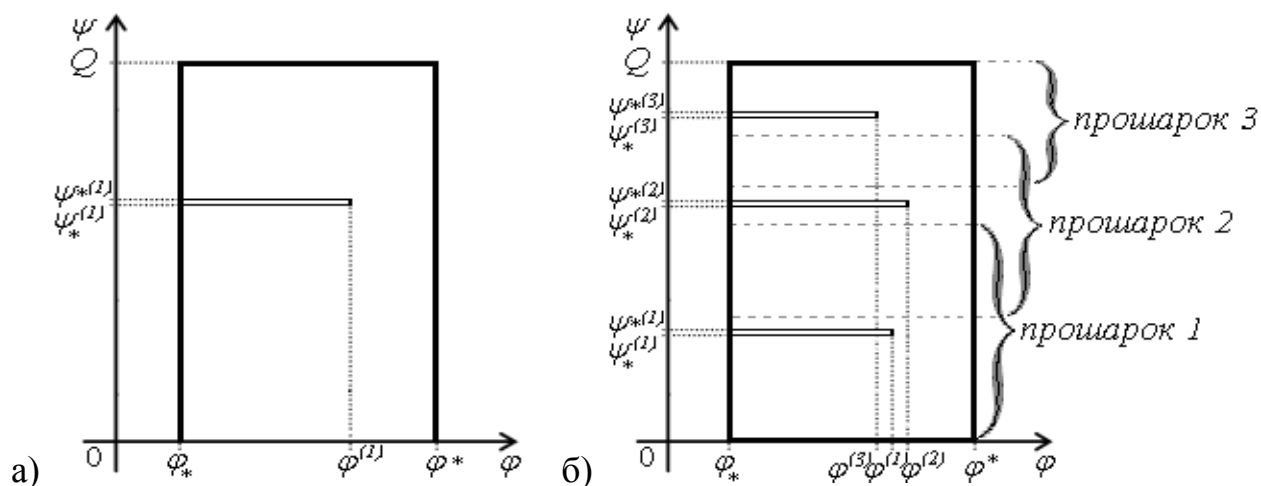


Рис. 3.6. Область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $s = 1$ (а) і $s = 3$ (б)

Елементи діагональних матриць $\mu^{(\xi)^i} = [\mu_k^{(\xi)^i}]_{k=1}^n$, $\nu^{(\xi)^i} = [\nu_k^{(\xi)^i}]_{k=1}^n$

визначаються за формулами: $\mu_k^{(\xi)} = \nu_k^{(\xi)^{-1}} = \eta_k^{(\xi)} + \sqrt{\eta_k^{(\xi)^2 - 1}$,

$\eta_k^{(1)} = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$, $\eta_k^{(2)} = 1 + \gamma^2 (1 - \cos \theta_k)$, а довільні сталі a_k, b_k, c_k, d_k

знаходяться із крайових умов на границях L_* , L^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k + b_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(2)*} x_{0,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k}^{(2)} x_{t,0} + p_{n,k}^{(2)} x_{t,n+1}) \\ \mu_k^{m+1} a_k + v_k^{m+1} b_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(1)*} x_{m+1,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{m+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k}^{(1)} x_{t,0} + p_{n,k}^{(1)} x_{t,n+1}) \end{array} \right. , k = \overline{1, n};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_k + d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(2)*} y_{0,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k}^{(2)} y_{t,0} + p_{n,k}^{(2)} y_{t,n+1}) \\ \mu_k^{m+1} c_k + v_k^{m+1} d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^{(1)*} y_{m+1,j} - \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{m+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k}^{(1)} y_{t,0} + p_{n,k}^{(1)} y_{t,n+1}) \end{array} \right. , k = \overline{1, n},$$

де $p_{j,k}^{(\xi)*}$ ($j, k = \overline{1, n}, \xi = 1, 2$) – елементи матриць $P^{(\xi)*}$, обернених до $P^{(\xi)}$.

Різницеві аналоги крайових умов, умов періодичності на розрізі Γ і умов ортогональності мають вигляд (2.9)–(2.10), а квазіконформний інваріант γ і невідому витрату Q обчислюємо за формулами (2.33).

Алгоритм розв'язання задачі (3.11) у випадку $s=1$ є аналогічним до описаного в п. 2.1.

У випадку кількох тріщин гідророзриву пласта (рис. 3.6 б) розв'язки скінченно-різницевих аналогів диференціальних рівнянь із задачі (3.9) у внутрішніх вузлах сіткової області знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень. Для цього область G_ω^γ “розіб'ємо” на прошарки (сіткові прямокутники з “накладками”),

кожен з яких містить одну тріщину: $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^s \tilde{G}_\omega^{\gamma(l)}$, де $\tilde{G}_\omega^{\gamma(l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) :$

$(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma, i = \overline{0, m+1}, 0 \leq n_{l-1} + 2 \leq j \leq n_{l+1} - 2 \leq n+1\}$. При цьому отримаємо s проєкцій задачі (3.9) (стосовно підобластей $\tilde{G}_\omega^{\gamma(l)}$), подібних до (3.10)–(3.11),

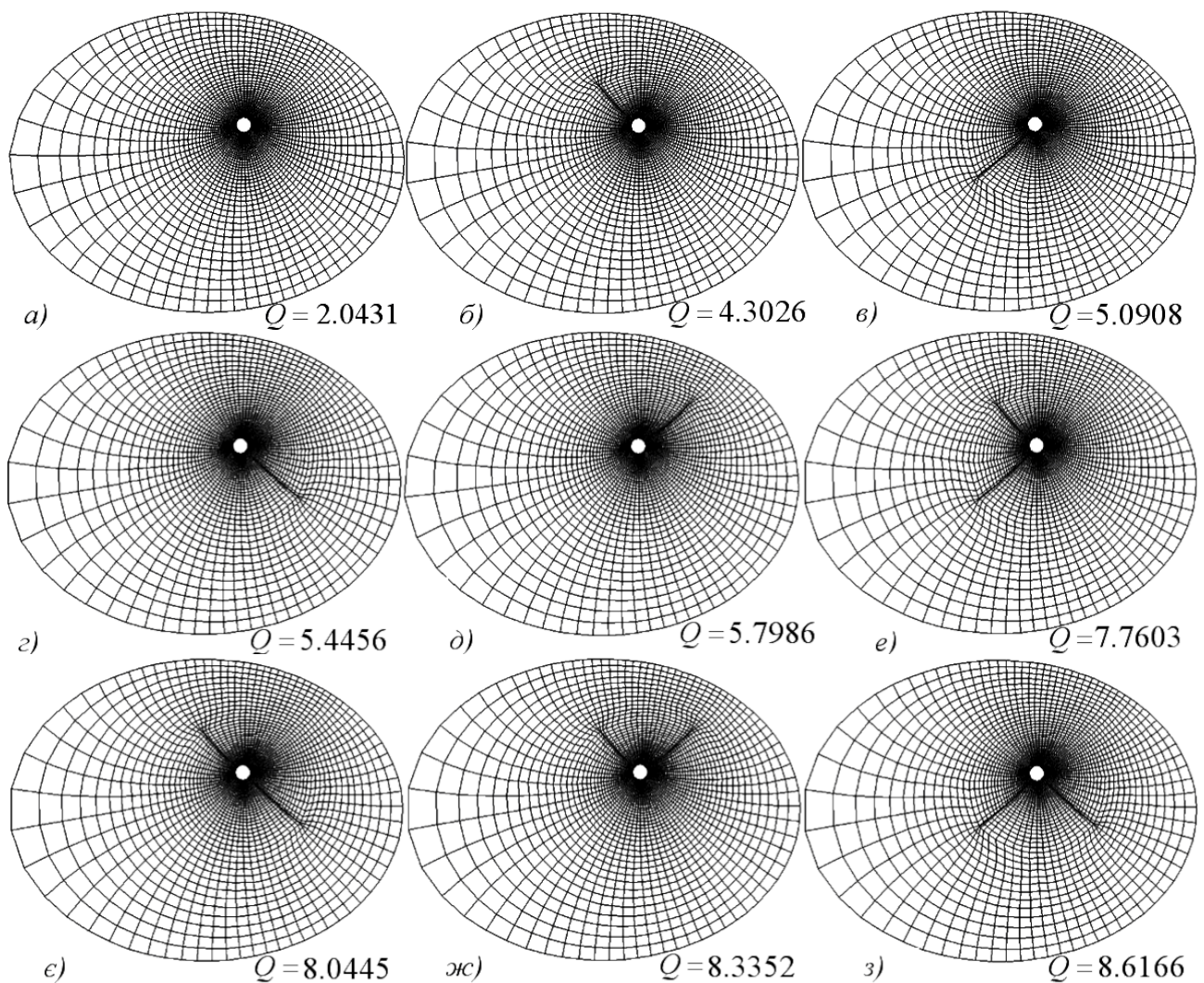
для знаходження послідовностей сіткових функцій $(\{\tilde{x}_{i,j}^{(l)(\zeta)}\}_{\zeta=0}^\infty, \{\tilde{y}_{i,j}^{(l)(\zeta)}\}_{\zeta=0}^\infty)$:

$x_{i,j}^{(l)} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(l)(\zeta)}$, $y_{i,j}^{(l)} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\zeta)}$, де ζ – номер кроку ітераційного процесу

методу Шварца. Наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(l)(k)}, y_{i,j}^{(l)(k)})$ у

прошарках отримуємо аналогічно до процедури, описаної у п. 3.1.

Числові розрахунки проведені для області G_z , що обмежена контурами $L_* = \{x + iy : x = 0.3 \cos \tau + 1.5, y = 0.3 \sin \tau + 1.5, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ і $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos \tau, y = 6 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ при заданих значеннях потенціалів $\varphi^* = 1$ та $\varphi_* = 0$ на них і значеннях коефіцієнтів проникності недеформованого пласта та у тріщинах $\kappa_1 = 0,1 \text{ мкм}^2$ та $\kappa_2 = 1 \text{ мкм}^2$ відповідно, $\mu_n = 5 \text{ мПа·с}$. На рис. 3.7 зображено розраховані динамічні сітки для області G_z без тріщин (рис. 3.7 а) та у випадках однієї (рис. 3.7 б–3.7 д), двох (рис. 3.7 е–3.7 і), трьох (рис. 3.8 а–3.8 г) і чотирьох (рис. 3.8 д) тріщин гідророзриву пласта з відповідними значеннями Q ($\text{м}^3/\text{с}$).



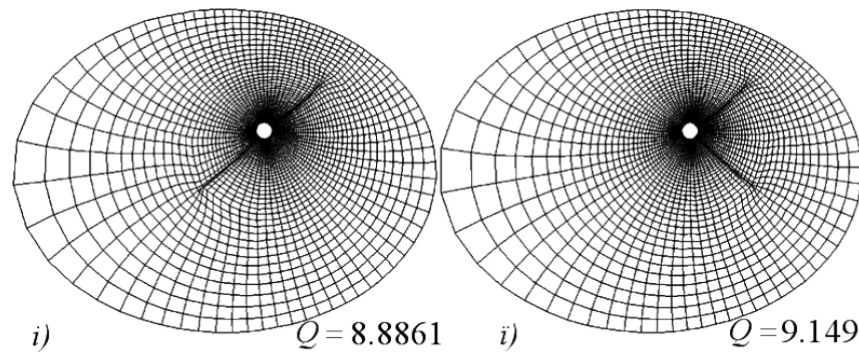


Рис. 3.7. Динамічні сітки і значення повної витрати у випадках: $s = 0$ (а),
 $s = 1$ (б, в, г, д) $s = 2$ (е, є, ж, з, і, ї)

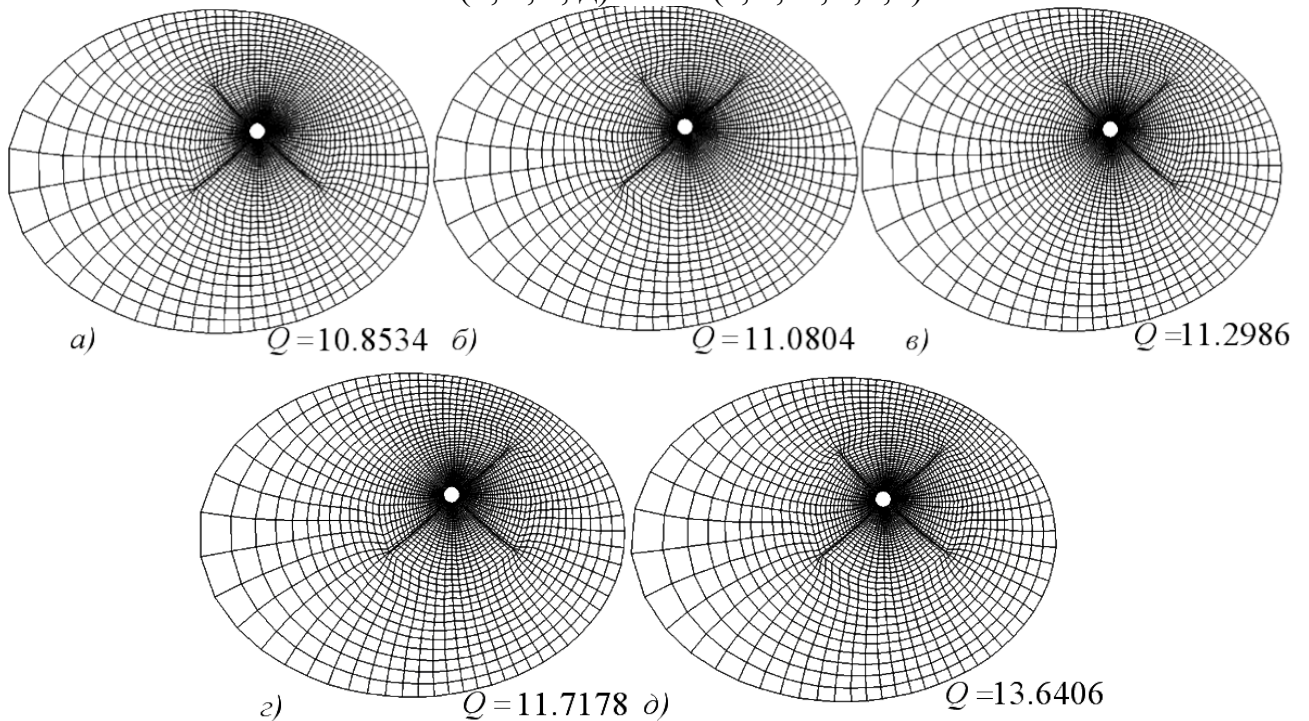


Рис. 3.8. Динамічні сітки і значення повної витрати у випадках: $s = 3$ (а, б, в, г),
 $s = 4$ (д)

Бачимо, що наявність навіть однієї тріщини суттєво впливає на повну витрату (дебіт свердловини). При цьому, важливим є їх розміщення (напрямок гідророзриву), а утворення додаткових тріщин не завжди доцільно. Цей приклад також підтверджує, що розрахунки за формулами сумарних зображень суттєво зменшують трудомісткість обчислень при ітераційному наближенні координат внутрішніх вузлів і дають “економію” комп’ютерних ресурсів [17].

3.3. ЧМКА, СЗ і ДО моделювання нелінійних процесів витіснення для системи двох свердловин у двояко-шаруватому нафтовому LEF-пласті

У цьому параграфі методику розв’язання нелінійних крайових задач для

тризв'язних криволінійних LEF-областей, що описують процеси витіснення у нафтогазовому пласті з двома свердловинами, розроблену у п. 2.3, у поєднанні з викладеними у пп. 3.1–3.2 способами декомпозиції задач поширено на розв'язання нелінійних крайових задач для обмежених двома еквіпотенціалами і непроникним контуром LEF-областей – математичних моделей стаціонарного процесу руху речовини у двояко-шаруватих середовищах, провідність яких задається кусково-сталими функціями, залежними і від шуканого квазіпотенціалу, і від функції течії, з невідомими лініями розділу шарів (лініями розриву коефіцієнта провідності), що проходять вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалів та ліній течії і знаходяться у процесі розв'язання задачі. Такі задачі виникають при моделюванні процесів витіснення (фільтрації), що породжені системою двох свердловин (нагнітальною та експлуатаційною) в елементі шарувато-неоднорідного нафтогазового пласта за геологічно складних умов, наприклад, у випадку ущільнених (сланцевих) пластів з тріщинами гідророзриву у присвердловинній зоні тощо [7, 29, 39, 165, 192, 198].

Тут розглядаються задачі витіснення вуглеводнів із пласта у випадках, коли витісняюча речовина і речовина, що видобувається, мають однакові фізичні та механічні властивості (випадок однакових рідин, п. 3.3.1) [20], поршневого (повного) витіснення нафти водою (п. 3.3.2) і двофазної фільтрації (вода-нафта) за схемою Баклея-Лeverетта [44, 45, 53], коли має місце сумісний рух обох рідин (п. 3.3.3).

3.3.1 Випадок однакових рідин

Розглянемо процес витіснення, породжений взаємодією нагнітальної та експлуатаційної свердловин в елементі двояко-шаруватого нафтового LEF-пласта, де вважатимемо, що витісняюча речовина і речовина, що видобувається, мають однакові фізичні та механічні властивості. Математичне моделювання цього процесу зводиться до задачі відшукування положення лінії розділу Ω_t рідин, розв'язання якої потребує знаходження розв'язків двох взаємопов'язаних підзадач: на побудову поля швидкості та динамічної сітки у конкретний момент часу і на визначення рівняння лінії розділу Ω_t , шляхом розв'язання задачі конвективного переносу відносно побудованого поля швидкості [44, 151].

Враховуючи припущення про “однаковість” рідин, задачу на розрахунок динамічної сітки і поля швидкості можна вважати стаціонарною і розв’язувати незалежно від задачі конвективного переносу.

Для стаціонарної фільтрації, що підпорядковується закону Дарсі $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$, процес витіснення описуємо рівнянням (3.1) з коефіцієнтом фільтрації $\kappa_f = \kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) / \mu_n$, де $\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ – кусково-стала функція із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалів і ліній течії (за припущення, що виконується умова неперервності потенціалу і потоку на них):

$$\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = \kappa^{(q,l)} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, & q = \overline{1, \bar{s}}, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, & l = \overline{1, \bar{s}} \end{cases}$$

($\kappa^{(q,l)}$ – деякі додатні числа, $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ – невідома повна фільтраційна

витрата) у тризв’язній криволінійній LEF-області G_z , що описана у п. 2.4, з відповідними крайовими умовами (рис. 3.9).

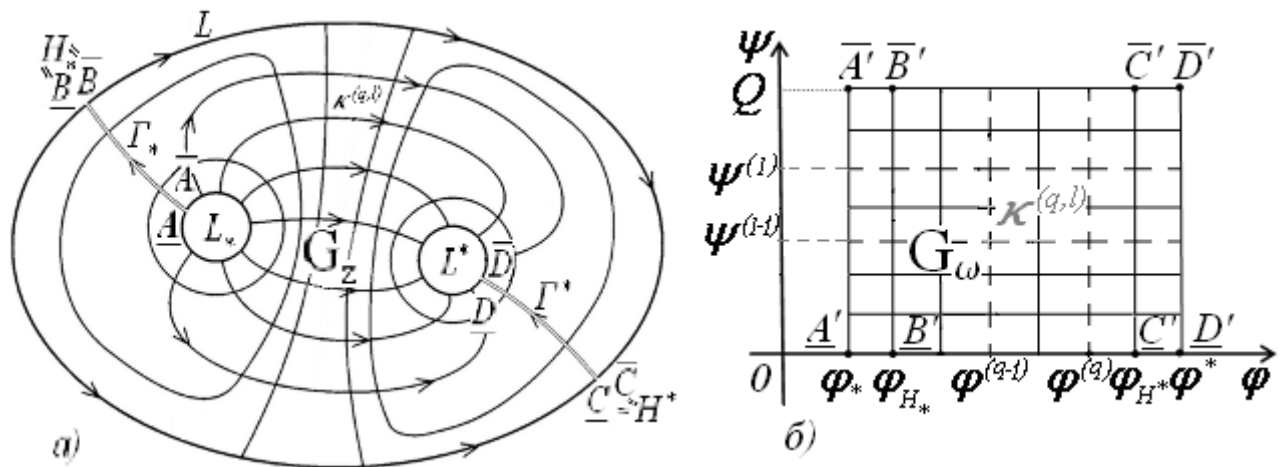


Рис. 3.9. Схема двояко-шаруватої LEF-області типу "нагнітальна-експлуатаційна свердловина" (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б)

Використовуючи методи комплексного аналізу, аналогічно до [12], фільтраційну задачу зводимо до задачі на квазіконформне (“кусково-конформне”) відображення заданої криволінійної LEF-області на прямокутну область комплексного квазіпотенціалу. При цьому, як уже зазначалося у п. 2.4, для однозначної побудови такого відображення, необхідно здійснити два умовні розрізи Γ_* і Γ^* області G_z вздовж таких ліній течії (ліній розділення течії), що однозначно визначаються точками “призупинки” потоку $H_* = \bar{B} = \underline{B} = (x_*, y_*) \in L$ і $H^* = \bar{C} = \underline{C} = (x^*, y^*) \in L$.

Задача на обернене квазіконформне відображення області комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left(\bigcup_{q=1, l=1}^{\bar{s}, \bar{s}} G_\omega^{(q, l)} \right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{\bar{s}} L_{\omega^*}^{(q)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}} L_{\omega_0}^{(l)} \right)$, $G_\omega^{(q, l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$, $L_{\omega^*}^{(q)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(q)}\}$, $L_{\omega_0}^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)}\}$ на область $G_z^\Gamma = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ з трьома невідомими параметрами – витратою Q і координатами точок H_* та H^* – зводиться до задачі (2.37) з відповідними умовами спряження:

$$\begin{aligned} \left[\kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right] \Big|_{L_*^{(q)}} = \left[\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right] \Big|_{L_*^{(q)}} = \left[\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \\ [x] \Big|_{L_*^{(q)}} = [x] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \quad [y] \Big|_{L_*^{(q)}} = [y] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \quad q = \overline{1, \bar{s} - 1}, l = \overline{1, \bar{s} - 1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для знаходження розв'язків задачі (2.37), (3.13) в області комплексного квазіпотенціалу конструємо ортогональну сітку і замінюємо G_ω сітковою

$$\begin{aligned} \text{областю} \quad G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_{\varphi 1} \cdot i, \quad \Delta_{\varphi 1} = \frac{\varphi_{H^*} - \varphi_*}{m_1 + 1}, \quad i = \overline{0, m_1}, \\ \varphi_i = \varphi_{H^*} + \Delta_{\varphi 2} \cdot (i - m_1), \quad \Delta_{\varphi 2} = \frac{\varphi_{H^*} - \varphi_{H_*}}{m_2 - m_1 - 1}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad \varphi_i = \varphi_{H^*} + \Delta_{\varphi 3} \cdot (i - m_2), \\ \Delta_{\varphi 3} = \frac{\varphi^* - \varphi_{H^*}}{m - m_2}, \quad i = \overline{m_2 + 1, m + 1}, \quad \varphi^{(q)} = \varphi_{m^{(q)}}, \quad 0 \leq m^{(1)} < m^{(2)} < \dots < m^{(\bar{s})} = m, \\ q = \overline{1, \bar{s}}, \quad \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n + 1}, \quad \psi^{(l)} = \psi_{n^{(l)}}, \quad 0 \leq n^{(1)} < n^{(2)} < \dots < n^{(\bar{s})} = n, \quad l = \overline{1, \bar{s}}, \\ \Delta_\psi = \frac{Q}{n + 1}, \quad m_1, m_2, m, m^{(q)}, n, n^{(l)} \in \mathbf{N} \}, \end{aligned}$$

а крайові умови, умови періодичності на розрізах і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок границі фізичної області – скінченно-різницевиими аналогами (2.38), (2.39). Величини квазіконформних інваріантів $\gamma_\sigma = \Delta_{\varphi\sigma} / \Delta_\psi$ ($\sigma = \overline{1, 3}$), витрату Q та значення квазіпотенціалу $\varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}$ у точках “призупинки” потоку шукаємо в процесі ітераційних розрахунків за формулами (2.40), (2.41).

У випадку багатьох ліній розриву κ по φ і по ψ для декомпозиції області скористаємось альтернуючим методом Шварца. Для цього область G_ω^γ “розіб'ємо” на дві групи (по горизонталі і по вертикалі) сіткових прямокутників з “накладками”:

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{q=1}^{\bar{s}} \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} \tilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{\bar{s}} \left(\bigcup_{q=1}^{\bar{s}-1} \tilde{\tilde{G}}_{q,l} \right),$$

де $\tilde{G}_{q,l} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q)}-1}, \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l+1)}-1} \right\}$,

$\tilde{\tilde{G}}_{q,l} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q+1)}-1}, \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l)}-1} \right\}$.

Отримаємо $\hat{s}(\bar{s}-1) + \bar{s}(\hat{s}-1)$ проєкцій вихідної задачі (стосовно підобластей $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$) для знаходження послідовностей сіткових функцій

$$\left\{ \left(\tilde{x}_{i,j}^{(1,l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(1,l)(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \quad \left\{ \left(\tilde{x}_{i,j}^{(2,l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(2,l)(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \quad \dots, \quad \left\{ \left(\tilde{x}_{i,j}^{(\bar{s},l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(\bar{s},l)(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty} \quad ($$

$$l = \overline{1, \bar{s}-1}): \quad \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \quad \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}; \quad \left\{ \left(\tilde{x}_{i,j}^{(q,1)(\delta)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,1)(\delta)} \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty},$$

$$\left\{ \left(\tilde{x}_{i,j}^{(q,2)(\delta)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,2)(\delta)} \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty}, \quad \dots, \quad \left\{ \left(\tilde{x}_{i,j}^{(q,\bar{s})(\delta)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,\bar{s})(\delta)} \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty} \quad (q = \overline{1, \bar{s}-1}):$$

$$\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}, \quad \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}, \quad \text{де } \xi, \delta - \text{ номери кроків ітераційних}$$

процесів методу Шварца.

Значення сіткових функцій $\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j}$ у внутрішніх вузлах прошарків $\tilde{G}_{q,l}$ (тобто, $\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)}$) шукатимемо із різницьових рівнянь (тут і надалі, номери кроків ξ, δ для спрощення викладок пропускаємо):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}^{(l)} M_\gamma \tilde{x}_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}^{(l)} (\tilde{x}_{i,j-1} + \tilde{x}_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_{l-1}+1, n_l-1}, \\ \frac{\tilde{\kappa}^{(l)} + \tilde{\kappa}^{(l+1)}}{2} M_\gamma \tilde{x}_{i,n_l} + \gamma_\sigma^2 (\tilde{\kappa}^{(l)} \tilde{x}_{i,n_l-1} + \tilde{\kappa}^{(l+1)} \tilde{x}_{i,n_l+1}) = 0, \\ \tilde{\kappa}^{(l+1)} M_\gamma \tilde{x}_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}^{(l+1)} (\tilde{x}_{i,j-1} + \tilde{x}_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_l+1, n_{l+1}-1}, \end{array} \right.$$

(3.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}^{(l)} M_\gamma \tilde{y}_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}^{(l)} (\tilde{y}_{i,j-1} + \tilde{y}_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_{l-1}+1, n_l-1}, \\ \frac{\tilde{\kappa}^{(l)} + \tilde{\kappa}^{(l+1)}}{2} M_\gamma \tilde{y}_{i,n_l} + \gamma_\sigma^2 (\tilde{\kappa}^{(l)} \tilde{y}_{i,n_l-1} + \tilde{\kappa}^{(l+1)} \tilde{y}_{i,n_l+1}) = 0, \\ \tilde{\kappa}^{(l+1)} M_\gamma \tilde{y}_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}^{(l+1)} (\tilde{y}_{i,j-1} + \tilde{y}_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_l+1, n_{l+1}-1}, \end{array} \right.$$

(3.15)

де $\tilde{x}_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $\tilde{y}_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in \tilde{G}_{q,l}$, $i = \overline{m_{q-1}+1, m_q-1}$, $q = \overline{1, \hat{s}}$, $l = \overline{1, \hat{s}-1}$;

сіткових функцій $\tilde{\tilde{x}}_{i,j}$, $\tilde{\tilde{y}}_{i,j}$ у прошарках $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ (тобто, $\tilde{\tilde{x}}_{i,j}^{(q,l)}$, $\tilde{\tilde{y}}_{i,j}^{(q,l)}$):

$$\begin{cases} \mathbb{L}_\gamma \tilde{\tilde{x}}_{i,j} = 0, & i = \overline{m_{q-1}+1, m_{q+1}-1}, \\ \widehat{\kappa}^{(q+1)}(\tilde{\tilde{x}}_{m_q,j} - \tilde{\tilde{x}}_{m_q-1,j}) = \widehat{\kappa}^{(q)}(\tilde{\tilde{x}}_{m_q+1,j} - \tilde{\tilde{x}}_{m_q,j}), \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}_\gamma \tilde{\tilde{y}}_{i,j} = 0, & i = \overline{m_{q-1}+1, m_{q+1}-1}, \\ \widehat{\kappa}^{(q+1)}(\tilde{\tilde{y}}_{m_q,j} - \tilde{\tilde{y}}_{m_q-1,j}) = \widehat{\kappa}^{(q)}(\tilde{\tilde{y}}_{m_q+1,j} - \tilde{\tilde{y}}_{m_q,j}), \end{cases} \quad (3.17)$$

де $\tilde{\tilde{x}}_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $\tilde{\tilde{y}}_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$, $j = \overline{n_{l-1}+1, n_l-1}$, $q = \overline{1, \hat{s}-1}$, $l = \overline{1, \hat{s}}$.

Розв'язки (3.14)–(3.17) подаємо формулами сумарних зображень:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k} \left(\mu_k^i \tilde{a}_k + \nu_k^i \tilde{b}_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{\nu_k^{|i-g|}}{\mu_k - \nu_k} \tilde{h}_{g,k}^{(x)} \right), \\ \tilde{y}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} \tilde{p}_{j-n_{l-1},k} \left(\mu_k^i \tilde{c}_k + \nu_k^i \tilde{d}_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{\nu_k^{|i-g|}}{\mu_k - \nu_k} \tilde{h}_{g,k}^{(y)} \right), \\ i &= \overline{m_{q-1}+1, m_q-1}, \quad j = \overline{n_{l-1}+1, n_{l+1}-1}, \quad \tilde{n}_l = n_{l+1} - n_{l-1} - 1; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{x}}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\tilde{\tilde{n}}_i} \tilde{\tilde{p}}_{j-n_{l-1},k} \left(\Lambda^{(q)} \mu_k^i \tilde{\tilde{a}}_k + \mathbb{B}^{(q)} \nu_k^i \tilde{\tilde{b}}_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(i, g) \tilde{\tilde{h}}_{g,k}^{(x)} \right), \\ \tilde{\tilde{y}}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\tilde{\tilde{n}}_i} \tilde{\tilde{p}}_{j-n_{l-1},k} \left(\Lambda^{(q)} \mu_k^i \tilde{\tilde{c}}_k + \mathbb{B}^{(q)} \nu_k^i \tilde{\tilde{d}}_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(i, g) \tilde{\tilde{h}}_{g,k}^{(y)} \right), \\ i &= \overline{m_{q-1}+1, m_{q+1}-1}, \quad j = \overline{n_{l-1}+1, n_l-1}, \quad \tilde{\tilde{n}}_l = n_{l+1} - n_l - 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де $\tilde{h}_{g,k}^{(x)} = \tilde{p}_{1,k} \tilde{x}_{g, n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_i, k} \tilde{x}_{g, n_{l+1}}$, $\tilde{h}_{g,k}^{(y)} = \tilde{p}_{1,k} \tilde{y}_{g, n_{l-1}} + \tilde{p}_{\tilde{n}_i, k} \tilde{y}_{g, n_{l+1}}$, $\tilde{\tilde{h}}_{g,k}^{(x)} = \tilde{\tilde{p}}_{1,k} \tilde{\tilde{x}}_{g, n_{l-1}} + \tilde{\tilde{p}}_{\tilde{\tilde{n}}_i, k} \tilde{\tilde{x}}_{g, n_l}$, $\tilde{\tilde{h}}_{g,k}^{(y)} = \tilde{\tilde{p}}_{1,k} \tilde{\tilde{y}}_{g, n_{l-1}} + \tilde{\tilde{p}}_{\tilde{\tilde{n}}_i, k} \tilde{\tilde{y}}_{g, n_l}$, $\Lambda^{(q)} = \frac{2\widehat{\kappa}^{(q)}}{1 + \widehat{\kappa}^{(q)}}$, $\mathbb{B}^{(q)} = \frac{2}{1 + \widehat{\kappa}^{(q)}}$,

$$\tilde{\kappa}^{(q)} = \frac{\widehat{\kappa}^{(q)}}{\widehat{\kappa}^{(q+1)}}; \quad \tilde{p}_{j,k} = C_k \begin{cases} \sin j\theta_k, & j = \overline{1, \tilde{n}_{l-1}}, \\ \alpha_k \sin(\tilde{n}_l - j)\theta_k, & j = \overline{\tilde{n}_{l-1} + 1, \tilde{n}_l} \end{cases} \quad (k = \overline{1, \tilde{n}_l}),$$

$$\tilde{p}_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2\tilde{n}_l + 1}} \sin \frac{jk\pi}{\tilde{n}_l + 1} \quad (j, k = \overline{1, \tilde{n}_l}) - \text{елементи матриць } P\text{-трансформацій,}$$

θ_k – корені рівняння $\sin \tilde{n}_l \theta + \frac{\kappa_l - \kappa_{l+1}}{\kappa_l + \kappa_{l+1}} \sin(\tilde{n}_l - 2\tilde{n}_{l-1})\theta = 0$ на проміжку $(0, \pi)$,

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\sin \tilde{n}_{l-1} \theta_k}{\sin(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1})\theta_k}, & \sin(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1})\theta_k \neq 0, \\ -\frac{\kappa_l \cos \tilde{n}_{l-1} \theta_k}{\kappa_{l+1} \cos(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1})\theta_k}, & \sin(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1})\theta_k = 0, \end{cases}$$

$$C_k = \left[\frac{\kappa_l}{2} \left(\tilde{n}_{l-1} - \frac{\cos(\tilde{n}_{l-1} - 1)\theta_k \sin \tilde{n}_{l-1} \theta_k}{\sin \theta_k} \right) + \frac{\kappa_l + \kappa_{l+1}}{2} \sin^2 \tilde{n}_{l-1} \theta_k + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{l+1}}{2} \alpha_k^2 \left(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1} - \frac{\cos(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1} - 1)\theta_k \sin(\tilde{n}_l - \tilde{n}_{l-1})\theta_k}{\sin \theta_k} \right) \right]^{\frac{1}{2}};$$

елементи діагональних матриць $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^N$, $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^N$ визначаються за формулами: $\mu_k = \nu_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\eta_k = 1 + \gamma_\sigma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{N+1} \right)$ ($N = \tilde{n}_l$ у (3.18) і $N = \tilde{n}_l$ у (3.19));

функція $\Phi(i, g)$ має вигляд: $\Phi(i, g) = \begin{cases} \overline{\Phi}(i, g), & i = m_{q-1} + 1, m_q, \\ \underline{\Phi}(i, g), & i = m_q + 1, m_{q+1} - 1, \end{cases}$

$$\overline{\Phi}(i, g) = \begin{cases} \left(\nu_k^{|i-g|} + \frac{1 - \Lambda^{(q)}}{2} \nu_k^{2m_q - i - g} \right) / (\mu_k - \nu_k), & g = \overline{m_{q-1} + 1, m_q - 1}, \\ \nu_k^{m_q - i} / (\mu_k - \nu_k), & g = m_q, \\ \Lambda^{(q)} \nu_k^{g-i} / (\mu_k - \nu_k), & g = \overline{m_q + 1, m_{q+1} - 1}, \end{cases}$$

$$\underline{\Phi}(i, g) = \begin{cases} \mathbb{B}^{(q)} v_k^{i-g} / \mu_k - v_k, & g = \overline{m_{q-1} + 1, m_q - 1}, \\ v_k^{i-m_q} / \mu_k - v_k, & g = m_q, \\ \left(v_k^{|i-g|} + \frac{\Lambda^{(q)} - \mathbb{B}^{(q)}}{2} v_k^{i+g-2m_q} \right) / \mu_k - v_k, & g = \overline{m_q + 1, m_{q+1} - 1}. \end{cases}$$

Сталі $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k, \tilde{d}_k$ ($k = \overline{1, \tilde{n}_l}$) знаходяться із систем рівнянь, отриманих із крайових умов на ділянках границь $L_*^{(l)} \cup L_*^{(l+1)}, L^{*(l)} \cup L^{*(l+1)}$:

$$\begin{cases} \tilde{a}_k + \tilde{b}_k = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_{i+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{i-1},k}^* \tilde{x}_{m_{q-1},j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^g}{\mu_k - v_k} \tilde{h}_{g,k}^{(x)}, \\ \mu_k^{m_q} \tilde{a}_k + v_k^{m_q} \tilde{b}_k = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_{i+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{i-1},k}^* \tilde{x}_{m_q,j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^{m_q-g}}{\mu_k - v_k} \tilde{h}_{g,k}^{(x)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{c}_k + \tilde{d}_k = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_{i+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{i-1},k}^* \tilde{y}_{m_{q-1},j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^g}{\mu_k - v_k} \tilde{h}_{g,k}^{(y)}, \\ \mu_k^{m_q} \tilde{c}_k + v_k^{m_q} \tilde{d}_k = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_{i+1}-1} \tilde{p}_{j-n_{i-1},k}^* \tilde{y}_{m_q,j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_q-1} \frac{v_k^{m_q-g}}{\mu_k - v_k} \tilde{h}_{g,k}^{(y)}, \end{cases}$$

а сталі $\tilde{a}_k^{(q)}, \tilde{b}_k^{(q)}, \tilde{c}_k^{(q)}, \tilde{d}_k^{(q)}$ ($k = \overline{1, \tilde{n}_l}$) із систем рівнянь:

$$\begin{cases} \Lambda^{(q)} \mu_k^{m_{q-1}} \tilde{a}_k^{(\delta)} + \mathbb{B}^{(q)} v_k^{m_{q-1}} \tilde{b}_k^{(\delta)} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{x}_{m_{q-1},j}^{(\delta-1)} - S_k, \\ \Lambda^{(q)} \mu_k^{m_{q+1}} \tilde{a}_k^{(\delta)} + \mathbb{B}^{(q)} v_k^{m_{q+1}} \tilde{b}_k^{(\delta)} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{x}_{m_{q+1},j}^{(\delta-1)} - S_k^*, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{(q)} \mu_k^{m_{q-1}} \tilde{c}_k^{(\delta)} + B^{(q)} V_k^{m_{q-1}} \tilde{d}_k^{(\delta)} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{y}_{m_{q-1},j}^{(\delta-1)} - S_k^{**}, \\ A^{(q)} \mu_k^{m_{q+1}} \tilde{c}_k^{(\delta)} + B^{(q)} V_k^{m_{q+1}} \tilde{d}_k^{(\delta)} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}_l} \tilde{p}_{j,k}^* \tilde{y}_{m_{q+1},j}^{(\delta-1)} - S_k^{***}, \end{array} \right.$$

де $S_k = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q-1}, g) \tilde{h}_{g,k}^{(x)}$, $S_k^* = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q+1}, g) \tilde{h}_{g,k}^{(x)}$, $S_k^{**} = \gamma_\sigma^2 \times$
 $\times \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q-1}, g) \tilde{h}_{g,k}^{(y)}$, $S_k^{***} = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m_{q-1}+1}^{m_{q+1}-1} \Phi(m_{q+1}, g) \tilde{h}_{g,k}^{(x)}$; $\tilde{p}_{j,k}^*$ ($j, k = \overline{1, \tilde{n}_l}$), $\tilde{p}_{j,k}^*$ ($j, k = \overline{1, \tilde{n}_l}$) – елементи матриць, обернених до \tilde{P} і \tilde{P} відповідно.

У формулах (3.14)–(3.19): $\sigma = 1$ при $i = \overline{0, m_1}$, $\sigma = 2$ при $i = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $\sigma = 3$ при $i = \overline{m_2 + 1, m + 1}$.

Задачу на відшукування положення лінії розділу Ω_t (вважатимемо, що у початковий момент часу: $\Omega_{t=t_0} = L_*$), аналогічно до [44], запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_n \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } s = 0, \quad (x, y) \in G_z^F, \quad t > t_0, \\ s|_{L_*} = 1, \quad s(x, y, t)|_{t=t_0} = 0, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

де σ_n – пористість середовища,

$s = s(x, y, t)$ – відносна насиченість середовища витісняючою речовиною.

У роботі [44] із посиланнями на [151, 183] вказано, що частинки речовини, у загальному випадку, переносяться не вздовж нормалей (як припускали деякі дослідники, котрі, використовуючи рівняння (3.20), знаходили нове положення границі розділу за елементарними переміщеннями вздовж нормалей до її попереднього положення), а вздовж траєкторій руху рідини – ліній течії.

Перейшовши від координат (x, y) до (φ, ψ) за формулами (2.2) та враховуючи умови Коші-Рімана (2.36) і формули для обчислення компонент швидкості (2.27), задача (3.20) переписеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma_n \kappa} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad t > t_0, \\ s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad t > t_0, \\ s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0, \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

де отримане диференціальне рівняння є фактично просторово-одновимірним, оскільки змінна ψ у ньому фігурує як параметр.

Для знаходження часу, що проходить флюїд вздовж лінії течії $\psi(x, y) = \tilde{\psi}$ від точки $\tilde{A}_0(x(\varphi_*, \tilde{\psi}), y(\varphi_*, \tilde{\psi})) \in L_*$ до поточної точки $\tilde{A}(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))$ ($\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$), проінтегруємо звичайне диференціальне рівняння $dt = \frac{\sigma_n \kappa}{v^2} d\varphi$, яке отримали з (3.21), аналогічно до [44]:

$$t = T(\varphi, \tilde{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\sigma_n \kappa}{v^2(x(\phi, \tilde{\psi}), y(\phi, \tilde{\psi}))} d\phi. \quad (3.22)$$

Відповідно час початку та повного обводнення продукції експлуатаційної свердловини визначається за формулами [44]:

$$t_{\min} = \min_{0 \leq \psi \leq Q} T(\varphi^*, \psi), \quad t_{\max} = \max_{0 \leq \psi \leq Q} T(\varphi^*, \psi).$$

Алгоритм відшукування лінії розділу Ω_t побудуємо аналогічно до [44, 84, 152, 193] з використанням ідеї методу характеристик та враховуючи, що границя Ω_t не обов'язково проходить через точки динамічної сітки, тобто крок по φ не може бути сталим та, загалом, є відмінним від кроку по φ сіткової області G_ω^y . Використовуючи (3.22) ітераційну формулу для знаходження значення квазіпотенціалу $\tilde{\varphi}_i$ вздовж лінії течії $\psi = \psi_j$, що відповідає шуканому положенню границі розділу Ω_t у відповідний момент часу, запишемо у вигляді:

$\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_{i-1} + \Delta_t \cdot \tilde{\omega}_{i-1, j}$, де значення коефіцієнта $\tilde{\omega} = v^2 / \sigma_n \kappa$ у точках, що не співпадають з вузлами динамічної сітки обчислюємо з використанням лінійної інтерполяції за їх значеннями у навколишніх вузлах

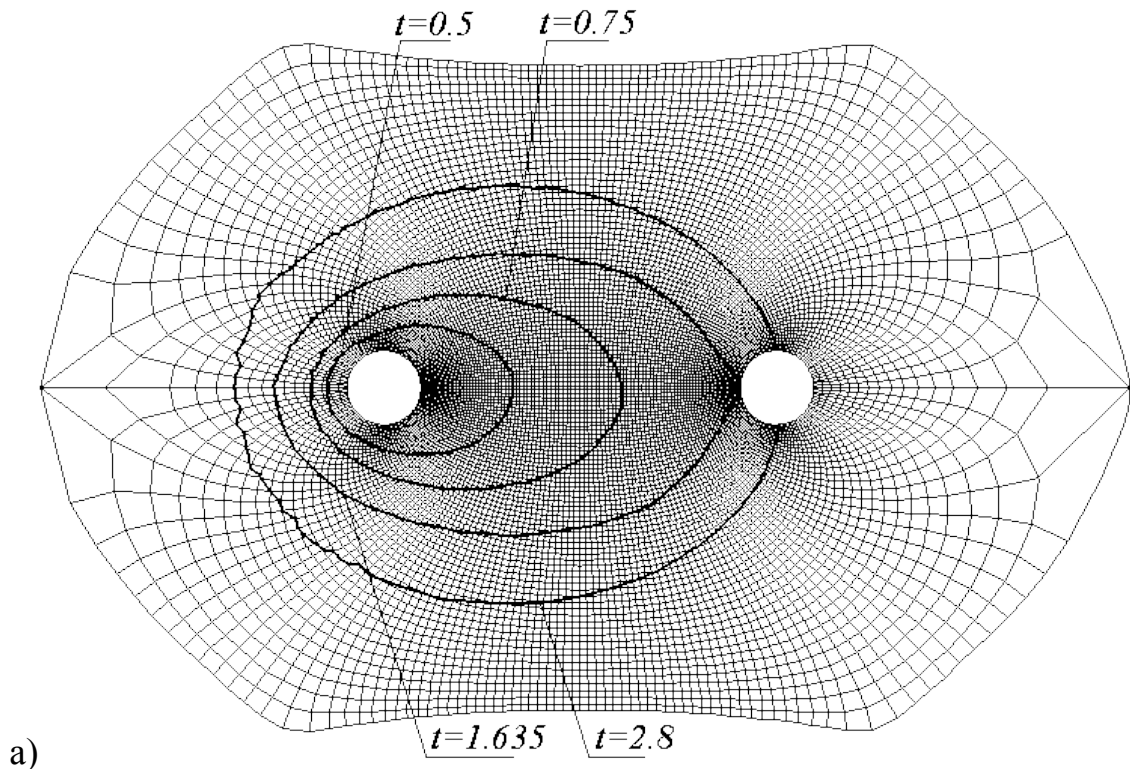
$\tilde{\omega}_{i, j} = \tilde{\omega}_{i, j} + \frac{\tilde{\omega}_{i+1, j} - \tilde{\omega}_{i, j}}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} (\tilde{\varphi}_i - \varphi_i)$. Таким чином, для знаходження зміни за час

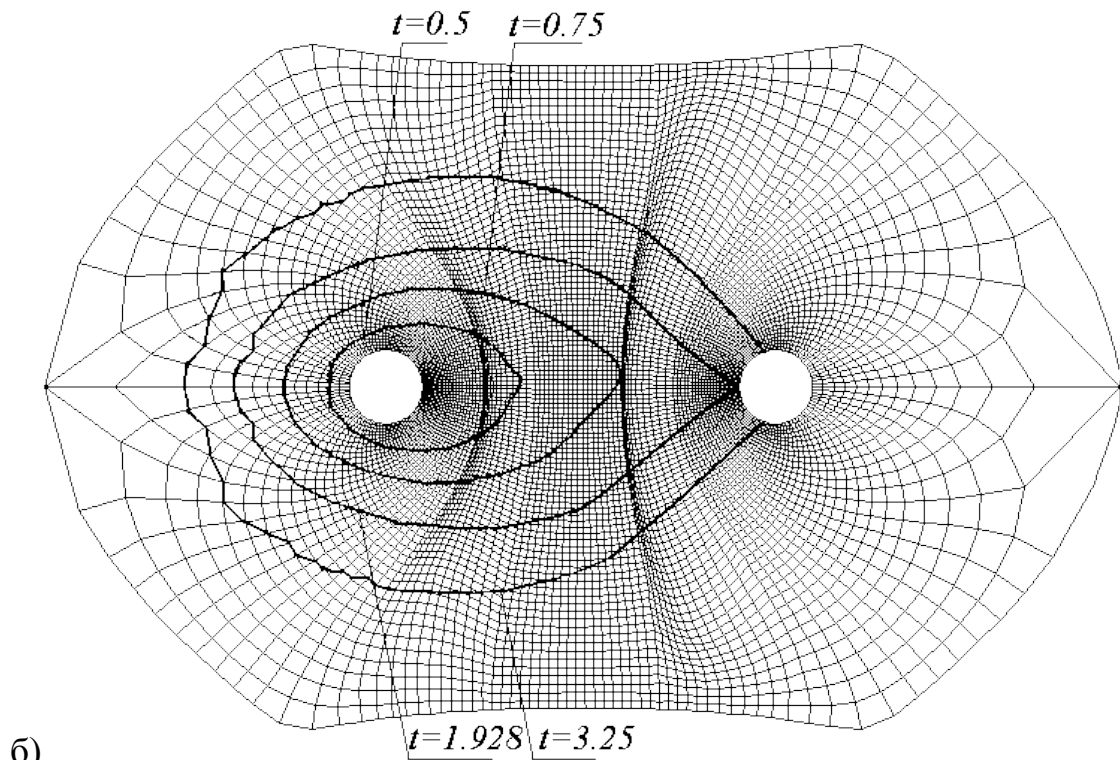
Δ_t положення границі розділу рідин відносно відомого попереднього, порівнюємо час t з часом корекції $t_{i,j} = t_{i-1,j} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\sigma_{i-1,j}}$ (перехід через характеристику), якщо він менший, то корегуємо положення границі розділу за знайденою ітераційною формулою для величини $\tilde{\varphi}_i$, інакше – збільшуємо час на крок Δ_t .

Результати розрахунку динамічної сітки та положення лінії розділу рідин у різні моменти часу за наведеним алгоритмом подані на рис. 3.10 для області $G_{\Sigma}^{(20)}$ із п. 2.3 у випадках: а) однорідного пласта ($\kappa=1$); б)

$$\text{нелінійно-шаруватого пласта } (\kappa = \begin{cases} 1, & \varphi \in [0,0.2) \cup (0.3,0.6) \cup (0.7,1], \\ 1.2, & \varphi \in (0.2,0.3), \\ 0.85, & \varphi \in (0.6,0.7) \end{cases}).$$

Як бачимо, на початковій стадії заводнення пласта поблизу нагнітальної свердловини течія є близькою до радіальної і поступово, з просуванням фронту витіснення у напрямку експлуатаційної свердловини, загострюється.





б)
Рис. 3.10. Динамічні сітки та лінії розділу рідин у різні моменти часу t для однорідного (а) та нелінійно-шаруватого (б) LEF-пласта

Відмітимо також, що швидкість загострення фронту витіснення та його просування у напрямку експлуатаційної свердловини значно залежить від фільтраційних характеристик прилеглих до свердловин зон пласта, а тому при зміні їх пропускних властивостей (спричинених навколосвердловинними деформаціями ґрунту), у певній мірі, можна підвищити продуктивність розробки пласта [120, 151]. Отримані результати повністю корелюються з даними, наведеними в [44, 118, 164].

3.3.2 Моделювання витіснення нафти водою за поршневою схемою

На відміну від п. 3.3.1, де припущення про “однаковість” рідин дозволяло, побудувавши один раз динамічну сітку і поле значень швидкості, визначати у кожний момент часу положення лінії розділу, у випадку різних рідин маємо нелінійні і взаємопов’язані підзадачі: а) на знаходження розв’язку фільтраційної задачі у невідомій області і б) на відшукування положення невідомої границі розділу рідин за невідомим розв’язком фільтраційної задачі.

Розглянемо процес фільтрації двох різних рідин, які не змішуються (наприклад, води і нафти), що підпорядковується закону Дарсі $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$, у трив'язній криволінійній LEF-області (у горизонтальному пласті, що розробляється нагнітальною та експлуатаційною свердловинами) $G_z = G_z^w \cup G_z^o$ (де G_z^w і G_z^o – підобласті фільтрації води і нафти відповідно, розділені рухомою границею Ω_t , на котрій вимагатимемо виконання умови неперервності тиску (квазіпотенціалу) і потоку), який описуємо рівнянням (3.1) з невідомим квазіпотенціалом швидкості $\varphi = \varphi(x, y)$: $\varphi = \varphi^w$ в G_z^w , $\varphi = \varphi^o$ в G_z^o , який на контурах свердловин L_* , L^* приймає значення $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ і $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$ на зовнішньому контурі L . Коефіцієнт проникності відповідно води і нафти у пластових умовах $\kappa = \kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ – кусково-стала функція із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалей і ліній течії ($\kappa_w^{(q,l)}$, $\kappa_o^{(q,l)}$ – деякі додатні числа, Q – невідома повна фільтраційна витрата):

$$\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = \begin{cases} \kappa_w^{(q,l)}, & (x, y) \in G_z^w, \quad \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, \quad q = \overline{1, s_1}, \\ & 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, \quad l = \overline{1, s_2}, \\ \kappa_o^{(q,l)}, & (x, y) \in G_z^o, \quad \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, \quad q = \overline{1, s_1}, \\ & 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, \quad l = \overline{1, s_2}. \end{cases}$$

Використовуючи методи комплексного аналізу, аналогічно до п. 3.3.1, задачу фільтрації зводимо до задачі (2.35) – на квазіконформне (“кусково-конформне”) відображення заданої криволінійної LEF-області із умовними розрізами Γ_* і Γ^* вздовж ліній розділення течії (рис. 3.11) на область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = G_\omega^w \cup G_\omega^o$ – з додаванням до неї умови неперервності квазіпотенціалу і потоку при переході через рухому границю Ω_t . Тут область G_ω така ж, як і описана в п. 3.3.1, а G_ω^w, G_ω^o – підобласті G_ω , що відповідають G_z^w, G_z^o .

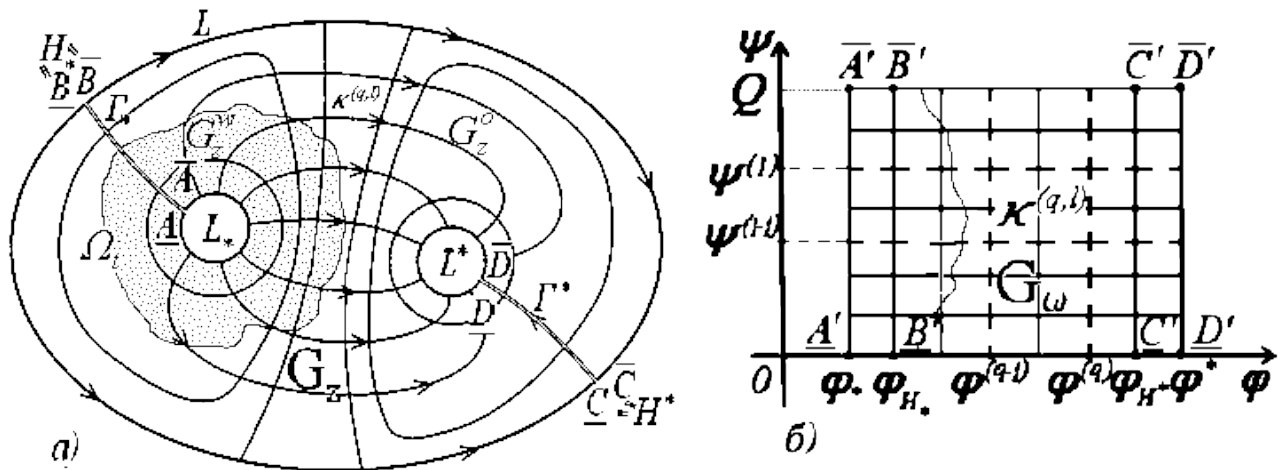


Рис. 3.11. Схема LEF-області типу "нагнітальна-експлуатаційна свердловини" за поршневого витіснення (а) та області комплексного квазіпотенціалу (б)

Обернена до неї крайова задача на квазіконформне відображення області G_ω на G_z^F , наслідуючи методику, викладену у пп. 2.3, 3.3.1, зводиться до задачі (2.37), (3.13) з відповідними умовами на границі розділу рідин:

$$[x]_{\Omega_t} = [y]_{\Omega_t} = 0, \quad [\Xi \cdot \cos(\vec{v}, \vec{n})]_{\Omega_t} = 0. \quad (3.23)$$

Для знаходження положення границі розділу рідин та побудови динамічної сітки і поля швидкості у момент часу $t_0 \leq t \leq T$ використано таку процедуру їх ітераційного наближення. За заданим початковим положенням границі розділу рідин Ω_{t_0} знаходимо розв'язок фільтраційної задачі (3.13), (3.23) за вищенаведеним (у пп. 2.3, 3.3.1) алгоритмом. Положення Ω_t ($\tilde{x}_{k,j} = x(\tilde{\varphi}_k, \psi_j)$, $\tilde{y}_{k,j} = y(\tilde{\varphi}_k, \psi_j)$) у кожний наступний момент часу $t_k = t_{k-1} + \Delta_t$, $k = 1, 2, \dots$ (де Δ_t – деякий заданий достатньо малий часовий крок) шукатимемо, використовуючи поле значень швидкості при $t = t_{k-1}$, відповідні значення вузлів динамічної сітки $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, формулу (3.22) для розрахунку часу $t_{i,j} = T(\varphi_i, \psi_j)$ проходження частинкою рідини шляху від початкової точки (наприклад, на границі нагнітальної свердловини) до поточної вздовж вибраної лінії течії. Відповідне t_k значення квазіпотенціалу $\tilde{\varphi}_k$ вздовж ліній течії $\psi = \psi_j$ ($j = \overline{1, n}$) визначаємо, наприклад, із пропорції [44]:

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} = \frac{\varphi_{i+1} - \tilde{\varphi}_k}{t_{i+1,j} - t_k}, \quad \text{де значення } i \text{ береться таке, при якому } t_{i,j} < t_k < t_{i+1,j}.$$

Після знаходження нового положення лінії розділу рідин знову "перераховуємо" фільтраційну задачу.

3.3.3 Моделювання сумісного руху рідин за схемою Баклея-Леверетта

У цьому пункті, на відміну від п. 3.3.2, розглядаються процеси двофазної фільтрації, при яких має місце не поршневе (повне) витіснення нафти водою, а утворюється достатньо велика зона, де рухаються обидві рідини.

Ці процеси описуватимемо рівняннями руху (узагальненими законами Дарсі) та рівняннями нерозривності течії для кожної з рідин [45]:

$$\bar{v}_o = \frac{\bar{\kappa}\tilde{\kappa}_o}{\mu_o} \cdot \text{grad } \varphi, \quad \sigma_n \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \text{div } \bar{v}_o = 0,$$

$$\bar{v}_w = \frac{\bar{\kappa}\tilde{\kappa}_w}{\mu_w} \cdot \text{grad } \varphi, \quad \sigma_n \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \bar{v}_w = 0,$$

де $s = s(x, y, t)$ – насиченість витісняючої фази,

$\sigma_n, \bar{\kappa}$ – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності,

$\bar{v}_o, \bar{v}_w, \mu_o, \mu_w$ – вектори швидкості та коефіцієнти в'язкості відповідних фаз,

$\tilde{\kappa}_o = \tilde{\kappa}_o(s), \tilde{\kappa}_w = \tilde{\kappa}_w(s)$ – відносні фазові проникності нафти і води відповідно.

Позначивши $\kappa = \kappa(s) = \frac{\bar{\kappa}\tilde{\kappa}_o(s)}{\mu_o} + \frac{\bar{\kappa}\tilde{\kappa}_w(s)}{\mu_w}$, $f(s) = \frac{\mu_o\tilde{\kappa}_w(s)}{\mu_w\tilde{\kappa}_o(s) + \mu_o\tilde{\kappa}_w(s)}$, для сумарної

швидкості $\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{v}_w$ з урахуванням початкових і крайових умов маємо:

$$\text{div}(\kappa \cdot \text{grad } \varphi) = 0, \quad (x, y) \in G_z, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0,$$

$$\sigma_n \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in G_z, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$s|_{L_*} = s^*, \quad s|_{t=t_0} = \tilde{s}(x, y),$$

де L_*, L^*, L – контури тризв'язної криволінійної LEF-області G_z (рис. 3.11), $\tilde{s}(x, y)$ – задана функція розподілу насиченості у початковий момент часу.

Аналогічно до п. 2.3, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до φ , та здійснивши умовні розрізи Γ_* і Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються шуканими точками “призупинки” потоку $H_*(x_*, y_*)$ і $H^*(x^*, y^*)$, задача на побудову динамічної сітки, відшукання повної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ утвореної однозв'язної області $G_z^T = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left(\bigcup_{q=1, l=1}^{\tilde{s}, \tilde{s}} G_\omega^{(q, l)} \right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{\tilde{s}} L_{\omega^*}^{(q)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{s}} L_{\omega 0}^{(l)} \right)$ з невідомим параметром Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \kappa(s(x, y, t)) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(s(x, y, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_{\bar{z}}^{\Gamma}, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ \varphi|_{L_*} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{\overline{AD}} = \int_{L_*} -\kappa(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \kappa(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \\ v(x_*, y_*) &= 0, \quad v(x^*, y^*) = 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\kappa(s)}{\sigma_n} \frac{\partial f(s)}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_*} = s_*, \quad s|_{t=t_0} = \tilde{s}(x, y).$$

Обернена до (3.24) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_{ω} на $G_{\bar{z}}^{\Gamma}$ при невідомій витраті Q та умовних розрізах Γ_* , Γ^* записується у вигляді (2.37), (3.13) із “доповненням” її рівняннями для насиченості, які з урахуванням формул переходу (2.6) і формул для обчислення компонент сумарної швидкості (2.38) мають вигляд:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma_n \kappa} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_{\omega}, \quad t > t_0,$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad t > t_0, \tag{3.25}$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q.$$

Тут дуже важливим є той факт, як зазначено у [45], що рівняння (3.25) є фактично просторово-одновимірним, бо змінну ψ можна вважати параметром. Це дозволяє суттєво спростити загальний підхід до розв’язання вихідної задачі – розщепити алгоритм на послідовність більш простих підзадач: крайових задач на квазіконформні відображення (за відомим з попереднього часового кроку розподілом насиченості $s = s(x, y, t)$ розв’язуємо фільтраційну задачу (2.37), (3.13)) та нелінійних задач для просторово-одновимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з параметром (отримавши розв’язок (2.37), (3.13) відносно квазіпотенціалу швидкості та маючи відомий з попереднього часового кроку розподіл насиченості, знаходимо розв’язок задачі насиченості (3.25)) [45].

3.4. Числово-аналітичні узагальнення методів СЗ при моделюванні квазіідеальних процесів для нелінійно-неоднорідних LEF-пластів з урахуванням зворотнього впливу квазіпотенціалу швидкості на провідність середовища

У задачах, що розглядалися у попередніх параграфах, коефіцієнт

провідності середовища вважався сталою (“усередненою”) чи кусково-сталою функцією. При цьому, розв'язки відповідних різницевих задач у внутрішніх вузлах сітки знаходилися за допомогою відомих числово-аналітичних формул сумарних зображень, використання яких дозволило значно оптимізувати обчислювальний процес.

Проте, при моделюванні процесів руху речовини у неоднорідних пористих чи тріщинуватих водонафтогазових пластах з'являється необхідність визначати провідність середовища як функцію від потенціалу поля швидкості. Зокрема, такі задачі виникають при моделюванні процесів у присвердловинних зонах під час видобутку сланцевого газу чи нафти із скелясто-осадових порід, наприклад, методами гідророзриву. При цьому, провідність самого пласта, як правило, є дуже низькою через значну щільність породи, а поблизу свердловини – суттєво зростає за рахунок тріщин гідророзриву, зменшення тиску через відкачування нафти чи газу тощо.

У цьому параграфі на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і числово-аналітичних представлень, які є узагальненням методів сумарних зображень, розроблено конструктивний підхід до розв'язання для одно- та двозв'язних криволінійних LEF-областей нелінійних крайових задач, котрі моделюють квазіідеальні поля, що є основою для вивчення процесів фільтрації, конвекції, масообміну, дифузії у пористих пластах [19, 21, 31, 32]. При цьому вихідна задача зводиться до обернення квазіконформного відображення заданої фізичної LEF-області на відповідну область комплексного квазіпотенціалу. Обернена задача на квазіконформне відображення є “малонелінійною” (нелінійність – локалізована), і полягає у знаходженні розв'язків системи еліптичних диференціальних рівнянь, що задовольняють задані (чи певним чином сконструйовані) крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сітки на границі області та інші додаткові умови.

Пропонуються два принципово різних підходи до конструювання числово-аналітичних представлень розв'язків відповідних нелінійних задач, які можна вважати узагальненнями методів сумарних зображень.

3.4.1. Подання розв'язків у вигляді ряду за функцією течії

Розглянемо стаціонарний процес фільтрації в криволінійній LEF-області G_z , обмеженій екіпотенціальними лініями $L_* = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ і лініями течії $L^0 = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f_4(x, y) = 0\}$, який описуватимемо рівнянням (3.1) з коефіцієнтом проникності $\kappa = \kappa(\varphi)$, що дозволяє врахувати зворотній вплив потенціалу поля на провідність середовища. (Для спрощення покладемо $\mu_n = 1$.)

При цьому задача на квазіконформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ з невідомою повною витратою $Q = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa(\varphi) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = \int_{L_*} -\kappa(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \kappa(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy. \end{array} \right.$$

Обернена до неї (з урахуванням (2.2)) крайова задача на квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ при невідомій витраті Q записується так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(\varphi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa(\varphi) \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{array} \right.$$

і зводиться до розв'язання рівнянь:

$$L_x \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(\varphi) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad L_y = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega \quad (3.26)$$

з умовами (2.3)–(2.4) і $Q = \int_0^Q \frac{\kappa(\varphi)}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi$.

Числово-аналітичний підхід до знаходження розв'язків цієї задачі сконструйовано з використанням ідеї поетапної фіксації її окремих параметрів шляхом поєднання числових (різницевих) і аналітичних (розділення змінних,

інтегральних представлень тощо) методів.

В області комплексного квазіпотенціалу будемо рівномірну ортогональну сітку (як у п. 2.1) і замінюємо G_ω сітковою областю G_ω^γ , а крайові умови і умови ортогональності – різницевиими аналогами (2.7)–(2.8).

При фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомої величини γ (або шуканої витрати Q) та функцій x і y у граничних вузлах сітки G_ω^γ $x_{0,j}, y_{0,j}, x_{m+1,j}, y_{m+1,j}, x_{i,n+1}, y_{i,n+1}, x_{i,0}, y_{i,0}$ з урахуванням крайових умов (2.7), наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах сітки знаходимо як розв'язки задач:

$$\begin{cases} \mathbb{L}x = 0, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ x(\varphi_*, \psi) = \bar{x}_1(\psi), & x(\varphi^*, \psi) = \bar{x}_2(\psi), & x(\varphi, 0) = \bar{x}_3(\varphi), & x(\varphi, Q) = \bar{x}_4(\varphi); \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}y = 0, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ y(\varphi_*, \psi) = \bar{y}_1(\psi), & y(\varphi^*, \psi) = \bar{y}_2(\psi), & y(\varphi, 0) = \bar{y}_3(\varphi), & y(\varphi, Q) = \bar{y}_4(\varphi), \end{cases} \quad (3.28)$$

де $\bar{x}_1(\psi_j) = x_{0,j}$, $\bar{x}_2(\psi_j) = x_{m+1,j}$, $\bar{y}_1(\psi_j) = y_{0,j}$, $\bar{y}_2(\psi_j) = y_{m+1,j}$, $j = \overline{0, n+1}$, $\bar{x}_3(\varphi_i) = x_{i,0}$, $\bar{x}_4(\varphi_i) = x_{i,n+1}$, $\bar{y}_3(\varphi_i) = y_{i,0}$, $\bar{y}_4(\varphi_i) = y_{i,n+1}$, $i = \overline{0, m+1}$ (тут і надалі через $\bar{u}(\varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) \in G_\omega$, позначено відповідне аналітичне продовження сіткової функції $u_{i,j} = u(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma$).

Розв'язок задачі (3.27) шукатимемо у вигляді:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + v(\varphi, \psi),$$

$$\text{де} \quad \bar{u}(\varphi, \psi) = \bar{x}_3(\varphi) + \frac{\psi}{Q} (\bar{x}_4(\varphi) - \bar{x}_3(\varphi)),$$

або (у вузлах сітки)

$$u_{i,j} = \frac{n+1-j}{n+1} x_{i,0} + \frac{j}{n+1} x_{i,n+1}, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1},$$

а функція $v(\varphi, \psi)$ є розв'язком наступної крайової задачі:

$$\begin{cases} \mathbb{L}v = \bar{F}(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ v(\varphi_*, \psi) = \bar{v}_1(\psi), & v(\varphi^*, \psi) = \bar{v}_2(\psi), & v(\varphi, 0) = 0, & v(\varphi, Q) = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\text{де} \quad \bar{F}(\varphi, \psi) = -\mathbb{L}\bar{u} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \frac{\partial \bar{u}(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \right),$$

$$\bar{v}_1(\psi) = \bar{x}_1(\psi) - \bar{u}(\varphi_*, \psi), \quad \bar{v}_2(\psi) = \bar{x}_2(\psi) - \bar{u}(\varphi^*, \psi).$$

Використовуючи метод розділення змінних, розв'язок задачі (3.29)

шукатимемо у вигляді ряду:

$$v(\varphi, \psi) = \frac{2}{Q} \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \sin \frac{\pi p}{Q} \psi, \quad (3.30)$$

де функції $\Phi_p(\varphi)$ є розв'язками задачі:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \Phi_p'(\varphi) \right)' - \lambda_p \kappa(\varphi) \Phi_p(\varphi) = \bar{F}_p(\varphi), \\ \Phi_p(\varphi_*) = \bar{v}_{1p}, \quad \Phi_p(\varphi^*) = \bar{v}_{2p}, \end{cases} \quad (3.31)$$

що відповідають $\lambda_p = \left(\frac{\pi p}{Q} \right)^2$; $\bar{F}_p(\varphi) = \frac{2}{Q} \int_0^Q \bar{F}(\varphi, \xi) \sin \frac{\pi p}{Q} \xi d\xi$,

$$\bar{v}_{1p} = \frac{2}{Q} \int_0^Q \bar{v}_1(\xi) \sin \frac{\pi p}{Q} \xi d\xi, \quad \bar{v}_{2p} = \frac{2}{Q} \int_0^Q \bar{v}_2(\xi) \sin \frac{\pi p}{Q} \xi d\xi.$$

Скінченно-різницевою аналогом задачі (3.31) будемо за методом балансу (інтегро-інтерполяційним методом), що забезпечує другий порядок точності, збіжність і стійкість отриманої різницевої задачі [136]:

$$\begin{cases} \Phi_{p,i+1} - (1 + \alpha_i + \lambda_p \beta_i) \Phi_{p,i} + \alpha_i \Phi_{p,i-1} = F_{p,i}^*, \quad i = \overline{1, m}, \\ \Phi_{p,0} = \bar{v}_{1p}, \quad \Phi_{p,m+1} = \bar{v}_{2p}, \end{cases} \quad (3.32)$$

де $\Phi_{p,i} = \Phi_p(\varphi_i)$, $\kappa_i = \kappa(\varphi_i)$, $\kappa_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta_\varphi} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \kappa(\xi) d\xi$, $\kappa_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta_\varphi} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \kappa(\xi) d\xi$,

$$\alpha_i = \frac{\kappa_{i-1/2}}{\kappa_{i+1/2}}, \quad \beta_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1/2}}, \quad F_{p,i} = \bar{F}_p(\varphi_i), \quad F_{p,i}^* = \frac{F_{p,i}}{\kappa_{i+1/2}}.$$

Розв'язок (3.32) можна подати у вигляді [135]:

$$\Phi_{p,i} = A_p \mu_{p,i} + B_p \nu_{p,i} + G_{p,i},$$

де A_p, B_p – деякі сталі, що визначаються із крайових умов,

$\mu_{p,i}, \nu_{p,i}$ – лінійно-незалежні розв'язки системи однорідних рівнянь,

$G_{p,i}$ – частковий розв'язок системи неоднорідних рівнянь із нульовими

крайовими умовами: $G_{p,i} = \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i} \nu_{p,q} - \mu_{p,q} \nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1} \nu_{p,q} - \mu_{p,q} \nu_{p,q-1}} F_{p,q}^*$.

Значення $F(\varphi, \psi)$, v_{1p}, v_{2p} у вузлах сітки визначаються за формулами:

$$F_{i,j} = F(\varphi_i, \psi_j) = -\frac{1}{\Delta_\varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1/2}} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta_\varphi} - \frac{1}{\kappa_{i-1/2}} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta_\varphi} \right) =$$

$$= -\left(\frac{(n+1-j)x_{i+1/2,0} + jx_{i+1/2,n+1}}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa_{i+1/2}} - \frac{(n+1-j)x_{i-1/2,0} + jx_{i-1/2,n+1}}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa_{i-1/2}} \right),$$

$$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

$$F_{p,i}^* = \frac{1}{\kappa_{i+1/2}} \sum_{j=1}^n P_{j,p} F_{i,j} = -\frac{\kappa_{i-1/2}(x_{i+1/2,0} + x_{i+1/2,n+1}) - \kappa_{i+1/2}(x_{i-1/2,0} + x_{i-1/2,n+1})}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa_{i+1/2}^2 \kappa_{i-1/2}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^n j P_{j,p}, \quad v_{1,p} = \sum_{j=1}^n x_{0,j} P_{j,p} - (x_{0,0} + x_{0,n+1}) \sum_{j=1}^n j P_{j,p}, \quad v_{2,p} = \sum_{j=1}^n x_{m+1,j} P_{j,p} -$$

$$- (x_{m+1,0} + x_{m+1,n+1}) \sum_{j=1}^n j P_{j,p}, \quad \text{де } P = [P_{j,k}]_{j,k=1}^n = \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi k j}{n+1} \right]_{j,k=1}^n \quad - \text{ квадратна}$$

симетрична матриця P -трансформацій.

Тоді загальний розв'язок задачі (3.29) у вузлах сіткової області G'_ω ($v_{i,j} = v(\varphi_i, \psi_j)$, $i = \overline{0, m+1}$, $j = \overline{1, n}$) матиме вигляд:

$$v_{i,j} = \sum_{p=1}^n P_{j,p} \left(A_p \mu_{p,i} + B_p v_{p,i} - \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i} v_{p,q} - \mu_{p,q} v_{p,i}}{\mu_{p,q-1} v_{p,q} - \mu_{p,q} v_{p,q-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\kappa_{q-1/2}(x_{q+1/2,0} + x_{q+1/2,n+1}) - \kappa_{q+1/2}(x_{q-1/2,0} + x_{q-1/2,n+1})}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa_{q+1/2}^2 \kappa_{q-1/2}} \sum_{j=1}^n j P_{j,p} \right),$$

а загальний розв'язок задачі (3.27):

$$\begin{aligned}
x_{i,j} = & \frac{n+1-j}{n+1} x_{i,0} + \frac{j}{n+1} x_{i,n+1} + \sum_{p=1}^n P_{j,p} \left(A_p \mu_{p,i} + B_p \nu_{p,i} - \right. \\
& \left. - \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i} \nu_{p,q} - \mu_{p,q} \nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1} \nu_{p,q} - \mu_{p,q} \nu_{p,q-1}} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\kappa_{q-1/2} \left(x_{q+1/2,0} + x_{q+1/2,n+1} \right) - \kappa_{q+1/2} \left(x_{q-1/2,0} + x_{q-1/2,n+1} \right)}{(n+1) \Delta_\varphi^2 \kappa_{q+1/2}^2 \kappa_{q-1/2}} \sum_{j=1}^n j P_{j,p} \right). \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Аналогічно, розв'язок задачі (3.28) знаходимо вигляді:

$$\begin{aligned}
y_{i,j} = & \frac{n+1-j}{n+1} y_{i,0} + \frac{j}{n+1} y_{i,n+1} + \sum_{p=1}^n P_{j,p} \left(C_p \mu_{p,i} + D_p \nu_{p,i} - \right. \\
& \left. - \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i} \nu_{p,q} - \mu_{p,q} \nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1} \nu_{p,q} - \mu_{p,q} \nu_{p,q-1}} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\kappa_{q-1/2} \left(y_{q+1/2,0} + y_{q+1/2,n+1} \right) - \kappa_{q+1/2} \left(y_{q-1/2,0} + y_{q-1/2,n+1} \right)}{(n+1) \Delta_\varphi^2 \kappa_{q+1/2}^2 \kappa_{q-1/2}} \sum_{j=1}^n j P_{j,p} \right). \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Часткові випадки функції $\kappa(\varphi)$ дозволяють значно спростити вигляд формул (3.33)–(3.34) чи навіть отримати розв'язки задач (3.27), (3.28) у аналітичному вигляді, що значно покращує ефективність вищенаведеного алгоритму.

Зауважимо, що формули (3.33), (3.34) є узагальненням класичних формул сумарних зображень [119] на випадок задач типу (3.27), (3.28): якщо покласти $\kappa(\varphi) = 1$, то ці формули матимуть вигляд (2.13), де μ_p^i, ν_p^i – розв'язки системи однорідних рівнянь (3.32), що визначаються як корені характеристичного рівняння $r^2 - 2\eta_p r + 1 = 0$: $\mu_p = \eta_p - \sqrt{\eta_p^2 - 1}$, $\nu_p = \eta_p + \sqrt{\eta_p^2 - 1}$, $\eta_p = 1 + \gamma^2 \lambda_p$.

У випадку $\kappa(\varphi) = e^{\sigma\varphi}$ формула (3.33) ((3.34) – аналогічно) також матиме вигляд схожий на класичну формулу сумарних зображень (2.13) із деякими модифікаціями:

$$x_{i,j} = \sum_{p=1}^n P_{j,p} \left(A_p \mu_p^i + B_p \nu_p^i - \frac{\gamma^2 \sigma \Delta_\varphi}{e^{\sigma \Delta_\varphi} - 1} \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_p^{i-q} - \nu_p^{i-q}}{\mu_p - \nu_p} (P_{1,p} x_{q,0} + P_{n,p} x_{q,n+1}) \right),$$

де $\mu_p = \eta_p + \sqrt{\eta_p^2 - e^{\sigma\Delta\varphi}}$, $\nu_p = \eta_p - \sqrt{\eta_p^2 - e^{\sigma\Delta\varphi}}$, $\eta_p = \frac{e^{\sigma\Delta\varphi}}{2} + \gamma^2\lambda_p$.

У випадку $\kappa(\varphi) = \varphi^k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ в (3.31) маємо диференціальне рівняння Бесселя, розв'язки якого можуть бути записані аналітично із використанням циклічних функцій [135]: $\Phi_p(\varphi) = \varphi^{\frac{k+1}{2}} J_{\pm 1/2}\left(\frac{\lambda_p \varphi^{k+1}}{k+1}\right)$, де $J_{\pm 1/2}$ – функції Бесселя першого роду, $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$, $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$.

3.4.2. Подання розв'язків у вигляді ряду за функцією потенціалу

У цьому пункті, як і у п. 3.4.1, на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і числово-аналітичних представлень розв'язків відповідних задач розроблено ефективний конструктивний підхід до розв'язання модельних крайових задач, що описують стаціонарні процеси фільтрації у криволінійних LEF-пластах, провідність яких є функцією від потенціалу поля. Але, на відміну від попереднього пункту, крайова задача розглядається не у чотирикутній області – а у кільцеподібній і, що принципово, тут використано інший спосіб “розщеплення” задачі: числово-аналітичні представлення розв'язків шукаються у вигляді ряду не за функцією течії (як у п. 3.4.1), а за – потенціалом, що суттєво впливає на процес розв'язання задачі, враховуючи залежність коефіцієнта провідності від потенціалу.

Розглянемо аналогічний до п. 3.4.1 процес фільтрації у двозв'язній криволінійній LEF-області G_z , обмеженій замкнутими контурами – екіпотенціалами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, у якій (як у п. 2.1) зробимо умовний розріз Γ вздовж вибраної лінії течії і отримаємо однозв'язну область $G_z^F = G_z \setminus \Gamma$. Наслідуючи викладену вище методологію, приходимо до задачі для рівнянь (3.26) з крайовими умовами (2.5)–(2.6), числово-аналітичні представлення розв'язків якої отримуємо так.

В області комплексного квазіпотенціалу будуємо рівномірну ортогональну сітку і замінюємо G_ω сітковою областю G_ω^γ , а крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сітки до границі і умови на розрізі –

скінченно-різницевиими аналогами відповідно (2.9), (2.10) і ($\kappa_i = \kappa(\varphi_i)$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,0} = \alpha_i(x_{i+1,n} + x_{i+1,1} - x_{i,n} - x_{i,1}) - \beta_i(x_{i,n} + x_{i,1} - x_{i-1,n} - x_{i-1,1}) + \\ \quad + 0.5(x_{i,n} + x_{i,1}), \quad y_{i,0} = \alpha_i(y_{i+1,n} + y_{i+1,1} - y_{i,n} - y_{i,1}) - \\ \quad - \beta_i(y_{i,n} + y_{i,1} - y_{i-1,n} - y_{i-1,1}) + 0.5(y_{i,n} + y_{i,1}), \quad i = \overline{1, m}, \\ \alpha_i = [2\gamma^2 \kappa_i(\kappa_i + \kappa_{i+1})]^{-1}, \beta_i = [2\gamma^2 \kappa_i(\kappa_{i-1} + \kappa_i)]^{-1}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1}, \quad i = \overline{0, m+1}. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Як і в попередньому пункті, при фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомої величини γ (або шуканої витрати Q) та функцій x і y у граничних вузлах сіткової області $x_{0,j}, y_{0,j}, x_{m+1,j}, y_{m+1,j}, x_{i,n+1}, y_{i,n+1}, x_{i,0}, y_{i,0}$ з урахуванням умов (2.9) наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах сіткової області знаходимо як розв'язки задач (3.27)–(3.28).

Розв'язок задачі (3.27) шукатимемо у вигляді:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + v(\varphi, \psi),$$

де $\bar{u}(\varphi, \psi)$, на відміну від п. 3.4.1, вибирається так, щоб $\bar{x}_1(\psi) - \bar{u}(\varphi_*, \psi) = 0$ і $\bar{x}_2(\psi) - \bar{u}(\varphi^*, \psi) = 0$, тобто

$$\bar{u}(\varphi, \psi) = \bar{x}_1(\psi) + \frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi - \varphi_*} (\bar{x}_2(\psi) - \bar{x}_1(\psi)),$$

або (у вузлах сітки)

$$u_{i,j} = u(\varphi_i, \psi_j) = \frac{m+1-i}{m+1} x_{0,j} + \frac{i}{m+1} x_{m+1,j}, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1},$$

а функція $v(\varphi, \psi)$ є розв'язком наступної крайової задачі з нульовими крайовими умовами по φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lv = \bar{F}(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ v(\varphi_*, \psi) = 0, \quad v(\varphi^*, \psi) = 0, \quad v(\varphi, 0) = \bar{v}_3(\varphi), \quad v(\varphi, Q) = \bar{v}_4(\varphi), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

де $\bar{F}(\varphi, \psi) = -L\bar{u} = -\kappa(\varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}(\varphi, \psi)}{\partial \psi^2}$, $\bar{v}_3(\varphi) = \bar{x}_3(\varphi) - \bar{u}(\varphi, 0)$,

$\bar{v}_4(\varphi) = \bar{x}_4(\varphi) - \bar{u}(\varphi, Q)$.

Використовуюючи метод розділення змінних, розв'язок задачі (3.36) шукатимемо у вигляді ряду:

$$v(\varphi, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \Psi_p(\psi), \quad (3.37)$$

де, на відміну від п. 3.4.1, $\Phi_p(\varphi)$ – розв'язки задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \Phi'(\varphi) \right)' + \lambda \kappa(\varphi) \Phi(\varphi) = 0, & \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \\ \Phi(\varphi_*) = \Phi(\varphi^*) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Як відомо [113], при достатньо гладкій функції $\kappa(\varphi) > \kappa_0 \geq 0$ задача (3.38) має нетривіальні розв'язки, тобто існує послідовність дійсних чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p \leq \dots$, $\lambda_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty$, що є власними значеннями оператора $(\kappa^{-1}(\varphi) \Phi'(\varphi))$, яким відповідають функції $\Phi_p(\varphi)$, що утворюють повну ортонормовану з вагою $\kappa(\varphi)$ систему власних функцій ($\|\Phi_p\|^2 = \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \kappa(\xi) \Phi_p^2(\xi) d\xi = 1$). Для знаходження функцій $\Phi_p(\varphi)$ можна скористатись варіаційними (наприклад, методом Рітца) чи різницевими методами.

Для функцій $\Psi_p(\psi)$ маємо задачу:

$$\begin{cases} \Psi_p''(\psi) - \lambda_p \Psi_p(\psi) = \bar{F}_p(\psi), & 0 < \psi < Q, \\ \Psi_p(0) = \bar{v}_{3p}, \quad \Psi_p(Q) = \bar{v}_{4p}, \end{cases} \quad (3.39)$$

де $\bar{F}_p(\psi) = \frac{1}{\|\Phi_p\|^2} \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \bar{F}(\xi, \psi) \kappa(\xi) \Phi_p(\xi) d\xi$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функції

$\bar{F}(\varphi, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{F}_p(\psi) \kappa(\varphi) \Phi_p(\varphi)$ по ортогональній з вагою $\kappa(\varphi)$ системі $\Phi_p(\varphi)$;

$$\bar{v}_{3p} = \frac{1}{\|\Phi_p\|^2} \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \bar{v}_3(\xi) \kappa(\xi) \Phi_p(\xi) d\xi, \quad \bar{v}_{4p} = \frac{1}{\|\Phi_p\|^2} \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \bar{v}_4(\xi) \kappa(\xi) \Phi_p(\xi) d\xi \quad -$$

коефіцієнти Фур'є розкладу по ортогональній з вагою $\kappa(\varphi)$ системі $\Phi_p(\varphi)$

функцій $\bar{v}_3(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{v}_{3p} \Phi_p(\varphi)$ і $\bar{v}_4(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{v}_{4p} \Phi_p(\varphi)$.

Загальний розв'язок крайової задачі (3.39) знаходиться у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння із заданими крайовими умовами і часткового розв'язку неоднорідного рівняння з нульовими крайовими умовами:

$$\Psi_p(\psi) = A_p e^{\sqrt{\lambda_p} \psi} + B_p e^{-\sqrt{\lambda_p} \psi} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^{\psi} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi,$$

де A_p, B_p – деякі сталі, що визначаються із крайових умов.

Тоді загальний розв'язок задачі (3.36) представляється у вигляді:

$$v(\varphi, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \left(A_p e^{\sqrt{\lambda_p} \psi} + B_p e^{-\sqrt{\lambda_p} \psi} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^{\psi} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi \right),$$

а загальний розв'язок задачі (3.27) матиме вигляд:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \left(A_p e^{\sqrt{\lambda_p} \psi} + B_p e^{-\sqrt{\lambda_p} \psi} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^{\psi} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi \right). \quad (3.40)$$

Скінченно-різницевої аналог формули (3.40) запишемо таким чином ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$$x_{i,j} = u_{i,j} + \sum_{p=1}^m \Phi_{p,i} \left(A_p e^{j\sqrt{\lambda_p}} + B_p e^{-j\sqrt{\lambda_p}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \sum_{q=1}^{j-1} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (j-q) \cdot F_{p,q}^* \right), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \text{де } F_{p,j}^* &= \frac{1}{\|\Phi_{p,i}\|_2^2} \sum_{i=1}^m F_{i,j} \kappa_i \Phi_{p,i}, \quad F_{i,j} = -\kappa_i \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_{\psi}^2} \right) = \\ &= -\frac{\kappa_i}{(m+1)\Delta_{\psi}^2} \left((m+1-i)(x_{0,j+1/2} - x_{0,j-1/2}) + i(x_{m+1,j+1/2} - x_{m+1,j-1/2}) \right), \end{aligned}$$

$\Phi_{p,i} = \Phi_p(\varphi_i)$ – значення у вузлах сіткової області G_{ω}^{γ} функцій $\Phi_p(\varphi)$, що є розв'язками задачі (3.38). Для деяких часткових випадків функцій $\kappa(\varphi)$ їх можна виписати аналітично, зокрема, через спеціальні функції. У загальному випадку, функції $\Phi_p(\varphi)$ і відповідні їм значення λ_p знайдемо за допомогою різницевої методів.

Скінченно-різницевої аналог задачі (3.38) будемо за методом балансу (інтегро-інтерполяційним методом), що забезпечує другий порядок точності, збіжність і стійкість отриманої різницевої задачі [135]:

$$\frac{1}{\Delta_{\varphi}} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1/2}} \frac{\Phi_{p,i+1} - \Phi_{p,i}}{\Delta_{\varphi}} - \frac{1}{\kappa_{i-1/2}} \frac{\Phi_{p,i} - \Phi_{p,i-1}}{\Delta_{\varphi}} \right) - \lambda_p \kappa_i \Phi_{p,i} = 0,$$

$$\text{де } \kappa_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta_{\varphi}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \kappa(\xi) d\xi, \quad \kappa_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta_{\varphi}} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \kappa(\xi) d\xi. \quad \text{Позначимо } \alpha_i = \frac{\kappa_{i-1/2}}{\kappa_{i+1/2}}, \quad \beta_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1/2}}$$

($i = \overline{1, m}$) і отримаємо:

$$\begin{cases} \Phi_{p,i+1} - (1 + \alpha_i + \lambda_p \beta_i) \Phi_{p,i} + \alpha_i \Phi_{p,i-1} = 0, \\ \Phi_{p,0} = 0, \quad \Phi_{p,m+1} = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Для знаходження невідомих λ_p ($p \leq m$) необхідно розв'язати відносно λ рівняння $\det A = 0$, де A – тридіагональна матриця порядку $m \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} -(1 + \alpha_1 + \lambda \beta_1) & \alpha_1 & 0 & \dots \\ 1 & -(1 + \alpha_2 + \lambda \beta_2) & \alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи різницевих рівнянь (3.42) можна знайти методом прогонки.

Аналогічно, розв'язок задачі (3.28) матиме вигляд ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$):

$$y_{i,j} = \tilde{u}_{i,j} + \sum_{p=1}^m \Phi_{p,i} \left(C_p e^{j\sqrt{\lambda_p}} + D_p e^{-j\sqrt{\lambda_p}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \sum_{q=1}^{j-1} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (j-q) \cdot \tilde{F}_{p,q}^* \right), \quad (3.43)$$

$$\text{де } \tilde{u}_{i,j} = \frac{m+1-i}{m+1} y_{0,j} + \frac{i}{m+1} y_{m+1,j}, \quad \tilde{F}_{p,j}^* = \frac{1}{\|\Phi_{p,i}\|^2} \sum_{i=1}^m \tilde{F}_{i,j} \kappa_i \Phi_{p,i},$$

$$\tilde{F}_{i,j} = -\kappa_i \left(\frac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta_\psi^2} \right) = -\frac{\kappa_i}{(m+1)\Delta_\psi^2} \left((m+1-i)(y_{0,j+1/2} - y_{0,j-1/2}) + \right. \\ \left. + i(y_{m+1,j+1/2} - y_{m+1,j-1/2}) \right).$$

Часткові випадки функції $\kappa(\varphi)$ дозволяють значно конкретизувати вигляд формул (3.41), (3.43) чи підхід до розв'язання задачі (3.38), або навіть отримати розв'язки задач (3.27), (3.28) у аналітичному вигляді, що значно покращує ефективність розробленого алгоритму.

Зауважимо, що формули (3.41), (3.43) можна вважати узагальненням класичних формул сумарних зображень: якщо покласти $\kappa(\varphi) = 1$ то розв'язками

(3.38) будуть функції $\Phi_p(\varphi) = \frac{2}{\varphi^* - \varphi_*} \sin \frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} (\varphi - \varphi_*)$ (або у точках сітки:

$$\Phi_{p,i} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{\pi p i}{m+1}, \text{ які відповідають власним значенням } \lambda_p = \left(\frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} \right)^2$$

(скінченно-різницеві аналоги яких $\lambda_p = \frac{4}{\Delta_\varphi^2} \sin^2 \frac{\pi p}{2(m+1)}$), а загальний розв'язок

задачі (3.27) матиме вигляд:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + \frac{2}{\varphi^* - \varphi_*} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_p e^{\frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} \psi} + B_p e^{-\frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} \psi} + \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\pi p} \int_0^\psi \left[\operatorname{sh} \frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} (\psi - \xi) \bar{F}_p(\xi) \right] d\xi \right\} \sin \frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} (\varphi - \varphi_*).$$

Скінченно-різницевий аналог цієї формули з урахуванням

$$F_{p,j} = -\sqrt{\frac{2}{(m+1)^3}} \left(\frac{x_{0,j} + x_{m+1,j}}{\Delta_\psi^2} \right) \sum_{i=1}^m i \sin \frac{\pi p i}{m+1}, \text{ запишеться } (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}):$$

$$x_{i,j} = \frac{m+1-i}{m+1} x_{0,j} + \frac{i}{m+1} x_{m+1,j} + \sum_{p=1}^m P_{i,p} \left\{ A_p \mu_p^j + B_p \nu_p^j - \sum_{q=1}^{j-1} \left[\frac{\mu_p^{j-q} - \nu_p^{j-q}}{\mu_p - \nu_p} \times \frac{x_{0,q} + x_{m+1,q}}{\Delta_\psi^2 (m+1)} \sum_{i=1}^m i P_{i,q} \right] \right\} = \sum_{p=1}^m P_{i,p} \left(A_p \mu_p^j + B_p \nu_p^j - \gamma^2 \sum_{q=1}^{j-1} \frac{\mu_p^{j-q} - \nu_p^{j-q}}{\mu_p - \nu_p} (P_{1,p} x_{0,q} + P_{m+1,p} x_{0,q}) \right),$$

(3.44)

де $P = [P_{i,k}]_{i,k=1}^m = \left[\sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{\pi k i}{m+1} \right]_{i,k=1}^m$ – квадратна симетрична матриця P -

трансформацій, $\mu_i^j = e^{\frac{2j}{\Delta_\varphi} \sin \frac{\pi}{2(m+1)}}$, $\nu_i^j = e^{-\frac{2j}{\Delta_\varphi} \sin \frac{\pi}{2(m+1)}}$.

У випадку $\kappa(\varphi) = \varphi^k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ в (3.38) маємо диференціальне рівняння Бесселя і його часткові розв'язки можуть бути записані аналітично із

використанням циклічних функцій $\Phi_p(\varphi) = \varphi^{\frac{k+1}{2}} J_{\pm 1/2} \left(\frac{\lambda_p \varphi^{k+1}}{k+1} \right)$, а загальний

розв'язок задачі (3.38) матиме вигляд:

$$\Phi_p(\varphi) = \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi\sqrt{\lambda_p}}} \left(C_1 \sin \frac{\sqrt{\lambda_p}\varphi^{k+1}}{k+1} + C_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda_p}\varphi^{k+1}}{k+1} \right),$$

де C_1, C_2 – деякі сталі, і враховуючи крайові умови отримаємо:

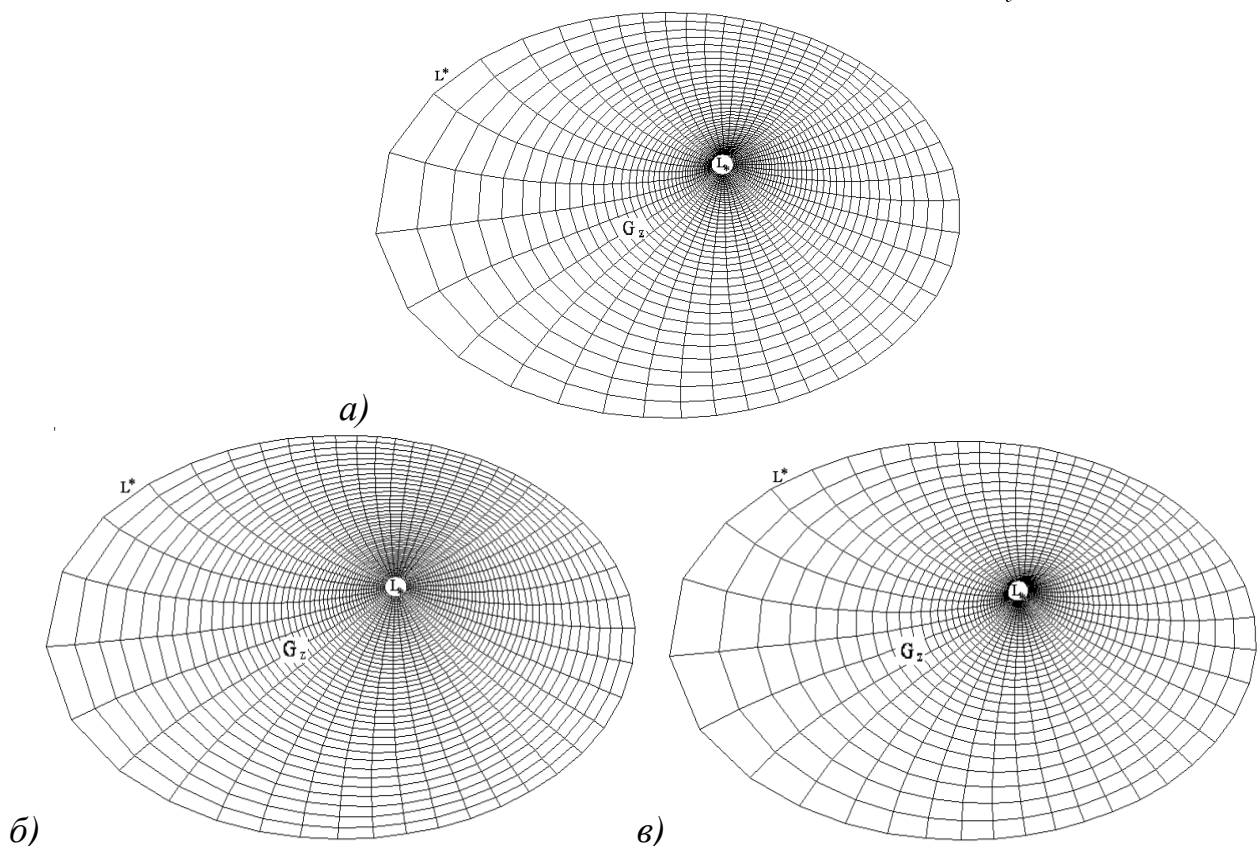
$$\lambda_p = \left(\frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \right)^2, \quad \Phi_p(\varphi) = \frac{2(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \sin \frac{\pi p}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} (\varphi - \varphi_*)^{k+1}.$$

Загальний розв'язок задачі (3.27) у цьому випадку подається у вигляді:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + \frac{2(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(A_p e^{\frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \psi} + B_p e^{-\frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \psi} + \right. \\ \left. + \frac{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}}{\pi p(k+1)} \int_0^{\psi} \operatorname{sh} \frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi \right) \sin \frac{\pi p}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} (\varphi - \varphi_*)^{k+1},$$

а його скінченно-різницевої аналог матиме вигляд (3.44), де $\mu_i^j = e^{\frac{2j \sin \frac{\pi(k+1)}{2(m+1)^{k+1}}}{\Delta\varphi}}$,

$$v_i^j = e^{-\frac{2j \sin \frac{\pi(k+1)}{2(m+1)^{k+1}}}{\Delta\varphi}}, \quad P = [P_{i,j}]_{i,j=1}^m = \left[\sqrt{\frac{2(k+1)}{(m+1)^{k+1}}} \sin \frac{\pi ij}{(m+1)^{k+1}} \right]_{i,j=1}^m.$$



б)

в)

Рис. 3.12. Динамічні сітки для нелінійно-неоднорідного LEF-пласта у випадках:
 $\kappa = 1$ (а), $\kappa(\varphi) = 1 + \varphi$ (б), $\kappa(\varphi) = 1 - 0.5\varphi$ (в)

Як приклад числових розрахунків, розглянемо стаціонарну задачу фільтрації у нафтовому LEF-пласті, що обмежений контуром живлення $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos(t), y = 6 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ і містить свердловину $L_* = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) + 1.5, y = 0.3 \sin(t) + 1.5, 0 \leq t < 2\pi\}$ при заданих $\varphi^* = 1$ і $\varphi_* = 0$. Коефіцієнт провідності подамо у вигляді: $\kappa = \kappa(\varphi) = \kappa_0 \pm \theta_z \cdot \varphi$, де κ_0 – природний коефіцієнт провідності пласта, θ_z – коефіцієнт збурення.

На рис. 3.12 зображено розраховану динамічну сітку у випадках: а) $\kappa = 1$ (отримано $Q = 2.02699$), б) $\kappa(\varphi) = 1 + \varphi$, що відповідає явищу інтенсифікації віддачі пласта ($Q = 2.94801$), в) $\kappa(\varphi) = 1 - 0.5\varphi$, що свідчить про кольматацію привибійної зони свердловини ($Q = 1.59065$).

3.5. Числово-аналітичні методи комплексного аналізу і розщеплень моделювання квазіідеальних процесів для нелінійно-неоднорідних та анізотропних LEF-пластів

У цьому параграфі числово-аналітичні узагальнення методів сумарних зображень, що розроблені у п. 3.4, поширено на розв'язання нелінійної крайової задачі, яка описує фільтраційні процеси з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища [15, 30, 161, 162].

Розглянемо стаціонарний нелінійний процес фільтрації у двозв'язній криволінійній LEF-області G_z ($z = x + iy$), що обмежена замкнутими еквіпотенціалами: $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – внутрішнім і зовнішнім контурами відповідно, з якої зробивши умовний розріз Γ вздовж вибраної лінії течії, отримуємо однозв'язну область $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$.

Процес фільтрації описуватимемо рівнянням (3.1) з коефіцієнтом проникності κ :

$$\kappa(\varphi, \psi) = \tilde{\kappa}(\varphi) \underline{\kappa}(\psi).$$

При цьому задача на обернене квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z^\Gamma$ з невідомою витратою Q матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\kappa}(\varphi)\underline{\kappa}(\psi)}{\mu_n} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\tilde{\kappa}(\varphi)\underline{\kappa}(\psi)}{\mu_n} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \\ y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* \end{array} \right. \quad (3.45)$$

і зводиться до розв'язування рівнянь:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}x &\equiv \frac{1}{\tilde{\kappa}(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\tilde{\kappa}(\varphi)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \underline{\kappa}(\psi) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\underline{\kappa}(\psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \mathbb{L}y &= 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega \end{aligned} \quad (3.46)$$

за умов (2.5)–(2.6) і $Q = \frac{\tilde{\kappa}(\varphi)}{\mu_n} \int_0^Q \frac{\underline{\kappa}(\psi)}{J(\varphi, \psi)} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi$.

Для знаходження числово-аналітичних представлень розв'язків цієї задачі область G_ω замінюємо сітковою областю G'_ω (як у п. 3.4), а крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних граничних еквіпотенціалів і умови на розрізі – різницевиими аналогами (2.9)–(2.10) і:

$$\begin{aligned} x_{i,0} &= \frac{\alpha_{i+1}}{\gamma^2 \tilde{\kappa}_i \underline{\kappa}_0 (\beta_1 + \beta_2)} (x_{i+1,1} + x_{i+1,n} - x_{i,1} - x_{i,n}) - \frac{\alpha_i}{\gamma^2 \tilde{\kappa}_i \underline{\kappa}_0 (\beta_1 + \beta_2)} \times \\ &\quad \times (x_{i,1} + x_{i,n} - x_{i-1,1} - x_{i-1,n}) + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} (\beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,n}), \\ y_{i,0} &= \frac{\alpha_{i+1}}{\gamma^2 \tilde{\kappa}_i \underline{\kappa}_0 (\beta_1 + \beta_2)} (y_{i+1,1} + y_{i+1,n} - y_{i,1} - y_{i,n}) - \frac{\alpha_i}{\gamma^2 \tilde{\kappa}_i \underline{\kappa}_0 (\beta_1 + \beta_2)} \times \\ &\quad \times (y_{i,1} + y_{i,n} - y_{i-1,1} - y_{i-1,n}) + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} (\beta_1 y_{i,1} + \beta_2 y_{i,n}), \\ \alpha_i &= \frac{1}{\tilde{\kappa}_{i-1} + \tilde{\kappa}_i}, \quad \beta_1 = \frac{2\underline{\kappa}_0 \underline{\kappa}_1}{\underline{\kappa}_0 + \underline{\kappa}_1}, \quad \beta_2 = \frac{2\underline{\kappa}_0 \underline{\kappa}_n}{\underline{\kappa}_0 + \underline{\kappa}_n}, \\ x_{i,n+1} &= x_{i,0}, \quad y_{i,n+1} = y_{i,0}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

де $\tilde{\kappa}_i = \tilde{\kappa}(\varphi_i)$, $\underline{\kappa}_j = \underline{\kappa}(\psi_j)$.

При фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомої величини γ (або шуканої витрати Q) та функцій x і y у граничних вузлах сіткової області з урахуванням крайових умов (2.9), наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах сітки знаходимо як розв'язки задач типу (3.27), (3.28) для

оператора L , визначеного (3.46).

Розв'язок задачі (3.27) шукатимемо у вигляді: $x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + v(\varphi, \psi)$, де

$$\bar{u}(\varphi, \psi) = \bar{x}_3(\varphi) + (\bar{x}_4(\varphi) - \bar{x}_3(\varphi))\psi / Q, \quad (3.48)$$

а функція $v(\varphi, \psi)$ є розв'язком наступної крайової задачі:

$$\begin{cases} Lv = \bar{F}(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ v(\varphi_*, \psi) = \bar{v}_*(\psi), & v(\varphi^*, \psi) = \bar{v}^*(\psi), & v(\varphi, 0) = 0, & v(\varphi, Q) = 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

де $\bar{F}(\varphi, \psi) = -L\bar{u}$, $\bar{v}_*(\psi) = \bar{x}_1(\psi) - \bar{u}(\varphi_*, \psi)$, $\bar{v}^*(\psi) = \bar{x}_2(\psi) - \bar{u}(\varphi^*, \psi)$. (3.50)

Використовуючи метод розділення змінних, розв'язок задачі (3.49) шукатимемо у вигляді ряду:

$$v(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \Psi_k(\psi),$$

де $\Psi_k(\psi)$ – розв'язки задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} (\kappa(\psi)\Psi'(\psi))' + \lambda\kappa^{-1}(\psi)\Psi(\psi) = 0, & 0 < \psi < Q, \\ \Psi(0) = \Psi(Q) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Як відомо [113], при достатньо гладкій функції $\kappa(\psi) > \kappa_0 \geq 0$ задача (3.51) має нетривіальні розв'язки, тобто існує послідовність дійсних чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, що є власними значеннями оператора рівняння (3.51), яким відповідають функції $\Psi_k(\psi)$, що утворюють повну, ортонормовану з вагою $\kappa(\psi)$ ($\|\Psi_k\|^2 = \int_0^Q \kappa(\xi)\Psi_k^2(\xi)d\xi = 1$) систему власних функцій. Для знаходження функцій $\Psi_k(\psi)$ можна скористатись варіаційними (наприклад, методом Рітца) чи різницевими методами.

Для знаходження функцій $\Phi_k(\varphi)$, що відповідають власним значенням λ_k , маємо задачу:

$$\begin{cases} (\tilde{\kappa}^{-1}(\varphi)\Phi_k'(\varphi))' - \lambda_k\tilde{\kappa}(\varphi)\Phi_k(\varphi) = \bar{F}_k(\varphi), & \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \\ \Phi_k(\varphi_*) = \bar{v}_{*k}, & \Phi_k(\varphi^*) = \bar{v}_{*k}^*, \end{cases} \quad (3.52)$$

де
$$\bar{F}_k(\varphi) = \frac{1}{\|\Psi_k\|^2} \int_0^Q \bar{F}(\varphi, \xi)\kappa(\xi)\Psi_k(\xi)d\xi,$$

$$\bar{v}_{*k} = \frac{1}{\|\Psi_k\|^2} \int_0^Q \bar{v}_*(\xi)\kappa(\xi)\Psi_k(\xi)d\xi, \quad \bar{v}_{*k}^* = \frac{1}{\|\Psi_k\|^2} \int_0^Q \bar{v}^*(\xi)\kappa(\xi)\Psi_k(\xi)d\xi. \quad (3.53)$$

Розв'язок (3.52), повторюючи той же підхід, що і для (3.27), (3.28), можна шукати у вигляді

$$\Phi_k(\varphi) = \Phi_k^\circ(\varphi) + \Phi_k^\bullet(\varphi),$$

де $\Phi_k^\circ(\varphi) = \bar{v}_{*k} + \frac{\varphi}{\varphi^* - \varphi_*} (\bar{v}_{*k}^* - \bar{v}_{*k})$, а $\Phi_k^\bullet(\varphi)$ є розв'язком крайової задачі:

$$\begin{cases} A\Phi_k^\bullet \equiv \left(\tilde{\kappa}^{-1}(\varphi)\Phi_k^{\bullet'}(\varphi) \right)' - \lambda_k \tilde{\kappa}(\varphi)\Phi_k^\bullet(\varphi) = \bar{F}_k^\bullet(\varphi), & \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \\ \Phi_k^\bullet(\varphi_*) = 0, & \Phi_k^\bullet(\varphi^*) = 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

де $\bar{F}_k^\bullet(\varphi) = \bar{F}_k(\varphi) - A\Phi_k^\circ$.

Задачу (3.54) при $\tilde{\kappa}(\varphi) > 0$ можна розглядати як варіаційну, а її наближений розв'язок шукати у вигляді $\Phi_k^\bullet(\varphi) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_k^{(i)}(\varphi)$, де $\Phi_k^{(i)}(\varphi)$ – деякі базисні функції, що задовольняють крайові умови, а коефіцієнти α_i знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j (\Phi_k^{(i)}, \Phi_k^{(j)})_A = (\Phi_k^{(i)}, \bar{F}_k^\bullet), \quad i = \overline{1, N}.$$

У деяких випадках розв'язок (3.52) зручно подати у вигляді:

$$\Phi_k(\varphi) = \Phi_k^\circ(\varphi) + \Phi_k^\bullet(\varphi),$$

де $\Phi_k^\circ(\varphi)$ – розв'язок однорідного рівняння із заданими крайовими умовами і $\Phi_k^\bullet(\varphi)$ – розв'язок неоднорідного рівняння з нульовими крайовими умовами.

Зокрема, функції $\Phi_k^\circ(\varphi) = \Phi_k^\circ(A_k, B_k, \varphi) = A_k \Phi_k^{(1)}(\varphi) + B_k \Phi_k^{(2)}(\varphi)$ (A_k, B_k – деякі сталі, що визначаються із крайових умов) можна шукати, наприклад, у вигляді степеневого ряду:

$$\Phi_k^\circ(\varphi) = p_{k0} + p_{k1}\varphi + p_{k2}\varphi^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ki}\varphi^i, \quad (3.55)$$

коефіцієнти якого знаходяться рекурентно шляхом підстановки (3.55) у (3.52)

$$p_{ki+2} = \frac{\lambda_k \tilde{\kappa}^3(\varphi) p_{ki} + (i+1) \tilde{\kappa}'(\varphi) p_{ki+1}}{(i+2)(i+1) \tilde{\kappa}(\varphi)}, \quad p_{k0} = A_k, \quad p_{k1} = B_k;$$

$$\Phi_k^\bullet(\varphi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta) \bar{F}_k(\vartheta) d\vartheta,$$

де функція Гріна $G_k(\varphi, \vartheta)$ виражається через розв'язки однорідного рівняння:

$$G_k(\varphi, \vartheta) = -\tilde{\kappa}(\varphi) \frac{\Phi_k^{(1)}(\varphi)\Phi_k^{(2)}(\vartheta) - \Phi_k^{(1)}(\vartheta)\Phi_k^{(2)}(\varphi)}{\Phi_k^{(1)}(\vartheta)\Phi_k^{(2)}(\vartheta) - \Phi_k^{(1)}(\vartheta)\Phi_k^{(2)}(\vartheta)}.$$

Звідси, розв'язок задачі (3.54) запишеться у вигляді:

$$\Phi_k(\varphi) = A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi) + \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta)\bar{F}_k(\vartheta)d\vartheta,$$

де невідомі сталі A_k, B_k визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi_*) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi_*) = \bar{v}_{*k}, \\ A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi^*) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi^*) = \bar{v}^{**}_k \end{cases} \quad (\bar{v}^{**}_k = \bar{v}^*_k - \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} G_k(\varphi^*, \vartheta)\bar{F}_k(\vartheta)d\vartheta).$$

Таким чином розв'язок задачі (3.49) можна подати у вигляді:

$$v(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\psi) \left(A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi) + \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta)\bar{F}_k(\vartheta)d\vartheta \right),$$

а розв'язок задачі (3.27) відповідно:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\psi) \left(A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi) + \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta)\bar{F}_k(\vartheta)d\vartheta \right). \quad (3.56)$$

Подавши $\bar{u}(\varphi, \psi)$ як
$$\bar{u}(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(\varphi)\Psi_k(\psi),$$

де
$$\bar{u}_k(\varphi) = \|\Psi_k\|^{-2} \int_0^Q \bar{u}(\varphi, \xi) \kappa(\xi) \Psi_k(\xi) d\xi$$

і враховуючи (3.48), (3.50), (3.53), формулу (3.56) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} x(\varphi, \psi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\psi) \left(A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi) + \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta)\bar{F}_k(\vartheta)d\vartheta + \bar{u}_k(\varphi) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\psi) \left(A_k\Phi_k^{(1)}(\varphi) + B_k\Phi_k^{(2)}(\varphi) + \|\Psi_k\|^{-2} \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^Q \kappa(\xi) \Psi_k(\xi) (\bar{F}(\vartheta, \xi) + \bar{u}(\varphi, \xi)) d\xi \right) d\vartheta \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Аналогічно, розв'язок задачі (3.28) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} y(\varphi, \psi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\psi) \left(C_k\Phi_k^{(1)}(\varphi) + D_k\Phi_k^{(2)}(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \|\Psi_k\|^{-2} \int_{\varphi_*}^{\varphi} G_k(\varphi, \vartheta) \left(\int_0^Q \kappa(\xi) \Psi_k(\xi) (\bar{F}(\vartheta, \xi) + \bar{u}(\varphi, \xi)) d\xi \right) d\vartheta \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

де $\bar{u}^*(\varphi, \psi) = \bar{y}_3(\varphi) + \frac{\psi}{Q}(\bar{y}_4(\varphi) - \bar{y}_3(\varphi)), \bar{F}^*(\varphi, \psi) = -L\bar{u}^*.$

Окрім тривіальних випадків, коли $\tilde{\kappa}(\varphi) = 1$ і/або $\underline{\kappa}(\psi) = 1$, які більш детально розглядалися в п. 3.4, цікавою є ситуація коли коефіцієнт κ можна подати у вигляді: $\kappa(\varphi, \psi) = \tilde{\kappa}(\varphi) \cdot \psi^\alpha$ ($\alpha = \text{const}$, $\alpha > 1$). При цьому, в (3.51) маємо диференціальне рівняння Бесселя, розв'язки якого мають вигляд:

$$\Psi_k(\psi) = \psi^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(C_k^{(1)} J_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda_k} \psi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) + C_k^{(2)} J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda_k} \psi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right),$$

або

$$\Psi_k(\psi) = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{\pi \sqrt{\lambda_k}}} \left(C_k^{(1)} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_k} \psi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) + C_k^{(2)} \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_k} \psi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right). \quad (3.59)$$

Підставивши (3.59) у крайові умови (3.51), отримаємо: $\lambda_k = \left(\frac{\pi k (1-\alpha)}{Q^{1-\alpha}} \right)^2$,

$C_k^{(2)} = 0$, а сталі $C_k^{(1)}$ знайдемо з вимог нормування:

$$\|\Psi_k\|^2 = C_k^{(1)} \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{Q^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\pi} \int_0^Q \xi^\alpha \sin^2 \pi k \left(\frac{\xi}{Q} \right)^{1-\alpha} d\xi = 1,$$

тобто

$$\Psi_k(\psi) = \left(\int_0^Q \xi^\alpha \sin^2 \pi k \left(\frac{\xi}{Q} \right)^{1-\alpha} d\xi \right)^{-1} \sin \pi k \left(\frac{\psi}{Q} \right)^{1-\alpha}.$$

Значний інтерес викликає також випадок, коли $\underline{\kappa}(\psi) = \alpha \psi (\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2) \dots (\psi - \psi_s)(\psi - Q) + \beta$, де $\alpha, \beta, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s$ – деякі сталі ($0 < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_s < Q$, $\beta > |\alpha \psi (\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2) \dots (\psi - \psi_s)(\psi - Q)|$), $s = 1, 2, \dots$, що з технічної точки зору означає існування максимальних та мінімальних значень проникності (тріщин і закольматованих чи малопроникних ділянок) у пористому пласті вздовж деяких ліній течії. Зокрема, при $\underline{\kappa}(\psi) = \alpha \psi (Q - \psi)$ задача Штурма-Ліувілля (3.51) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \Psi''(\psi) + \frac{Q-2\psi}{\psi(Q-\psi)} \Psi'(\psi) + \frac{\lambda}{\alpha^2 \psi^2 (Q-\psi)^2} \Psi(\psi) = 0, & 0 < \psi < Q, \\ \Psi(0) = \Psi(Q) = 0, \end{cases}$$

а її розв'язки знаходяться у вигляді $\Psi_k(\psi) = \sum_{i=0}^k a_i \psi^i (Q - \psi)^i$.

Викладена методика застосовна і у випадку неоднорідного анізотропного нафтогазового чи водоносного LEF-пласта, провідність якого задається тензором другого рангу $\kappa = (\kappa_{rs})_{2 \times 2}$, де $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y, \varphi, \psi)$ – обмежені

неперервно-диференційовні функції, що характеризують проникність середовища, його анізотропію і схильність до деформацій [11, 12]. При цьому, рівняння (3.46) та умови ортогональності (2.6) набудуть вигляду відповідно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{11}} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa_{12} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\kappa_{11}} \left(\kappa_J \frac{\partial x}{\partial \psi} - \kappa_{21} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{22}} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \kappa_{21} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\kappa_{22}} \left(\kappa_J \frac{\partial y}{\partial \psi} + \kappa_{12} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \right) &= 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ \kappa_J &= \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} &= \sqrt{\frac{\partial f_*^2}{\partial x} + \frac{\partial f_*^2}{\partial y}} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial y^2}{\partial \varphi}} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_*}, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} &= \sqrt{\frac{\partial f^{*2}}{\partial x} + \frac{\partial f^{*2}}{\partial y}} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial y^2}{\partial \varphi}} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta^*}, \\ \cos \Theta_* &= \frac{\kappa_{11} \frac{\partial f_*^2}{\partial x} + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) \frac{\partial f_*}{\partial x} \frac{\partial f_*}{\partial y} + \kappa_{22} \frac{\partial f_*^2}{\partial y}}{\sqrt{\frac{\partial f_*^2}{\partial x} + \frac{\partial f_*^2}{\partial y}} \sqrt{\left(\kappa_{11} \frac{\partial f_*}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial f_*}{\partial y} \right)^2 + \left(\kappa_{21} \frac{\partial f_*}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial f_*}{\partial y} \right)^2}}, \\ \cos \Theta^* &= \frac{\kappa_{11} \frac{\partial f^{*2}}{\partial x} + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) \frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial f^*}{\partial y} + \kappa_{22} \frac{\partial f^{*2}}{\partial y}}{\sqrt{\frac{\partial f^{*2}}{\partial x} + \frac{\partial f^{*2}}{\partial y}} \sqrt{\left(\kappa_{11} \frac{\partial f^*}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial f^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\kappa_{21} \frac{\partial f^*}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial f^*}{\partial y} \right)^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{де } Q = \int_0^Q \frac{1}{J} \left(\kappa_{22} \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 - (\kappa_{12} + \kappa_{21}) \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \kappa_{11} \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi,$$

а оператор L у задачах (3.27) і (3.28) у випадку, коли $\kappa_{11} = \tilde{\kappa}_{11}(\varphi) \cdot \underline{\kappa}_{11}(\psi)$, $\kappa_{22} = \tilde{\kappa}_{22}(\varphi) \cdot \underline{\kappa}_{22}(\psi)$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$, що моделює ерозійні явища у тріщинуватих, тріщинувато-пористих середовищах, які виникають внаслідок вимивання або розчинення елементів породи, конструкції чи скелету пласта, матиме вигляд відповідно:

$$Lx \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_{22} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad Ly \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_{11} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0.$$

3.6. Висновки до третього розділу

1. Розроблено методику математичного моделювання нелінійних процесів витіснення (одно- та двофазної фільтрації) у шарувато-неоднорідних пористих чи тріщинуватих нафтогазових пластах, ущільнених осадових породах (сланцях) із зонами підвищеної проникності (тріщинами ГРП), в яких лінії розділу шарів неоднорідності наперед невідомі і визначаються з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища, що базується на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, методів сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами (у випадках шаруватих середовищ) чи числово-аналітичних представлень розв'язків (що є узагальненнями методів сумарних зображень на випадки неоднорідних середовищ) і декомпозиції області за методом Шварца.

2. Створено обчислювальну технологію розв'язання нелінійних крайових задач, в яких коефіцієнт провідності середовища залежить від потенціалу поля і від функції течії, для одно-, дво- та трив'язних криволінійних LEF-областей. Побудовані алгоритми забезпечують можливість автоматичного розрахунку координат вузлів динамічної сітки, знаходження ліній розділу шарів (ділянок) сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення повної витрати, розрахунку поля величини швидкості і інших параметрів досліджуваних процесів.

3. Вперше побудовано числово-аналітичні представлення розв'язків відповідних нелінійних крайових задач, що базуються на поєднанні числових (скінченно-різницевих) і аналітичних (розщеплень, інтегральних представлень тощо) методів, і які є узагальненнями методів сумарних зображень на випадки задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами. Їх використання суттєво пришвидшує досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій, дозволяє, у значній мірі, уникати накопичення обчислювальних похибок та є зручним для комп'ютерної реалізації.

4. Вперше розроблено методику синтезу числових методів квазіконформних відображень з декомпозицією області комплексного квазіпотенціалу на підобласті з "накладками". Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області на прошарки сталості коефіцієнта

провідності дає змогу, по-перше, ефективно знаходити (“склеювати”) неперервні розв’язки нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами; по-друге, розв’язувати задачі у більш “зручних” підобластях, аніж уся область вихідної задачі, що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових, сланцевих пластах, де маємо значні співвідношення між розмірами елемента пласта (зони живлення свердловини) і діаметрами свердловин; по-третє, дозволяє розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп’ютерних систем і відповідних комунікаційних програм, що важливо з огляду на великий обсяг обчислювальної роботи для таких класів задач.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЛОВЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У LEF-ПЛАСТАХ

На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца розроблено методику розв'язання нелінійних модельних задач теорії комплексного квазіпотенціалу для нелінійно-шаруватих та нелінійно двоякошаруватих криволінійних LEF-областей за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища та визначення (ідентифікації) параметрів (кусково-сталих значень коефіцієнта провідності, критичних значень квазіпотенціалу на еквіпотенціальних лініях розділу шарів, локальних витрат через ділянки границі, обмежені лініями течії, що розділяють шари) за вимірами на границі.

4.1. Визначення параметрів у нелінійно-шаруватих LEF-пластах

4.1.1. З урахуванням зворотнього впливу потенціалу на провідність середовища

Викладена у попередніх розділах методика моделювання квазіідеальних полів для одно- та багатозв'язних криволінійних LEF-областей, що розроблена на основі синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі, може бути успішно використана не лише для дослідження і числового розв'язання прямих задач на побудову динамічної сітки, знаходження поля швидкості, витрат та інших характерних параметрів моделі, а і для числового знаходження розв'язків певного класу обернених задач.

Обернені коефіцієнтні задачі, як відомо, є некоректними у смислі відсутності єдиності розв'язку і його стійкості за вхідними даними. Універсальних методик розв'язування такого типу задач у загальному вигляді на сьогодні немає, оскільки для доведення єдиності розв'язку задачі визначення лише одного коефіцієнта еліптичного рівняння потрібна додаткова інформація про нескінченну кількість розв'язків відповідних прямих задач [79].

Пропонований спосіб, як і більшість сучасних методів розв'язання таких задач, базується на певному звуженні класу шуканих коефіцієнтів, додатковому використанні особливостей прямих задач та підходів до їх розв'язання.

У цьому параграфі розроблену вище методику розв'язання певного класу прямих задач адаптовано до розв'язання нелінійних задач ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності у підобластях сталості (з урахуванням зворотнього впливу на конфігурацію цих підобластей потенціалу поля), а також значень потенціалу на еквіпотенціальних лініях розділу цих підобластей у криволінійній нелінійно-шаруватій області (тут під нелінійно-шаруватими маємо на увазі середовища із кусково-сталим коефіцієнтом провідності, підобласті сталості якого визначаються еквіпотенціальними лініями). Такі задачі виникають при моделюванні процесів витіснення у нелінійно-шаруватих нафтогазових (сланцевих) пластах, де є необхідність, зокрема, керувати значенням граничного потенціалу на контурі експлуатаційної свердловини з метою збільшення (оптимізації) її дебіту (витрати), впливаючи певним чином на присверловинну зону і змінюючи параметри нагнітальних свердловин та враховувати зворотній вплив потенціалу поля на провідність середовища [75, 143]; у електроімпульсній томографії, де маємо потребу ідентифікувати значення коефіцієнта електропровідності за відомими вимірами на границі досліджуваної області [163] тощо.

Зауважимо також, що у цьому розділі термін “обернена” задача використовуватиметься у двох різних значеннях: а) як обернена коефіцієнтна задача, що полягає в ідентифікації параметрів відповідної математичної моделі; б) як задача на побудову оберненого квазіконформного відображення (обернена задача в сенсі п. 2.1), що виступає у ролі “прямої” задачі для обернених коефіцієнтних.

Пряма задача (на знаходження потенціалу поля і побудову динамічної сітки з визначенням еквіпотенціальних ліній розділу підобластей сталості коефіцієнта провідності) формулюється аналогічно до викладеної у п. 3.1. Стационарний фільтраційний процес у криволінійній LEF-області G_z ($z = x + iy$), обмежений лініями течії $L_0 = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $L^0 = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ і еквіпотенціальними лініями $L_* = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f_4(x, y) = 0\}$ (рис. 4.1), описуємо, як і раніше, рівнянням (3.1) з відповідними крайовими умовами і

коефіцієнтом провідності середовища κ – кусково-сталою функцією, лініями розриву якої є еквіпотенціали (κ_l – дійсні додатні числа):

$$\kappa(\varphi(x, y)) = \begin{cases} \kappa_l, & \varphi^{(l-1)} < \varphi \leq \varphi^{(l)}, \\ l = \overline{1, \tilde{s}}. \end{cases}$$

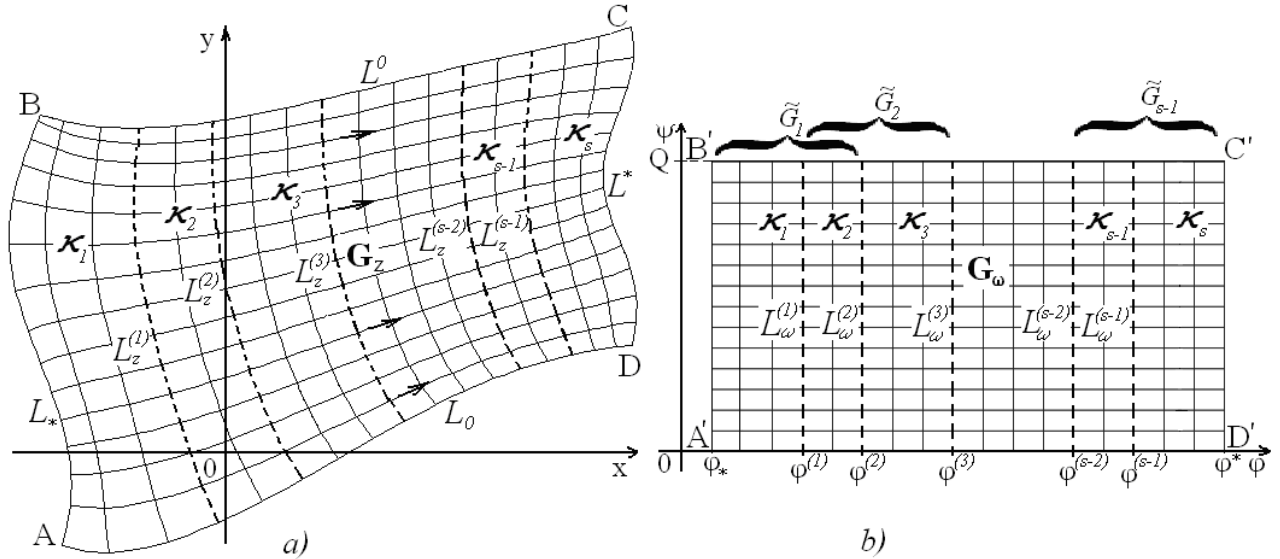


Рис. 4.1. Схема нелінійно-шаруватої LEF-області (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б)

Задача на квазіконформне відображення області $G_z = \left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{s}} G_z^{(l)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{s}-1} L_z^{(l)} \right)$ ($G_z^{(l)} = \{z \in G_z : \varphi^{(l-1)} < \varphi < \varphi^{(l)}\}$, $L_z^{(l)} = \{z \in G_z : \varphi = \varphi^{(l)}\}$) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{s}} G_\omega^{(l)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\tilde{s}-1} L_\omega^{(l)} \right)$ ($G_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(l-1)} < \varphi < \varphi^{(l)}, 0 < \psi < Q\}$, $L_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(l)}\}$) з невідомою повною витратою Q і шуканими лініями розділу $L_z^{(l)}$ має вигляд (3.2), а обернена до неї в сенсі п. 2.1 крайова задача на квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ має вигляд (3.3), де крайові умови і умови ортогональності ліній динамічної сітки до границі замінено на (2.3)–(2.4).

Для знаходження розв’язку цієї задачі в області комплексного квазіпотенціалу визначаємо рівномірну сіткову область $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{\tilde{s}} G_\omega^{\gamma(l)}$ (як у п. 3.1) так, щоб відповідні вузли належали лініям розділу $\varphi = \varphi^{(l)}$ (вважаємо, що таке розбиття можливе). Зауважимо, що у випадку, коли не можливо забезпечити умову “потрапляння” $\varphi^{(l)}$ у вузли сітки, можна використовувати

нерівномірне розбиття, або розраховувати сітку наближено, враховуючи відповідні похибки.

Розв'язки рівнянь Лапласа у внутрішніх вузлах сіткової області комплексного квазіпотенціалу (сукупності суміжних вздовж вертикальних ліній сіткових прямокутників) з урахуванням умов спряження знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень, як у параграфі 3.1, шляхом “розбиття” області G_ω^γ на сіткові прямокутники з “накладками”: $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{\widehat{s}-1} \widetilde{G}_l$, де $\widetilde{G}_l = G_\omega^{\gamma^{(l)}} \bigcup G_\omega^{\gamma^{(l+1)}}$. Отримані підзадачі у підобластях \widetilde{G}_l апроксимуємо різницевиими рівняннями (3.4), а їх розв'язки в процесі ітерацій знаходимо за формулами сумарних зображень (3.7).

Крайові умови та умови ортогональності в околі границі області апроксимуємо рівняннями (2.7), (2.8), а формули для знаходження в процесі ітераційних наближень повної витрати Q і квазіконформного інваріанту γ мають вигляд (2.13) і (3.6) відповідно.

Задача ідентифікації значень коефіцієнта провідності κ_l ($l = \overline{1, \widehat{s}}$) у підобластях сталості $G_z^{(l)}$, що обмежені шуканими екіпотенціальними лініями $L_z^{(l)}$, якщо відомими є витрата Q , критичні значення потенціалу $\varphi^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}-1}$) на лініях розділу та координати (абсциси) точок $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_0 \cap L_z^{(l)}$ (або $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L^0 \cap L_z^{(l)}$), зводиться до розв'язування попередньої задачі з відомими Q і $\varphi^{(l)}$ та невідомими κ_l , а її різницевий аналог конструюється аналогічно, як у попередній (прямій) задачі, де замість формул (2.13) і (3.6) для ітераційного розрахунку Q та γ , використовуються формули для визначення в процесі ітераційних наближень значень коефіцієнта провідності:

$$\kappa_l = \frac{1}{\gamma(m_l - m_{l-1})(n+1)} \sum_{i=m_{l-1}, j=0}^{m_l-1, n} \gamma_{i,j}, \quad l = \overline{1, \widehat{s}}. \quad (4.1)$$

Алгоритм розв'язання задачі ідентифікації коефіцієнта провідності і одночасного розрахунку вузлів динамічної сітки з лініями розділу підобластей сталості κ_l можна описати так. Як і в прямій задачі, вводимо необхідні дані, початкові значення функцій x і y у граничних вузлах сітки G_ω^γ з урахуванням крайових умов і відомих координат точок $H^{(l)}$:

$$x_{m_l,0} = x^{(l)}, \quad y_{m_l,0} = y^{(l)} \quad (\text{або } x_{m_l,n+1} = x^{(l)}, y_{m_l,n+1} = y^{(l)}), \quad l = \overline{1, \widehat{s}-1}, \quad (4.2)$$

задаємо нульові наближення значень коефіцієнта провідності. Обчислюємо шляхом ітераційного процесу по ξ в підобластях \widetilde{G}_l за формулами сумарних зображень початкові значення функцій x і y у внутрішніх вузлах G_ω^γ , перераховуємо κ_l за формулами (4.1).

Далі, уточнюємо значення функцій x і y у граничних вузлах з урахуванням точок $H^{(l)}$ (4.2), знаходимо нове наближення шуканих функцій у внутрішніх вузлах, перераховуємо значення коефіцієнта провідності за (4.1).

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов завершення алгоритму, як у п. 3.1.

Задача ідентифікації критичних значень потенціалу $\varphi^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}-1}$) на шуканих екіпотенціальних лініях розділу $L_z^{(l)}$ підобластей сталості коефіцієнта провідності, якщо відомими є повна витрата Q і значення коефіцієнта провідності κ_l ($l = \overline{1, \widehat{s}}$) у підобластях $G_z^{(l)}$, розв'язується аналогічно до попередньої з наступними незначними змінами.

Задавши початкові наближення значень потенціалів $\varphi^{(l)}$ (і визначивши m_l) та початкові значення функцій x , y у граничних і внутрішніх вузлах сітки (як у попередньому алгоритмі), знаходимо у прошарках \widetilde{G}_l розрахункові значення квазіконформного інваріанту $\widetilde{\gamma}_l$:

$$\widetilde{\gamma}_l = \frac{1}{(m_l - m_{l-1})(n+1)} \sum_{i=m_{l-1}, j=0}^{m_l-1, n} \frac{1}{\kappa_i} \gamma_{i,j}, \quad l = \overline{1, \widehat{s}} \quad (4.3)$$

та порівнюємо їх із $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$. Враховуючи монотонну залежність Q (а, отже, і γ) від різниці потенціалів і співвідношення між κ_l і κ_{l+1} , “уточнюємо” значення $\varphi^{(l)}$, змінюючи відповідним чином m_l до тих пір, поки значення $|\widetilde{\gamma}_l - \gamma|$ не стане мінімальним: у випадку $\kappa_l > \kappa_{l+1}$ – якщо $\widetilde{\gamma}_l < \gamma$, то m_l необхідно зменшувати, інакше – збільшувати, а у випадку $\kappa_l < \kappa_{l+1}$ – навпаки.

Зауважимо, що за наведеною схемою значення $\varphi^{(l)}$ знаходяться з точністю до Δ_φ , тому, для оптимізації алгоритму пропонуємо спочатку провести обчислення за невеликої кількості вузлів розбиття області для знаходження “приблизних” критичних значень потенціалу, які можуть бути

використані як “якісні” початкові наближення для подальших розрахунків з необхідною точністю.

Нехай є можливість виміряти значення потенціалу $\varphi_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}}$) у точках $H_{\bullet}^{(l)}(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)}) \in L_0$ або $H_{\bullet}^{(l)}(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)}) \in L^0$, причому, має місце умова:

$$\varphi_{*} < \varphi_{\bullet}^{(1)} < \varphi^{(1)} < \varphi_{\bullet}^{(2)} < \varphi^{(2)} < \dots < \varphi^{(l-1)} < \varphi_{\bullet}^{(l)} < \varphi^{(l)} < \dots < \varphi^{(\widehat{s}-1)} < \varphi_{\bullet}^{(\widehat{s})} < \varphi^{*}. \quad (4.4)$$

Розглянемо задачу визначення критичних значень потенціалу $\varphi^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}-1}$) на шуканих еквіпотенціальних лініях розділу $L_z^{(l)}$ підобластей сталості коефіцієнта провідності, граничного значення потенціалу φ^{*} та ідентифікації значень коефіцієнта провідності κ_l ($l = \overline{1, \widehat{s}}$) у підобластях $G_z^{(l)}$, якщо відомими є повна витрата Q , граничне значення потенціалу φ_{*} і значення потенціалу $\varphi_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}}$), що задовольняють (4.4), у точках $H_l(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)}) \in L_0$ (випадок 1) або $H_l(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)}) \in L^0$ (випадок 2).

Пропонується наступний алгоритм розв'язання такої задачі. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничного потенціалу φ_{*} і вимірних $\varphi_{\bullet}^{(l)}$, координати точок вимірювання $x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}}$), а також витрату Q . Задаємо кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_{ω}^{γ} (так, щоб значення $\varphi_{\bullet}^{(l)}$ “потрапили” у вузли сітки), параметри точності і початкові наближення граничного φ^{*} і критичних $\varphi^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widehat{s}-1}$) значень потенціалу з урахуванням (4.4). Визначаємо $m_{\bullet}^{(l)}$, m_l , та початкові значення функцій x і y у граничних вузлах, що задовольняють крайові умови і умови: $x_{m_{\bullet}^{(l)}, \chi} = x_{\bullet}^{(l)}$, $y_{m_{\bullet}^{(l)}, \chi} = y_{\bullet}^{(l)}$. (Тут і надалі: $\chi = 0$ у випадку 1 і $\chi = n + 1$ у випадку 2.)

Знаходимо початкові наближення значень κ_l , наприклад, за формулами:

$$\kappa_l = Q / \left(\sqrt{\left(\frac{\varphi_{\bullet}^{(l)} - \varphi_{\bullet}^{(l-1)}}{x_{\bullet}^{(l)} - x_{\bullet}^{(l-1)}} \right)^2 + \left(\frac{\varphi_{\bullet}^{(l)} - \varphi_{\bullet}^{(l-1)}}{y_{\bullet}^{(l)} - y_{\bullet}^{(l-1)}} \right)^2} \right), \quad l = \overline{1, \widehat{s}},$$

де $\varphi_{\bullet}^{(0)} = \varphi_{*}$, $\varphi_{\bullet}^{(\widehat{s})} = \varphi^{*}$, $x_{\bullet}^{(0)} = x_{0, \chi}$, $x_{\bullet}^{(\widehat{s})} = x_{m+1, \chi}$, $y_{\bullet}^{(0)} = y_{0, \chi}$, $y_{\bullet}^{(\widehat{s})} = y_{m+1, \chi}$.

Далі, обчислюємо за ітераційним процесом по ξ в підобластях \tilde{G}_l з використанням формул сумарних зображень початкові значення функцій x і y

у внутрішніх вузлах сітки, розраховуємо φ^* за формулою: $\varphi^* = \varphi_* + (m+1)\gamma\Delta_\psi$ і знаходимо у прошарках \tilde{G}_l розрахункові значення $\tilde{\gamma}_l$ за формулами (4.3) та порівнюємо їх із $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$. Як і в попередній задачі, враховуючи монотонну залежність Q (чи γ) від різниці потенціалів та співвідношення між κ_l і κ_{l+1} , “уточнюємо” значення $\varphi^{(l)}$, змінюючи відповідним чином m_l .

Після цього, перераховуємо значення функцій x і y у граничних вузлах із урахуванням крайових умов, умов ортогональності ліній динамічної сітки на границі та координат заданих точок вимірювання; знаходимо нове наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах за ітераційним процесом по прошарках з використанням формул сумарних зображень; “уточнюємо” значення κ_l ($l = \overline{1, \bar{s}}$) за формулами:

$$\kappa_l = \frac{Q \sum_{i=m^{l-1}}^{m^{(l)}-1} \sqrt{(x_{i+1,\chi} - x_{i,\chi})^2 + (y_{i+1,\chi} - y_{i,\chi})^2}}{2(\varphi^{(l)} - \varphi^{(l-1)}) \sum_{j=0}^n \sqrt{(x_{0,j+1} - x_{0,j})^2 + (y_{0,j+1} - y_{0,j})^2}}$$

розраховуємо нове значення φ^* і $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$; ще раз “перераховуємо внутрішні вузли”; знаходимо розрахункові значення $\tilde{\gamma}_l$ за (4.3) та “підправляємо” $\varphi^{(l)}$.

На рис. 4.2 подані розраховані за цим алгоритмом динамічні сітки та ідентифіковані значення коефіцієнта провідності і квазіпотенціалу в елементі симетрії нелінійно-шаруватого пласта з рядним розташуванням нагнітальних і експлуатаційних свердловин при площовому заводненні [45, 145] (за припущення, що витісняюча речовина і речовина, що видобувається, мають однакові фізичні властивості) для області, яка обмежена лініями: $L^* = \{x = 0.4 \cos \tau + 20, y = 0.4 \sin \tau + 7, \pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2\}$, $L_0 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 2.8\} \cup \{0 \leq x \leq 20, y = 0\} \cup \{x = 20, 0 \leq y \leq 6.8\}$, $L^0 = \{x = 0, 3.2 \leq y \leq 10\} \cup \{0 \leq x \leq 20, y = 10\} \cup \{x = 20, 7.2 \leq y \leq 20\}$, $L_* = \{x = 0.4 \cos \tau, y = 0.4 \sin \tau + 3, -\pi/2 \leq \tau \leq \pi/2\}$, при $m \times n = 120 \times 75$, $\varphi_* = 0$, заданих координатах і потенціалах у точках вимірювання та значеннях повної витрати $Q = 0.585$ (а), $Q = 0.67$ (б), $Q = 0.35$ (в), $Q = 0.4$ (г), що отримані як результати розв’язання прямої задачі при $\kappa_1 = 1$,

$\kappa_2 = 3$, $\varphi^{(1)} = 0.35$ (a), $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3$, $\varphi^{(1)} = 0.15$ (b), $\kappa_1 = \kappa_3 = 1$, $\kappa_2 = 3$,
 $\varphi^{(1)} = 0.25$, $\varphi^{(2)} = 0.85$ (в), $\kappa_1 = \kappa_3 = 2$, $\kappa_2 = 1$, $\varphi^{(1)} = 0.25$, $\varphi^{(2)} = 0.7$ (г), $\varphi^* = 1$.

Як бачимо, максимальна відносна похибка ідентифікованих значень у порівнянні із заданими відповідними значеннями для прямої задачі становить становить $\approx 0.1\%$ (a), $\approx 0.4\%$ (b), $\approx 0.5\%$ (в, г), що є цілком прийнятним для технічних задач [34, 36, 178].

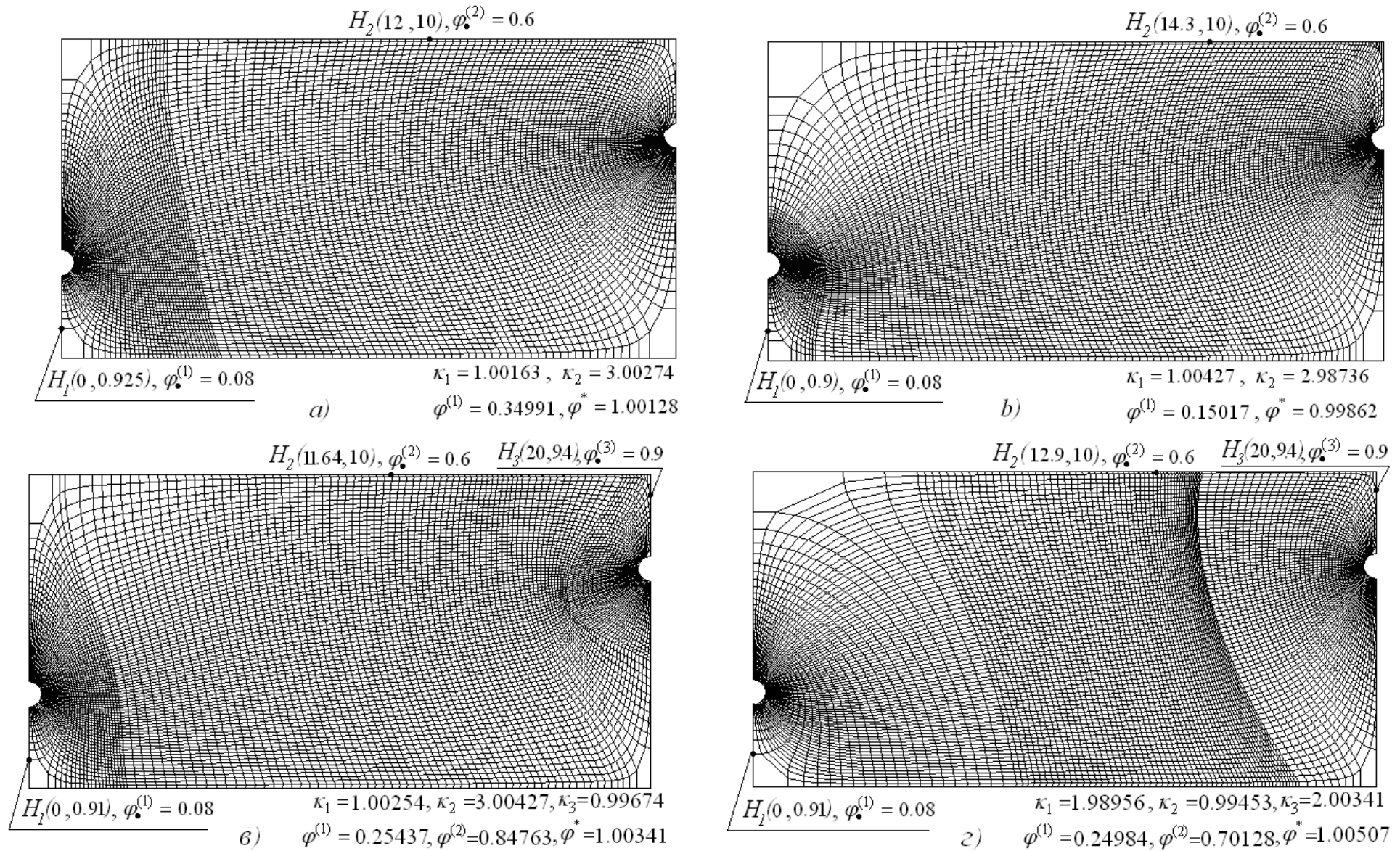


Рис. 4.2. Динамічні сітки та ідентифіковані значення коефіцієнта провідності і квазіпотенціалу в елементі симетрії нелінійно-шаруватого пласта

4.1.2. З урахуванням зворотнього впливу функції течії на провідність середовища

Як уже зазначалося, при моделюванні нелінійних процесів витіснення у нафтогазових (сланцевих) пластах за геологічно складних умов виникає потреба враховувати зворотній вплив характеристик процесу на вихідні характеристики середовища. Сучасні математичні моделі, що описують такі процеси і дозволяють, в тій чи іншій мірі, врахувати ці проблеми (напр., [47]), як правило, є дуже складними, потребують спеціальних методів для їх розв'язання. У попередньому розділі запропоновано дещо інший підхід до моделювання таких процесів, що полягає у представленні їх стаціонарним квазіідеальним полем з так званим фіктивним коефіцієнтом провідності, що “сумарно” характеризує неоднорідну проникність пористого середовища та фільтраційні властивості речовини, що рухається, і їх взаємовплив.

Метою цього параграфу є розвинення запропонованої методики до розв'язання нелінійних задач ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності у підобластях сталості (з урахуванням зворотнього впливу на конфігурацію цих підобластей функції течії), а також значень локальних витрат (потоків) через ділянки границі цих підобластей, що обмежені відповідними шуканими лініями течії, у криволінійних нелінійно-шаруватих LEF-областях (тут, на відміну від п. 4.1, під нелінійно-шаруватими маємо на увазі середовища із кусково-сталим коефіцієнтом провідності, підобласті сталості якого визначаються відповідними лініями течії) [58].

Як і у п. 4.1, розглянемо стаціонарний фільтраційний процес в LEF-області G_z , обмеженій лініями течії L_0, L^0 і еквіпотенціальними лініями L_*, L^* , де, на відміну від попереднього параграфу, κ – коефіцієнт провідності, який характеризує проникність пористого середовища та фільтраційні властивості речовини, що рухається, – невідома кусково-стала функція із розривами вздовж шуканих ліній течії $L_z^{(l)} = \{z \in G_z : \psi = \psi^{(l)}\}$, котрі проходять через задані точки $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_z^{(l)} \cap L_*, l = \overline{1, \bar{s}-1}, H^{(0)} = A, H^{(\bar{s})} = B$ (рис. 4.3 а):

$$\kappa(\psi(x, y)) = \begin{cases} \kappa_l, & \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} = \psi^{(l-1)} + Q_l, \\ l = \overline{1, \bar{s}}, \end{cases}$$

(κ_l – дійсні додатні числа, $\psi^{(0)} = 0$, $Q_l = \int_{L_*^{(l)}} -v_y dx + v_x dy$ – локальні витрати через лінії $L_*^{(l)} = \{z \in L_* : (x, y) \in [H^{(l-1)}, H^{(l)}]\}$).

У випадку, коли LEF-область G_z є двозв'язною, обмеженою еквіпотенціалами L_* , L^* , робимо умовний розріз з берегами L_0 , L^0 вздовж деякої лінії течії і отримуємо однозв'язну область (рис. 4.3 б).

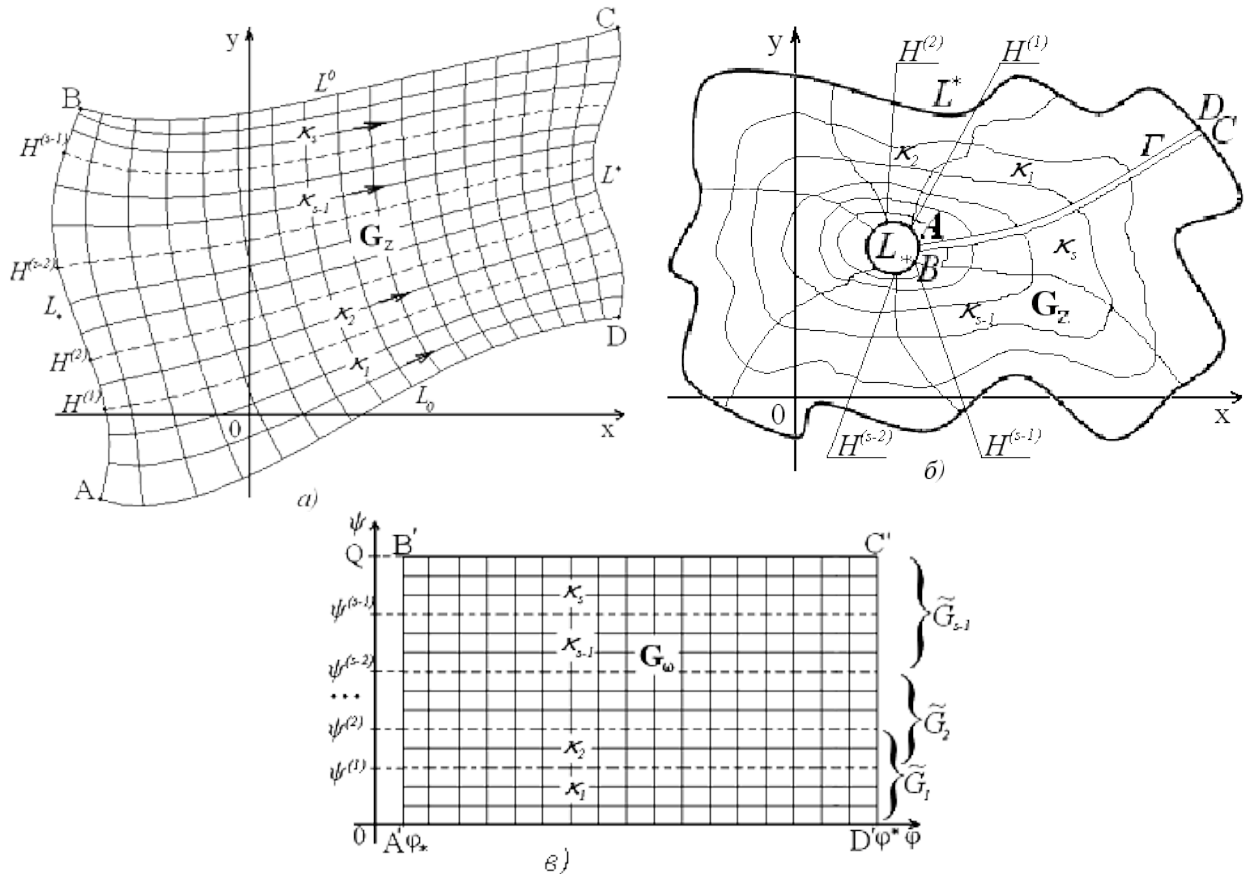


Рис. 4.3. Схеми одно- (а) та двозв'язної (б) нелінійно-шаруватої LEF-області і відповідної їм області комплексного квазіпотенціалу (в)

Як і раніше, розглядаємо більш загальну задачу на квазіконформне відображення області $G_z = \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}} G_z^{(l)}\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} L_z^{(l)}\right)$ ($G_z^{(l)} = \{z \in G_z : \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$) на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}} G_\omega^{(l)}\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} L_\omega^{(l)}\right)$ ($G_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$, $L_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)}\}$) з шуканою повною витратою $Q = \sum_{l=1}^{\bar{s}} Q_l = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ і невідомими лініями розділу $L_z^{(l)}$ (вздовж яких задані відповідні умови спряження):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^{(l)}, \\ \kappa = \kappa_l, (x, y) \in G_z^{(l)}, \quad l = \overline{1, \bar{s}}, \\ \psi(x^{(l)}, y^{(l)}) = \psi^{(l)}, \quad [\psi]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, \bar{s}-1}, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = \int_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Обернена до (4.5) в сенсі п. 2.1 крайова задача на квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ зводиться до задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x(\varphi, \psi) = 0, \quad \Delta y(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^{(l)}, \quad l = \overline{1, \bar{s}}, \\ [(x, y)]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = \left[\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, \\ x(\varphi_*, \psi^{(l)}) = x^{(l)}, \quad y(\varphi_*, \psi^{(l)}) = y^{(l)}, \quad l = \overline{1, \bar{s}-1}, \\ Q = \sum_{l=1}^{\bar{s}} Q_l, \quad Q_l = \kappa_l \int_0^{Q_l} \frac{1}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi \end{array} \right. \quad (4.6)$$

з крайовими умовами (2.3) і умовами ортогональності (2.4).

Для знаходження її розв'язку в області комплексного квазіпотенціалу визначимо сіткову область $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{\bar{s}} G_\omega^{\gamma(l)}$: $G_\omega^{\gamma(l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}, \Delta_\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/(m+1), \psi_j = \Delta_\psi^{(l)} \cdot j, j = \overline{n_{l-1}, n_l}, \psi_{n_l} = \psi^{(l)}, \Delta_\psi^{(l)} = Q_l/(n_l - n_{l-1}), 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_{\bar{s}-1} < n_{\bar{s}} = n+1, m, n, n_l \in \mathbf{N}\}$, $\gamma_l = \Delta_\varphi / \Delta_\psi^{(l)}$ – квазіконформні інваріанти.

Як і у пп. 3.2, 3.3, розв'язки рівнянь Лапласа у внутрішніх вузлах сіткових прямокутників $G_\omega^{\gamma(l)}$ ($l = \overline{1, \bar{s}}$) знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень, для чого область G_ω^γ “розіб'ємо” на сіткові прямокутники з “накладками”: $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} \tilde{G}_l$, де $\tilde{G}_l = G_\omega^{\gamma(l)} \cup G_\omega^{\gamma(l+1)}$, і отримаємо $\bar{s}-1$ підзадачу (проекцію задачі (4.7) стосовно підобластей \tilde{G}_l), які у внутрішніх вузлах прошарків \tilde{G}_l з відповідними умовами спряження вздовж ліній $L_\omega^{(l)}$ апроксимуємо різницевиими рівняннями (3.14)–(3.15), розв'язки котрих обчислюємо за формулами сумарних зображень (3.18), де $\tilde{\kappa}^{(l)} = \kappa_l$,

$$\gamma_\sigma = \frac{\gamma_l + \gamma_{l+1}}{2}, \quad \gamma_l = \frac{1}{\kappa_l(m+1)(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=0, j=n_{l-1}}^{m, n_l-1} \gamma_{i,j}, \quad (\gamma_{i,j} \text{ визначається за (2.11)}),$$

$\tilde{x}_{i,j} = x_{i,j}$, $\tilde{y}_{i,j} = y_{i,j}$. а формули для знаходження витрат Q_l мають вигляд $Q_l = \Delta_\varphi \cdot (n_l - n_{l-1}) / \gamma_l$.

Крайові умови та умови ортогональності в околі границі області, що доповнені заданими координатами точок перетину ліній розділу шарів з відповідною ділянкою границі області, апроксимуємо рівняннями (2.7), (2.8) і

$$x_{0, n_l} = x^{(l)}, \quad y_{0, n_l} = y^{(l)}, \quad l = \overline{1, \bar{s}-1}. \quad (4.7)$$

Задача ідентифікації коефіцієнта провідності κ_l ($l = \overline{1, \bar{s}}$) у підобластях сталості $G_z^{(l)}$, що обмежені шуканими лініями течії $L_z^{(l)}$, якщо відомими є локальні витрати Q_l і координати (абсциси) точок $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_* \cap L_z^{(l)}$ перетину ліній розділу з границею, зводиться до розв'язування (4.6) з відомими Q_l (а, отже, і $\psi^{(l)}$) та невідомими κ_l , а її різницевий аналог конструюється аналогічно, як у прямій задачі, де замість формул для ітераційного розрахунку γ_l , Q_l використовуються формули для визначення в процесі ітераційних наближень значень коефіцієнта провідності:

$$\kappa_l = \frac{1}{\gamma_l(m+1)(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=0, j=n_{l-1}}^{m, n_l-1} \gamma_{i,j}, \quad l = \overline{1, \bar{s}}. \quad (4.8)$$

У випадку, коли є можливість виміряти значення локальних витрат $Q_\bullet^{(l)}$ ($l = \overline{1, \bar{s}+1}$) через ділянки границі $L_\bullet^{(l)}$ між заданими точками $H_\bullet^{(l-1)}(x_\bullet^{(l-1)}, y_\bullet^{(l-1)})$ і $H_\bullet^{(l)}(x_\bullet^{(l)}, y_\bullet^{(l)})$ ($H_\bullet^{(0)} = A$, $H_\bullet^{(\bar{s}+1)} = B$), причому, має місце умова:

$$0 < \psi_\bullet^{(1)} < \psi^{(1)} < \psi_\bullet^{(2)} < \psi^{(2)} < \dots < \psi_\bullet^{(l-1)} < \psi_\bullet^{(l)} < \psi^{(l)} < \dots < \psi_\bullet^{(\bar{s}-1)} < \psi_\bullet^{(\bar{s})} < Q, \quad (4.9)$$

де $\psi_\bullet^{(1)} = Q_\bullet^{(1)}$, $\psi_\bullet^{(l)} = \psi_\bullet^{(l-1)} + Q_\bullet^{(l)}$, $Q = \sum_{l=1}^{\bar{s}+1} Q_\bullet^{(l)}$, можна **визначити значення**

локальних витрат Q_l у підобластях сталості коефіцієнта провідності $G_z^{(l)}$, що обмежені шуканими лініями течії $L_z^{(l)}$, та ідентифікувати значення коефіцієнта провідності κ_l у цих підобластях за відомими значеннями функції течії $\psi_\bullet^{(l)}$, що задовольняють (4.9), у точках $H_\bullet^{(l)}(x_\bullet^{(l)}, y_\bullet^{(l)})$ ($l = \overline{1, \bar{s}}$).

Пропонується наступний алгоритм розв'язання такої задачі. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів φ_* , φ^* , вимірних витрат $Q_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \bar{s} + 1}$) та координати (абсциси) точок вимірювання $H_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \bar{s}}$). Задаємо параметри точності, кількість $m \times n$ вузлів розбиття і формуємо сітку G_{ω}^{γ} (так, щоб значення $\psi_{\bullet}^{(l)}$ “потрапили” у її вузли), знаходимо $\gamma = \Delta_{\varphi} / \Delta_{\psi}$, де $\Delta_{\psi} = Q / (n + 1)$. Задаємо початкові наближення коефіцієнта провідності κ_l ($l = \overline{1, \bar{s}}$), значень $\psi^{(l)}$ ($l = \overline{1, \bar{s} - 1}$) з урахуванням (4.9), визначаємо початкові наближення $n_l = \frac{\psi^{(l)}}{\Delta_{\psi}}$, $Q_l = \psi^{(l)} - \psi^{(l-1)}$, $\gamma_l = \frac{\gamma}{\kappa_l}$.

Також задаємо початкові значення функцій x і y у граничних вузлах сіткової області з урахуванням крайових умов та координат заданих точок вимірювання:

$x_{0, n_{\bullet}^{(l)}} = x_{\bullet}^{(l)}$, $y_{0, n_{\bullet}^{(l)}} = y_{\bullet}^{(l)}$ ($n_{\bullet}^{(l)} = \frac{\psi_{\bullet}^{(l)}}{\Delta_{\psi}}$), “підправляємо” значення κ_l , наприклад,

за формулами:

$$\kappa_l = Q_{\bullet}^{(l)} \left((\varphi^* - \varphi_*) \sqrt{(x_{m+1, n_{\bullet}^{(l)}} - x_{\bullet}^{(l)})^{-2} + (y_{m+1, n_{\bullet}^{(l)}} - y_{\bullet}^{(l)})^{-2}} \right)^{-1}, \quad l = \overline{1, \bar{s}}$$

і обчислюємо шляхом ітераційного процесу по ξ в підобластях \tilde{G}_l за формулами сумарних зображень відповідні початкові значення функцій x і y у внутрішніх вузлах сітки. Перераховуємо значення функцій x і y у граничних вузлах (з урахуванням точок вимірювання) та знаходимо їх нове наближення у внутрішніх вузлах за ітераційним процесом по ξ методом сумарних зображень.

Далі, знаходимо у прошарках $\tilde{G}_l = \{z \in G_z : \psi_{\bullet}^{(l-1)} \leq \psi \leq \psi_{\bullet}^{(l)}\}$ розрахункові значення \tilde{Q}_l за формулами:

$$\tilde{Q}_l = \Delta_{\varphi} \cdot \frac{n_{\bullet}^{(l+1)} - n_{\bullet}^{(l)}}{\tilde{\gamma}_l}, \quad \tilde{\gamma}_l = \frac{1}{(m+1)(n_{\bullet}^{(l+1)} - n_{\bullet}^{(l)})} \sum_{i=0, j=n_{\bullet}^{(l)}}^{m, n_{\bullet}^{(l+1)}-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_j}, \quad (4.10)$$

де $\kappa_j = \kappa_l$ при $n_{\bullet}^{(l)} \leq j \leq n_l$, $\kappa_j = \kappa_{l+1}$ при $n_l < j \leq n_{\bullet}^{(l+1)}$, і порівнюємо їх із заданими $Q_{\bullet}^{(l)}$. Враховуючи монотонну залежність витрат Q_l від значень коефіцієнта провідності κ_l , “уточнюємо” значення $\psi^{(l)}$, змінюючи відповідним чином n_l до тих пір, поки різниця $|\tilde{Q}_l - Q_{\bullet}^{(l)}|$ не стане мінімальною: у випадку

$\kappa_l > \kappa_{l+1}$ – якщо $\tilde{Q}_l > Q_{\bullet}^{(l)}$, то n_l необхідно зменшувати, інакше – збільшувати, а у випадку $\kappa_l < \kappa_{l+1}$ – навпаки. Після цього, знову перераховуємо граничні та внутрішні вузли динамічної сітки, уточнюємо значення κ_l ($l = \overline{1, \bar{s}}$) за формулами (4.8), знаходимо розрахункові значення \tilde{Q}_l за (4.10) та “підправляємо” значення $\psi^{(l)}$.

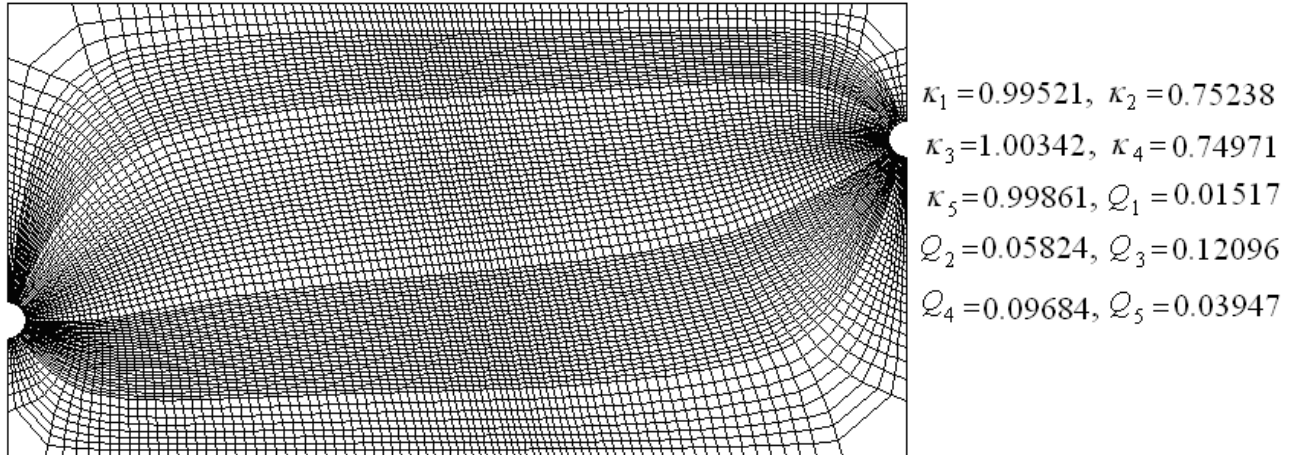


Рис. 4.4. Динамічна сітка та ідентифіковані значення коефіцієнта провідності і локальних витрат в елементі симетрії нелінійно-шаруватого пласта

На рис. 4.4 наведено результати тестового розрахунку за розробленим алгоритмом, якщо геометрія області така ж, як і у числових прикладах до п. 4.1, при $m \times n = 120 \times 75$, $\varphi_* = 0$, $H_{\bullet}^{(0)}(0, 3.4)$, $H_{\bullet}^{(1)}(0.01, 3.399)$, $H_{\bullet}^{(2)}(0.1, 3.39)$, $H_{\bullet}^{(3)}(0.33, 3.23)$, $H_{\bullet}^{(4)}(0.39, 2.9)$, $H_{\bullet}^{(5)}(0.15, 2.63)$, $H_{\bullet}^{(6)}(0, 2.6)$, $Q_{\bullet}^{(1)} = 0.005$, $Q_{\bullet}^{(2)} = 0.042$, $Q_{\bullet}^{(3)} = 0.09$, $Q_{\bullet}^{(4)} = 0.09$, $Q_{\bullet}^{(5)} = 0.078$, $Q_{\bullet}^{(6)} = 0.025$. Як бачимо, максимальна відносна похибка ідентифікованих значень у порівнянні з отриманими із прямої задачі ($\kappa_1 = \kappa_3 = \kappa_5 = 1$, $\kappa_2 = \kappa_4 = 0.75$, $Q_1 = 0.015$, $Q_2 = 0.0575$, $Q_3 = 0.12$, $Q_4 = 0.0975$, $Q_5 = 0.04$) становить $\approx 0.5\%$, що є цілком прийнятним для технічних задач.

4.2. Визначення параметрів у нелінійно двояко-шаруватих LEF-пластах

У цьому параграфі пропонується методика числового розв'язання нелінійних модельних задач ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності у підобластях сталості (з урахуванням зворотнього впливу на конфігурацію цих підобластей потенціалу поля і функції течії), а також критичних значень потенціалу на екіпотенціальних лініях розділу цих підобластей і значень локальних витрат (потоків) через ділянки границі, обмежені лініями течії, що розділяють ці підобласті у криволінійних нелінійно двояко-шаруватих LEF-областях [14, 22, 25, 33–37, 176]. Тут під нелінійно двояко-шаруватими маємо на увазі LEF-середовища із кусково-сталим коефіцієнтом провідності, підобласті сталості якого визначаються відповідними екіпотенціальними лініями і лініями течії.

Як і у попередніх параграфах цього розділу, розглянемо стаціонарний квазіідеальний процес, який описується рівнянням (3.1) з коефіцієнтом провідності κ – невідомою кусково-сталою функцією із розривами вздовж шуканих ліній течії $L_0^{(l)} = \{z \in G_z : \psi = \psi^{(l)}\}$, що проходять через задані точки $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_0^{(l)} \cap L_*$ ($l = \overline{1, \bar{s}-1}$, $H^{(0)} = A$, $H^{(\bar{s})} = B$), і шуканих екіпотенціалей $L_*^{(q)} = \{z \in G_z : \varphi = \varphi^{(q)}\}$ ($q = \overline{1, \bar{s}-1}$), що проходять через задані точки $R^{(q)}(x^{(q)}, y^{(q)}) = L_*^{(q)} \cap L_0$, (при виконанні умов неперервності потенціалу і потоку на цих лініях):

$$\kappa(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \kappa^{(q, l)} = \tilde{\kappa}^{(q)} \cdot \tilde{\kappa}^{(l)}, \text{ при } \begin{cases} \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} = \psi^{(l-1)} + Q_l, \end{cases} \quad (4.11)$$

де $\tilde{\kappa}^{(q)}, \tilde{\kappa}^{(l)}$ ($q = \overline{1, \bar{s}}, l = \overline{1, \bar{s}}$) – дійсні додатні числа, $Q_l = \int_{\tilde{L}_*^{(l)}} -v_y dx + v_x dy$ – локальні витрати через лінії $\tilde{L}_*^{(l)} = \{z \in L_* : (x, y) \in [H^{(l-1)}, H^{(l)}]\}$ (рис. 4.5 а).

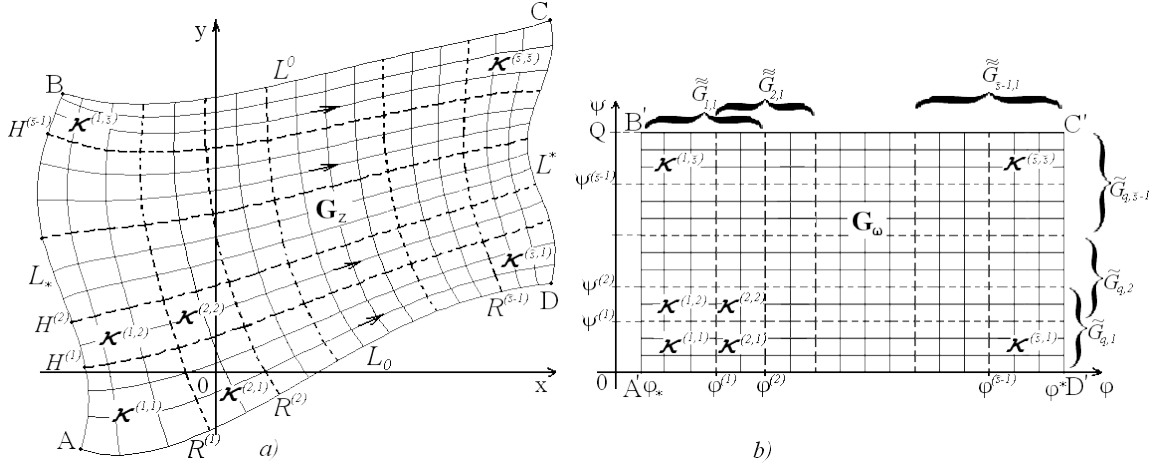


Рис. 4.5. Схема нелінійно двояко-шаруватой LEF-області (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б)

Аналогічно до п. 3.3, розглядаємо більш загальну задачу на квазіконформне відображення LEF-області $G_z = \left(\bigcup_{q,l=1}^{\bar{s},\bar{s}} G_z^{(q,l)} \right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{\bar{s}-1} L_*^{(q)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} L_0^{(l)} \right)$ ($G_z^{(q,l)} = \{z \in G_z : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$) на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу (рис. 4.5 б) $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left(\bigcup_{q,l=1}^{\bar{s},\bar{s}} G_\omega^{(q,l)} \right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{\bar{s}-1} L_{\omega^*}^{(q)} \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} L_{\omega 0}^{(l)} \right)$ ($G_\omega^{(q,l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$, $L_{\omega 0}^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)}\}$, $L_{\omega^*}^{(q)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(q)}\}$, $Q = \sum_{l=1}^{\bar{s}} Q_l$ –

повна витрата) з невідомими лініями розділу $L_*^{(q)}, L_0^{(l)}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^{(q,l)}, \quad q = \overline{1, \bar{s}}, \quad l = \overline{1, \bar{s}},$$

$$\varphi(x^{(q)}, y^{(q)}) = \varphi^{(q)}, \quad [\varphi]_{L_*^{(q)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{L_*^{(q)}} = 0, \quad q = \overline{1, \bar{s} - 1},$$

$$\psi(x^{(l)}, y^{(l)}) = \psi^{(l)}, \quad [\psi]_{L_0^{(l)}} = 0, \quad \left[\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{L_0^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, \bar{s} - 1},$$

$$\kappa = \hat{\kappa}^{(q)} \cdot \check{\kappa}^{(l)}, \quad (x, y) \in G_z^{(q,l)}, \quad q = \overline{1, \bar{s}}, \quad l = \overline{1, \bar{s}},$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = \sum_{l=1}^{\bar{s}} \int_{L_*^{(l)}} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy. \quad (4.12)$$

Обернена до (4.12) в сенсі п. 2.1 крайова задача на квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ зводиться до задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x(\varphi, \psi) = 0, \quad \Delta y(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_{\omega}^{(q,l)}, \\ \kappa = \widehat{\kappa}^{(q)} \cdot \widetilde{\kappa}^{(l)}, \quad (\varphi, \psi) \in G_{\omega}^{(q,l)}, \quad q = \overline{1, \widehat{s}}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s}}, \\ \left[(x, y) \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}, \psi=\psi^{(l)}} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}} = \left[\kappa \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}} = 0, \\ \left[\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = \left[\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, \quad q = \overline{1, \widehat{s}-1}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s}-1}, \\ x(\varphi^{(q)}, 0) = x^{(q)}, \quad y(\varphi^{(q)}, 0) = y^{(q)}, \quad q = \overline{1, \widehat{s}-1}, \\ x(\varphi_*, \psi^{(l)}) = x^{(l)}, \quad y(\varphi_*, \psi^{(l)}) = y^{(l)}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s}-1}, \\ Q = \sum_{l=1}^{\widetilde{s}} Q_l, \quad Q_l = \int_0^{Q_l} \kappa \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi \end{array} \right. \quad (4.13)$$

з умовами типу (2.3)–(2.4).

Побудову різницевого аналога і декомпозицію задачі (4.13) виконуємо за схемою, подібною до тієї, що викладена у п. 3.3.1. В області комплексного квазіпотенціалу визначимо сіткову область $G_{\omega}^{\gamma} = \bigcup_{q,l=1}^{\widehat{s}, \widetilde{s}} G_{\omega}^{\gamma(q,l)}$ так, щоб відповідні вузли належали лініям розділу $\varphi = \varphi^{(q)}$, $\psi = \psi^{(l)}$: $G_{\omega}^{\gamma} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_{\varphi} \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad \Delta_{\varphi} = \frac{\varphi_*^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \varphi_{m_q} = \varphi^{(q)},$
 $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_{\widehat{s}} = m+1, \quad q = \overline{1, \widehat{s}-1}, \quad \psi_j = \Delta_{\psi} \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad \Delta_{\psi} = Q/(n+1),$
 $\psi_{n_l} = \psi^{(l)}, \quad 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_{\widetilde{s}} = n+1, \quad l = \overline{1, \widetilde{s}-1}, \quad m, m_q, n, n_l \in \mathbf{N}\}, \quad (\mathcal{G}_{\omega}^{\gamma(q,l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) \in G_{\omega}^{\gamma}, \quad i = \overline{m_{q-1}, m_q}, \quad j = \overline{n_{l-1}, n_l}\}).$ Область G_{ω}^{γ} “розбиваємо” на дві групи (по горизонталі і по вертикалі) сіткових прямокутників з “накладками” $G_{\omega}^{\gamma} = \bigcup_{q=1}^{\widehat{s}} \left(\bigcup_{l=1}^{\widetilde{s}-1} \widetilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{\widetilde{s}} \left(\bigcup_{q=1}^{\widehat{s}-1} \widetilde{G}_{q,l} \right)$ і шляхом подвійного ітераційного процесу, що описаний у п. 3.3.1, з використанням формул сумарних зображень (3.18)–(3.19) знаходимо значення сіткових функцій $x_{i,j}, y_{i,j}$ у внутрішніх вузлах прошарків $\widetilde{G}_{q,l}$ і $\widetilde{G}_{q,l}$.

Різницеві аналоги крайових умов та умов ортогональності в околі границі області матимуть вигляд (2.7)–(2.8), (4.2), (4.7).

Алгоритм ідентифікації параметрів задачі будується шляхом поетапних ітераційних наближень та почергової фіксації значень коефіцієнта провідності $\hat{\kappa}^{(q)}, \tilde{\kappa}^{(l)}$ ($q = \overline{1, \bar{s}}, l = \overline{1, \bar{s}}$), координат граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ ($i = \overline{0, m+1}, j = \overline{0, n+1}$) з використанням додаткових умов (умов перевизначення), які забезпечують єдиність та стійкість розв'язку.

Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, граничні і критичні (на лініях розділу) значення потенціалу $\varphi_*, \varphi^*, \varphi^{(q)}$ ($q = \overline{1, \bar{s}-1}$), величини локальних витрат Q_l ($l = \overline{1, \bar{s}}$) і координати (абсциси) точок $R^{(q)}(x^{(q)}, y^{(q)}) = L_0 \cap L_*^{(q)}$ та $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_* \cap L_0^{(l)}$ перетину ліній розділу з відповідними ділянками границі області.

Задаємо кількості m, n вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ , параметри точності наближення, початкові значення функцій x, y у граничних вузлах сітки з урахуванням крайових умов і координат заданих точок $R^{(q)}, H^{(l)}$, нульове наближення значень коефіцієнта провідності.

Значення функцій x, y у внутрішніх вузлах сітки отримуємо як результат ітераційного наближення $x_{i,j}, y_{i,j}$ функціями $\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j}, \tilde{\tilde{x}}_{i,j}, \tilde{\tilde{y}}_{i,j}$, що обчислюються шляхом послідовних ітераційних процесів по ξ, δ за формулами сумарних зображень (3.18), (3.19). При цьому, значення граничних вузлів у підобластях $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ визначаються як значення внутрішніх вузлів (вдоль відповідних вертикальних та горизонтальних відрізків) сусідніх підобластей з “накладками”. Зазначимо, що описана процедура видається досить громіздкою, бо містить потрійний ітераційний процес, проте, насправді, достатньо провести лише кілька ітерацій для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цієї обчислювальної процедури при подальшому уточненні інших параметрів задачі.

Зауважимо також, що цей обчислювальний процес природнім чином розпаралелюється, оскільки розрахунки у прошарках $\tilde{G}_{q,l}$ і $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних мережевих технологій.

Далі, перераховуємо значення коефіцієнта провідності, фіксуючи почергово $\hat{\kappa}^{(q)}$ і $\tilde{\kappa}^{(l)}$ за системою рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\kappa}^{(q)} = \frac{1}{\gamma(m_q - m_{q-1})(n+1)} \sum_{l=1}^{s_2} \left(\sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\widetilde{\kappa}^{(l)}} \right), \\ \widetilde{\kappa}^{(l)} = \frac{1}{\gamma(m+1)(n_l - n_{l-1})} \sum_{q=1}^{s_1} \left(\sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\widehat{\kappa}^{(q)}} \right), \\ \kappa^{(q,l)} = \widehat{\kappa}^{(q)} \cdot \widetilde{\kappa}^{(l)} = \frac{1}{\gamma(m_q - m_{q-1})(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \gamma_{i,j}, \quad q = \overline{1, \widehat{s}}, l = \overline{1, \widetilde{s}}. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Основний алгоритм (зовнішній ітераційний цикл) складається з таких кроків: уточнюємо координати граничних вузлів динамічної сітки за формулами (2.7), (2.8) з урахуванням координат точок $R^{(q)}$, $H^{(l)}$ (4.2), (4.7); знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів шляхом ітераційних процесів по прошарках $\widetilde{G}_{q,l}$, $\widetilde{G}_{q,l}$ з використанням формул сумарних зображень (3.18), (3.19); перераховуємо значення коефіцієнта провідності за (4.14).

Нехай є можливість визначити (виміряти) значення потенціалу $\varphi_{\bullet}^{(q)}$ ($q = \overline{1, \widehat{s}}$) у точках $R_{\bullet}^{(q)}(x_{\bullet}^{(q)}, y_{\bullet}^{(q)}) \in L_0$ і значення локальних витрат $Q_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \widetilde{s}+1}$) через ділянки $L_{\bullet}^{(l)}$ границі L_* між заданими точками $H_{\bullet}^{(l-1)}(x_{\bullet}^{(l-1)}, y_{\bullet}^{(l-1)})$ і $H_{\bullet}^{(l)}(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)})$ ($H_{\bullet}^{(0)} = A$, $H_{\bullet}^{(\widehat{s}+1)} = B$), причому, мають місце умови:

$$\varphi_* < \varphi_{\bullet}^{(1)} < \varphi^{(1)} < \varphi_{\bullet}^{(2)} < \varphi^{(2)} < \dots < \varphi^{(q-1)} < \varphi_{\bullet}^{(q)} < \varphi^{(q)} < \dots < \varphi^{(\widehat{s}-1)} < \varphi_{\bullet}^{(\widehat{s})} < \varphi^*, \quad (4.15)$$

$$0 < \psi_{\bullet}^{(1)} < \psi^{(1)} < \psi_{\bullet}^{(2)} < \psi^{(2)} < \dots < \psi^{(l-1)} < \psi_{\bullet}^{(l)} < \psi^{(l)} < \dots < \psi^{(\widehat{s}-1)} < \psi_{\bullet}^{(\widehat{s})} < Q, \quad (4.16)$$

де $\psi_{\bullet}^{(1)} = Q_{\bullet}^{(1)}$, $\psi_{\bullet}^{(l)} = \psi_{\bullet}^{(l-1)} + Q_{\bullet}^{(l)}$, $Q = \sum_{l=1}^{\widehat{s}+1} Q_{\bullet}^{(l)}$.

Розглянемо задачу визначення критичних значень потенціалу $\varphi^{(q)}$ ($q = \overline{1, \widehat{s}-1}$) на шуканих екіпотенціальних лініях розділу $L_*^{(q)}$ підобластей сталості коефіцієнта провідності, значень локальних витрат Q_l ($l = \overline{1, \widetilde{s}}$) у підобластях сталості коефіцієнта провідності, що обмежені шуканими лініями течії $L_0^{(l)}$, та ідентифікації значень коефіцієнта провідності $\kappa^{(q,l)} = \widehat{\kappa}^{(q)} \cdot \widetilde{\kappa}^{(l)}$ у цих підобластях, якщо відомими є значення потенціалу $\varphi_{\bullet}^{(q)}$, що

задовольняють (4.15), у точках $R_{\bullet}^{(q)}(x_{\bullet}^{(q)}, y_{\bullet}^{(q)})(q = \overline{1, \bar{s}})$ і значення функції течії $\psi_{\bullet}^{(l)}$, що задовольняють (4.16), у точках $H_{\bullet}^{(l)}(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)})(l = \overline{1, \bar{s}})$. Вона зводиться до розв'язування (4.13), (2.3)–(2.4) з відповідними додатковими умовами і її різницевий аналог будується аналогічно.

В загальних рисах алгоритм розв'язання цієї задачі можна описати так. Вводимо необхідні параметри заданої області, значення граничних потенціалів φ_* , φ^* , вимірних потенціалів $\varphi_{\bullet}^{(q)}(q = \overline{1, \bar{s}})$ і витрат $Q_{\bullet}^{(l)}(l = \overline{1, \bar{s}+1})$ та координати (абсциси) точок вимірювання $R_{\bullet}^{(q)}(q = \overline{1, \bar{s}})$, $H_{\bullet}^{(l)}(l = \overline{1, \bar{s}})$. Задаємо параметри точності, кількість $m \times n$ вузлів розбиття області і формуємо сітку G_{ω}^{γ} (так, щоб значення $\varphi_{\bullet}^{(q)}$, $\psi_{\bullet}^{(l)}$ “потрапили” у її вузли), знаходимо γ . Задаємо початкові наближення значень коефіцієнта провідності $\hat{\kappa}^{(q)}$, $\check{\kappa}^{(l)}(q = \overline{1, \bar{s}}, l = \overline{1, \bar{s}})$, значень $\varphi^{(q)}(q = \overline{1, \bar{s}-1})$ і $\psi^{(l)}(l = \overline{1, \bar{s}-1})$ з урахуванням (4.15) і (4.16) відповідно, визначаємо початкові наближення $m_q = \varphi^{(q)} / \Delta_{\varphi}$, $n_l = \psi^{(l)} / \Delta_{\psi}$, $Q_l = \psi^{(l)} - \psi^{(l-1)}$. Також задаємо початкові значення функцій x , y у граничних вузлах сіткової області з урахуванням крайових умов та координат заданих точок вимірювання $R_{\bullet}^{(q)}$, $H_{\bullet}^{(l)}$: $x_{m_{\bullet}^{(q)}, 0} = x_{\bullet}^{(q)}$, $y_{m_{\bullet}^{(q)}, 0} = y_{\bullet}^{(q)}(m_{\bullet}^{(q)} = \varphi_{\bullet}^{(q)} / \Delta_{\varphi})$, $x_{0, n_{\bullet}^{(l)}} = x_{\bullet}^{(l)}$, $y_{0, n_{\bullet}^{(l)}} = y_{\bullet}^{(l)}(n_{\bullet}^{(l)} = \psi_{\bullet}^{(l)} / \Delta_{\psi})$, “підправляємо” початкові значення $\hat{\kappa}^{(q)}$, $\check{\kappa}^{(l)}$, наприклад, за формулами:

$$\hat{\kappa}^{(q)} = \frac{Q_{\bullet}^{(1)}}{\check{\kappa}^{(1)}} \left(\sqrt{\left(\frac{\varphi_{\bullet}^{(q)} - \varphi_{\bullet}^{(q-1)}}{x_{\bullet}^{(q)} - x_{\bullet}^{(q-1)}} \right)^2 + \left(\frac{\varphi_{\bullet}^{(q)} - \varphi_{\bullet}^{(q-1)}}{y_{\bullet}^{(q)} - y_{\bullet}^{(q-1)}} \right)^2} \right)^{-1}, \quad q = \overline{1, \bar{s}},$$

$$\check{\kappa}^{(l)} = \frac{Q_{\bullet}^{(l)}}{\hat{\kappa}^{(1)}} \left(\sqrt{\left(\frac{\varphi_{\bullet}^{(1)} - \varphi_*}{x_{\bullet}^{(l)} - x_{\bullet}^{(l-1)}} \right)^2 + \left(\frac{\varphi_{\bullet}^{(1)} - \varphi_*}{y_{\bullet}^{(l)} - y_{\bullet}^{(l-1)}} \right)^2} \right)^{-1}, \quad l = \overline{1, \bar{s}}$$

і обчислюємо шляхом ітераційних процесів у прошарках $\tilde{G}_{q,l}$, $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ початкові значення функцій x , y у внутрішніх вузлах G_{ω}^{γ} .

Перераховуємо значення функцій x , y у граничних вузлах за формулами (2.7), (2.8) з урахуванням точок вимірювання та знаходимо нове наближення x , y у внутрішніх вузлах сітки, перераховуємо $\hat{\kappa}^{(q)}$, $\check{\kappa}^{(l)}$ за системою (4.14).

Далі, знаходимо у підобластях $G_{\omega}^{\gamma(q,l)}$ розрахункові значення $\tilde{\gamma}_{q,l}$ за формулами:

$$\tilde{\gamma}_{q,l} = \frac{1}{(m_q - m_{q-1})(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=m_{q-1}, j=n_{l-1}}^{m_q-1, n_l-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa^{(q,l)}}, \quad (4.17)$$

та порівнюємо їх із $\gamma = \Delta_{\varphi} / \Delta_{\psi}$. Враховуючи монотонну залежність Q (а, отже, і γ) від різниці потенціалів і співвідношення між $\hat{\kappa}^{(q-1)}$ і $\hat{\kappa}^{(q)}$, $\check{\kappa}^{(l-1)}$ і $\check{\kappa}^{(l)}$, “уточнюємо” значення $\varphi^{(q)}$ і $\psi^{(l)}$, змінюючи відповідним чином m_q і n_l до тих пір, поки значення $|\tilde{\gamma}_{q,l} - \gamma|$ не стане мінімальним (почергово фіксуючи відповідні значення m_q і n_l): у випадку $\hat{\kappa}^{(q-1)} > \hat{\kappa}^{(q)}$ – якщо $\tilde{\gamma}_{q,l} < \gamma$, то m_q необхідно зменшувати, інакше – збільшувати, а у випадку $\hat{\kappa}^{(q-1)} < \hat{\kappa}^{(q)}$ – навпаки (для n_l – аналогічно).

Основний алгоритм містить такі кроки: уточнюємо значення функцій x , y у граничних вузлах за крайовими умовами і умовами ортогональності з урахуванням координат точок вимірювання; знаходимо нове наближення значень функцій x , y у внутрішніх вузлах сітки шляхом ітераційних процесів по прошарках $\tilde{G}_{q,l}$, $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ з використанням формул сумарних зображень (3.18), (3.19); перераховуємо значення $\hat{\kappa}^{(q)}$, $\check{\kappa}^{(l)}$ за системою (4.14); знаходимо розрахункові значення $\tilde{\gamma}_{q,l}$ за (4.17) та “підправляємо” значення $\varphi^{(q)}$ і $\psi^{(l)}$.

На рис. 4.6 і в табл. 4.1 наведені отримані в результаті проведених розрахунків динамічна сітка і ідентифіковані значення для області, обмеженої лініями: $L_* = \{z : x = 2 - 2 \cos(y/6), 0 \leq y \leq 3\pi\}$, $L^* = \{z : x = 9 - \cos(y/3), 0 \leq y \leq 3\pi\}$, $L_0 = \{z : 0 \leq x \leq 8, y = 0.5 \sin 0.25\pi x\}$, $L^0 = \{z : 2 \leq x \leq 10, y = 3\pi + 0.1 \sin 0.5\pi x\}$, при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $m \times n = 160 \times 100$. Аналіз результатів показує, що максимальна відносна похибка розрахункових значень у порівнянні із заданими для прямої задачі ($\hat{\kappa}^{(1)} = 1$, $\hat{\kappa}^{(2)} = 2$, $\hat{\kappa}^{(3)} = 1.5$, $\check{\kappa}^{(1)} = 1.5$, $\check{\kappa}^{(2)} = 3$, $\check{\kappa}^{(3)} = 1$, $\varphi^{(1)} = 0.25$, $\varphi^{(2)} = 0.65$, $Q_1 = 0.23777$, $Q_2 = 0.53308$, $Q_3 = 0.20591$) становить $\approx 0.5\%$, що є цілком прийнятним для технічних задач.

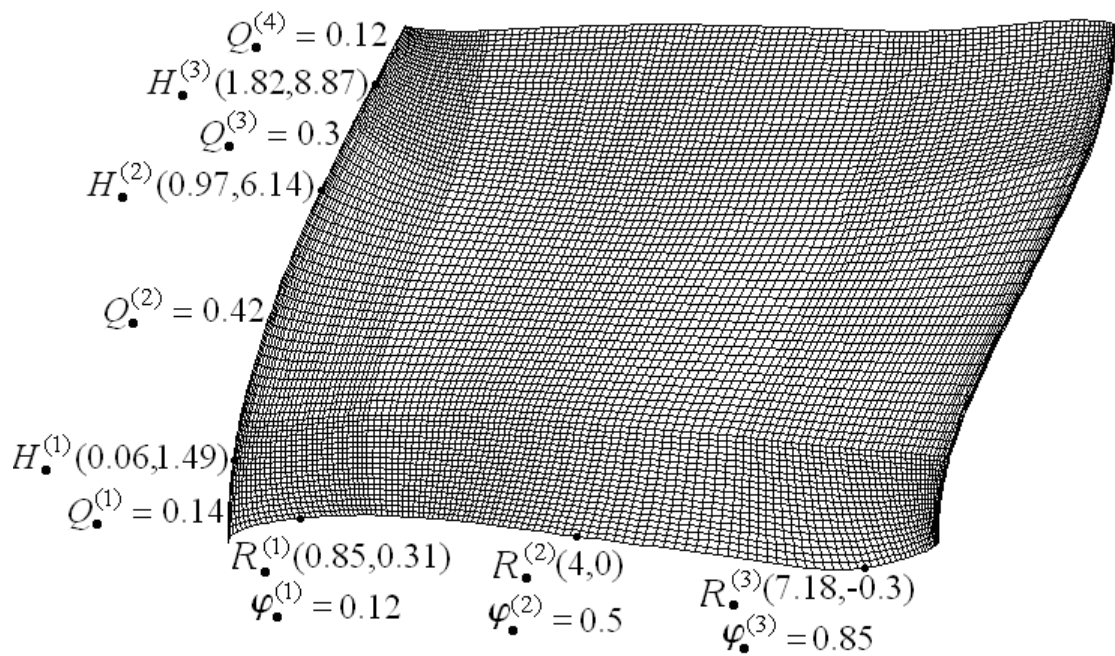
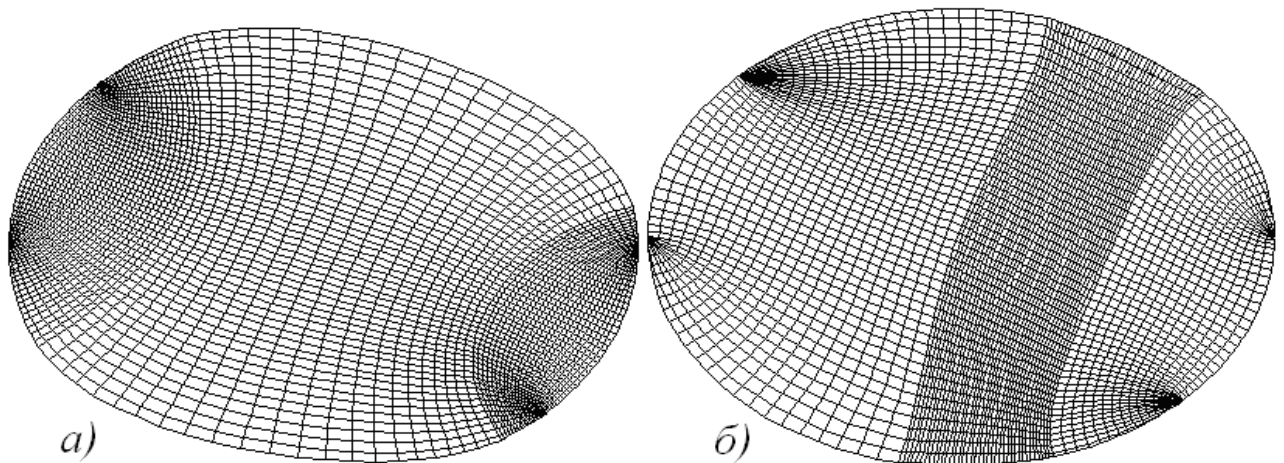


Рис. 4.6. Динамічна сітка та задані значення у точках вимірювання для нелінійно двояко-шаруватого пласта

Таблиця 4.1. Ідентифіковані значення

$\tilde{\kappa}^{(q)}$	1.00456	1.99762	1.50156
$\tilde{\kappa}^{(l)}$	1.49923	2.98876	1.00356
$\varphi^{(q)}$	0.25174	0.64873	
Q_l	0.23792	0.53302	0.20612



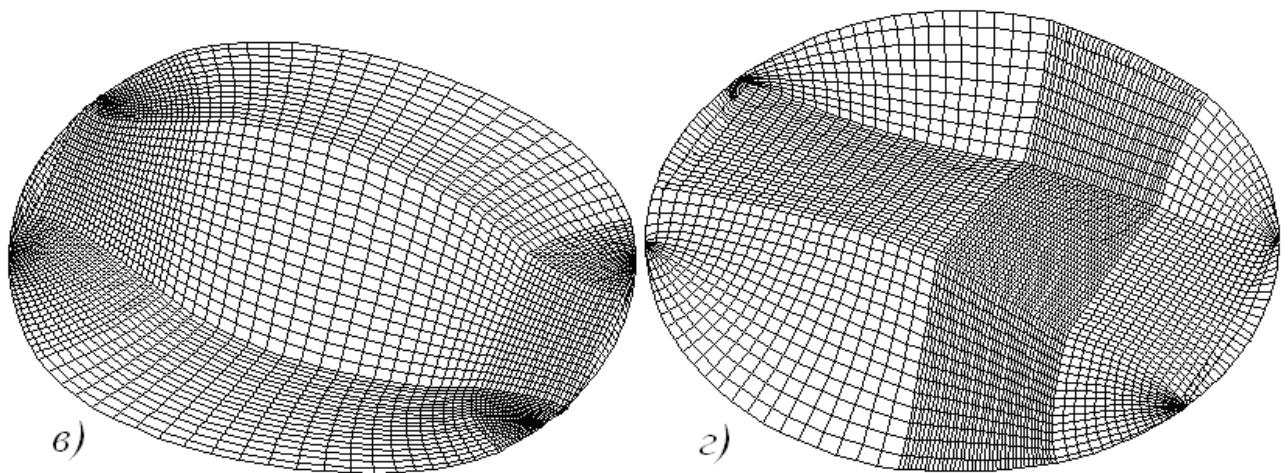


Рис. 4.7. Динамічні сітки у нелінійно двояко-шаруватих провідних пластинах

Таблиця 4.2. Ідентифіковані значення КЕП

a)	1.50231	2.99863	1.00467	б)	2.99435	1.00528	2.98946
	1.06247	2.09672	0.71684		5.97845	2.01673	5.98451
в)	1.50123	2.98976	1.00963	г)	3.01459	1.00641	3.01214
	0.91245	1.79872	0.60745		8.95637	3.00234	8.97431

Використовуючи принцип електрогідродинамічної аналогії М.М. Павловського розроблений підхід може бути поширено також і на задачі ідентифікації коефіцієнта електричної провідності (КЕП) за даними електротомографії – вимірними на границі струмами чи напругами [36].

На рис. 4.7 і в табл. 4.2 подано розраховані динамічні сітки та ідентифіковані значення коефіцієнта електропровідності для заданих $m \times n = 75 \times 50$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$; $\varphi^{(1)} = 0.4$, $\varphi^{(2)} = 0.7$ (а), $\varphi^{(1)} = 0.3$, $\varphi^{(2)} = 0.8$ (б), $\varphi^{(1)} = 0.4$, $\varphi^{(2)} = 0.7$, $Q_1 = 0.209$, $Q_2 = 0.348$, $Q_3 = 0.243$ (в), $\varphi^{(1)} = 0.3$, $\varphi^{(2)} = 0.8$, $Q_1 = 0.16$, $Q_2 = 0.19$, $Q_3 = 0.35$ (г), якщо границя розрахункової області $\partial G_{\pm} = \{z : x = 100 \cos \tau, y = 75 \sin \tau, \tau \in [0, 0.75\pi] \cup [0.75\pi, \pi] \cup [\pi, 1.75\pi] \cup [1.75\pi, 2\pi]\}$.

Формально, розроблену методику можна поширити і на випадки двозв'язних LEF-областей із зонально-неоднорідним середовищем. Проте, для ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності і характерних значень потенціалу та функції течії на лініях розділу шарів у вищеописаній задачі передбачалася наявність відомих (вимірних) даних на границі області. Але, у випадку двозв'язної області за методикою п. 2.1 ділянками границі утвореної

однозв'язної області є береги умовного розрізу, що проходить вздовж лінії течії, яка знаходиться у процесі розв'язання задачі і є заздалегідь невідомою, та й, загалом, отримання необхідних даних про нафтогазовий пласт за межами свердловин є дуже проблематичним.

Пропонована задача моделює стаціонарну ізотермічну фільтрацію рідини, що не стискається, у горизонтальному неоднорідному елементі нафтового LEF-пласта, який містить одну діючу експлуатаційну свердловину і кілька випадковим чином розміщених не діючих свердловин, з яких отримуються необхідні дані. Вважатимемо, що на стадії проектування і початковому етапі розробки родовища був встановлений закон розподілу проникності продуктивного пласта, який в процесі експлуатації покладу у зв'язку із отриманими новими даними та через зміни фільтраційних характеристик породи потребує уточнення.

Розглянемо процес фільтрації нафти у горизонтальному пласті-колекторі за жорсткого водонапірного режиму, якщо відповідна фізична LEF-область $G_{\bar{z}}$ обмежена замкнутими кривими (еквіпотенціалами): $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ – контуром свердловини і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – контуром її живлення. У пласті є \bar{s} точкових не діючих свердловин $R_{\bullet}^{(q)}(x_{\bullet}^{(q)}, y_{\bullet}^{(q)})$, вплив яких на процес ігнорується і в яких задані (виміряні) значення потенціалу (тиску, напору) $\varphi_{\bullet}^{(q)}$ ($q = \overline{1, \bar{s}}$) такі, що для мають місце умови (4.15). А також відомі значення локальних фільтраційних витрат $Q_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1, \bar{s}}$) через ділянки $L_{\bullet}^{(l)}$ контуру свердловини L_* між заданими точками $H_{\bullet}^{(l)}(x_{\bullet}^{(l)}, y_{\bullet}^{(l)})$, причому, виконуються умови (4.16).

Процес витіснення, як і раніше, описуємо рівнянням (3.1) з відповідними крайовими умовами. Коефіцієнт проникності продуктивного пласта $\kappa = \kappa(x, y)$ – невідома кусково-стала функція, що підлягає визначенню, із розривами вздовж шуканих еквіпотенціальних ліній $L_*^{(q)} = \{z \in G_{\bar{z}} : \varphi = \varphi^{(q)}\}$ ($q = \overline{1, \bar{s} - 1}$) і шуканих ліній течії $L_0^{(l)} = \{z \in G_{\bar{z}} : \psi = \psi^{(l)}\}$ ($l = \overline{1, \bar{s} - 1}$), задається (4.11).

Аналогічно до [12], зробивши умовний розріз Γ вздовж шуканої лінії течії, що проходить через точку $H_{\bullet}^{(1)}(x_{\bullet}^{(1)}, y_{\bullet}^{(1)})$, приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення отриманої однозв'язної області $G_{\bar{z}}^{\Gamma} = G_{\bar{z}} \setminus \Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу

G_ω з невідомими лініями розділу $L_*^{(q)}, L_0^{(l)}$ (вздовж яких задані відповідні умови спряження):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \kappa_f \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^{(q, l)}, \\ \kappa_f(x, y) &= \frac{\widehat{\kappa}^{(q)} \cdot \widetilde{\kappa}^{(l)}}{\mu_n}, \quad (x, y) \in G_z^{(q, l)}, \quad q = \overline{1, \widehat{s}}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s}}, \\ \varphi(x_\bullet^{(q)}, y_\bullet^{(q)}) &= \varphi_\bullet^{(q)}, \quad [\varphi]_{L_*^{(q)}} = 0, \quad \left[\kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{L_*^{(q)}} = 0, \quad q = \overline{1, \widehat{s} - 1}, \\ \psi(x_\bullet^{(l)}, y_\bullet^{(l)}) &= \psi_\bullet^{(l)}, \quad [\psi]_{L_0^{(l)}} = 0, \quad \left[\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{L_0^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, \widetilde{s} - 1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = \sum_{l=1}^{\widetilde{s}} \int_{\widetilde{L}_*^{(l)}} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy.$$

Обернена до (4.18) в сенсі п. 2.1 крайова задача на квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z^\Gamma$ зводиться до задачі:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0, \quad \Delta y = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^{(q, l)}, \quad q = \overline{1, \widehat{s} - 1}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s} - 1}, \\ x(\varphi_\bullet^{(q)}, \psi(x_\bullet^{(q)}, y_\bullet^{(q)})) &= x_\bullet^{(q)}, \quad y(\varphi_\bullet^{(q)}, \psi(x_\bullet^{(q)}, y_\bullet^{(q)})) = y_\bullet^{(q)}, \quad q = \overline{1, \widehat{s} - 1}, \\ x(\varphi_*, \psi_\bullet^{(l)}) &= x_\bullet^{(l)}, \quad y(\varphi_*, \psi_\bullet^{(l)}) = y_\bullet^{(l)}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s} - 1}, \\ [(x, y)]_{\varphi=\varphi^{(q)}, \psi=\psi^{(l)}} &= 0, \quad \left[\widehat{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}} = \left[\widehat{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(q)}} = 0, \\ \left[\widetilde{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} &= \left[\widetilde{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, \quad q = \overline{1, \widehat{s} - 1}, \quad l = \overline{1, \widetilde{s} - 1}, \\ Q &= \sum_{l=1}^{\widetilde{s}} Q_l, \quad Q_l = \frac{\widetilde{\kappa}^{(l)}}{\mu_n} \int_0^{Q_l} \widehat{\kappa} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi \end{aligned} \quad (4.19)$$

з умовами (2.5)–(2.6).

Різницевий аналог, декомпозиція задачі по підобластях сталості коефіцієнта проникності та алгоритм числового розв'язання відповідної різницевої задачі є аналогічним до викладеного вище.

Числові розрахунки проведені для пласта, обмеженого контуром $L^* = \{x + iy : x = 500 \cos(t), y = 400 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ і свердловиною $L_* = \{x + iy : x = 15 \cos(t) + 100, y = 15 \sin(t) + 50, 0 \leq t < 2\pi\}$, який містить чотири п'єзометричні свердловини, що моделюються точками $R_\bullet^{(1)}(20, 45)$, $R_\bullet^{(2)}(200, -80)$,

$R_{\bullet}^{(3)}(140, 250)$, $R_{\bullet}^{(4)}(-270, -200)$, в яких задані значення потенціалу $\varphi_{\bullet}^{(q)}$ ($q = \overline{1,4}$). На контурі свердловини L_* також задані чотири точки $H_{\bullet}^{(1)}(100, 65)$, $H_{\bullet}^{(2)}(85, 50)$, $H_{\bullet}^{(3)}(100, 35)$, $H_{\bullet}^{(4)}(115, 50)$, через ділянки між якими відомі локальні фільтраційні витрати $Q_{\bullet}^{(l)}$ ($l = \overline{1,4}$).

На рис. 4.8 наведені отримані в результаті проведених розрахунків динамічні сітки та ідентифіковані значення коефіцієнта проникності $\widehat{k}^{(q)}$, $\widetilde{k}^{(l)}$, критичних значень потенціалу $\varphi^{(q)}$ і значень локальних фільтраційних витрат Q_l

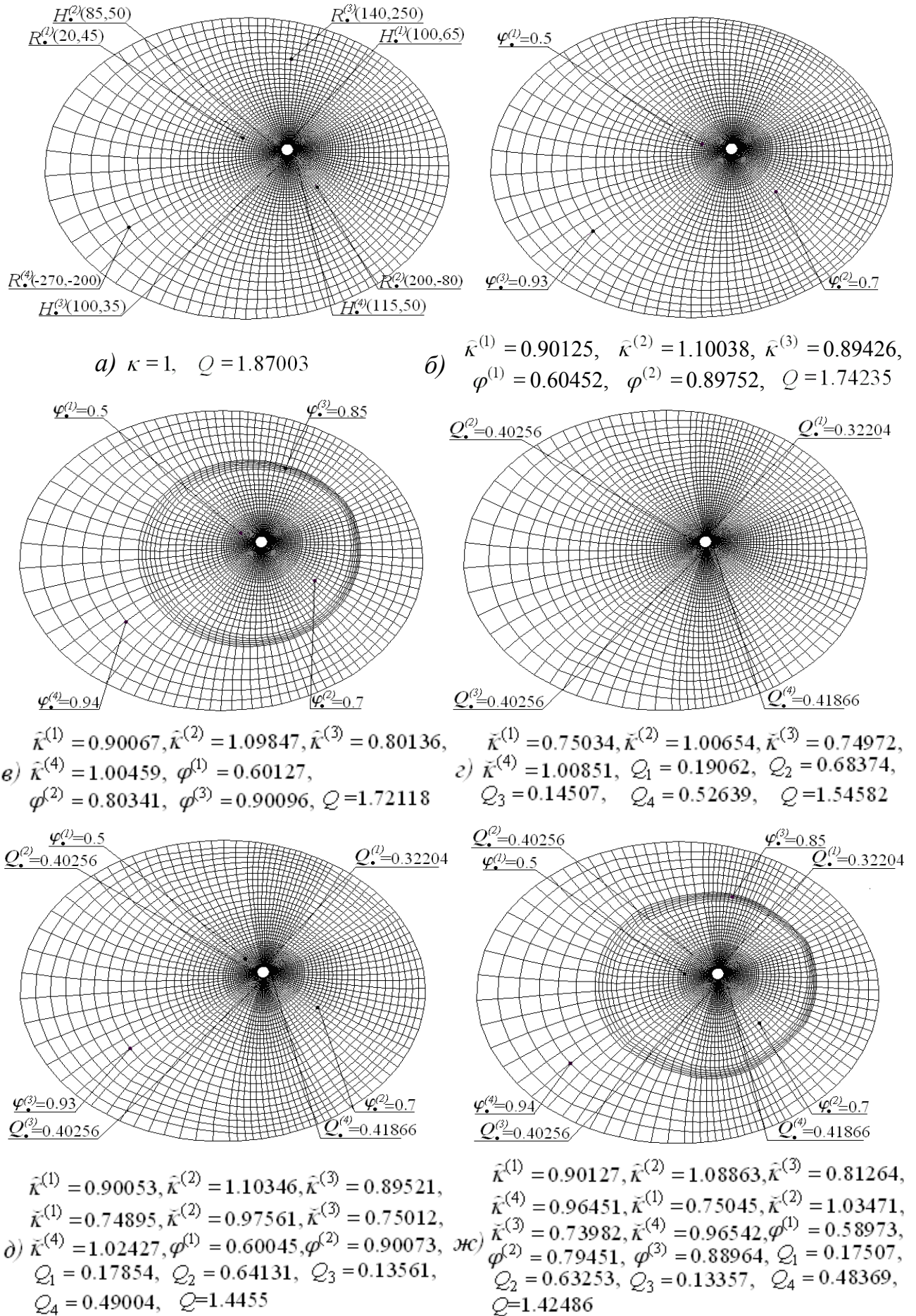


Рис. 4.8. Динамічні сітки та ідентифіковані значення

при $\tilde{\kappa}^{(1)} = 1$ (б, в), $\tilde{\kappa}^{(q)} = 1$ (з), $\mu_{\kappa} = 1$, розбитті області $m \times n = 50 \times 95$, заданих значеннях граничних потенціалів $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, точності обчислень $\varepsilon = 10^{-6}$ і $\delta_* = 0.01$. Як показують результати розрахунків максимальна відносна похибка ідентифікованих значень у порівнянні з отриманими із прямої задачі ($\hat{\kappa}^{(1)} = \hat{\kappa}^{(3)} = 0.9$, $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$, $\varphi^{(1)} = 0.6$, $\varphi^{(2)} = 0.9$ (б), $\hat{\kappa}^{(1)} = 0.9$, $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$, $\hat{\kappa}^{(3)} = 0.8$, $\hat{\kappa}^{(4)} = 1$, $\varphi^{(1)} = 0.6$, $\varphi^{(2)} = 0.8$, $\varphi^{(3)} = 0.9$ (в), $\tilde{\kappa}^{(1)} = \tilde{\kappa}^{(3)} = 0.75$, $\tilde{\kappa}^{(2)} = \tilde{\kappa}^{(4)} = 1$, $Q_1 = 0.2$, $Q_2 = 0.7$, $Q_3 = 0.14$, $Q_4 = 0.5$ (з), $\hat{\kappa}^{(1)} = \hat{\kappa}^{(3)} = 0.9$, $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$, $\tilde{\kappa}^{(1)} = \tilde{\kappa}^{(3)} = 0.75$, $\tilde{\kappa}^{(2)} = \tilde{\kappa}^{(4)} = 1$, $\varphi^{(1)} = 0.6$, $\varphi^{(2)} = 0.9$, $Q_1 = 0.18$, $Q_2 = 0.65$, $Q_3 = 0.13$, $Q_4 = 0.5$ (д), $\hat{\kappa}^{(1)} = 0.9$, $\hat{\kappa}^{(2)} = 1.1$, $\hat{\kappa}^{(3)} = 0.8$, $\hat{\kappa}^{(4)} = 1$, $\tilde{\kappa}^{(1)} = \tilde{\kappa}^{(3)} = 0.75$, $\tilde{\kappa}^{(2)} = \tilde{\kappa}^{(4)} = 1$, $\varphi^{(1)} = 0.6$, $\varphi^{(2)} = 0.8$, $\varphi^{(3)} = 0.9$, $Q_1 = 0.175$, $Q_2 = 0.6$, $Q_3 = 0.13$, $Q_4 = 0.5$ (ж)) становить $\approx 0.5\%$, що є цілком прийнятним для технічних задач.

4.3. Висновки до четвертого розділу

1. На основі синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції області за методом Шварца розроблено методику розв'язання нелінійних задач теорії комплексного квазіпотенціалу у нелінійно-шаруватих і нелінійно двояко-шаруватих середовищах за умов ідентифікації параметрів: кусково-сталих значень коефіцієнта провідності, характерних значень потенціалу і значень локальних витрат (потоків) на відповідно еквіпотенціальних лініях і лініях течії, що розділяють шари, для криволінійних LEF-областей.

2. Створено обчислювальну технологію розв'язання відповідних обернених коефіцієнтних задач, що забезпечує можливість визначення коефіцієнта провідності середовища та інших фільтраційних параметрів з одночасним автоматичним розрахунком координат вузлів динамічної сітки, знаходженням ліній розділу шарів (ділянок) сталості коефіцієнта провідності, обчисленням величини швидкості тощо, яка реалізована у вигляді пакету прикладних програм для подальшого комп'ютерного моделювання.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, в якому розв'язано наукове завдання математичного моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у нафтогазових, водоносних, ущільнених (сланцевих) зонально-неоднорідних LEF-пластах і розроблення на основі синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі методики і обчислювальної технології розв'язання відповідних крайових задач за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища та ідентифікації параметрів моделі.

При цьому отримано такі основні результати та висновки.

1. Сформовано нові математичні моделі нелінійних процесів витіснення (одно- та двофазної фільтрації) у шарувато-неоднорідних пористих чи тріщинуватих горизонтальних нафтогазових пластах, ущільнених осадових породах (сланцях) з зонами підвищеної проникності (тріщинами ГРП), в яких лінії розділу шарів наперед невідомі і визначаються з урахуванням зворотнього впливу характеристик процесу на провідність середовища.

2. Розроблено методику розв'язання нелінійних крайових задач для систем еліптичних диференціальних рівнянь, в яких коефіцієнт провідності середовища зазнає зворотнього впливу від потенціалу поля (напору, тиску) і від функції течії, для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями і лініями течії, (LEF-областей) з використанням методів сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами (у випадках шаруватих середовищ) чи числово-аналітичних представлень розв'язків (що є узагальненнями методів сумарних зображень на випадки неоднорідних та анізотропних середовищ).

3. Створено обчислювальну технологію на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень і декомпозиції області за методом Шварца, яка реалізована у вигляді пакету прикладних програм для подальшого комп'ютерного моделювання з автоматичним розрахунком координат вузлів динамічної сітки, знаходженням ліній розділу шарів (ділянок) сталості коефіцієнта провідності середовища, обчисленням фільтраційних витрат (перетоків), розрахунком поля величини швидкості і інших параметрів досліджуваних процесів.

4. Вперше метод сумарних зображень застосовано як компоненту розроблених раніше (на основі комплексного аналізу) обчислювальних процедур. Поєднання методів комплексного аналізу (обернень квазі-конформних відображень) і методів сумарних зображень для наближення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки дозволило суттєво покращити існуючі методики розв'язання такого класу задач, підвищити ефективність (швидкість збіжності) відповідного ітераційного процесу, оскільки, вирішило проблему відшукування необхідної точності початкового наближення шуканих функцій, а також дало можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а й усіх граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки, а тому значно пришвидшило досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

5. Розроблено методику синтезу числових методів квазіконформних відображень з декомпозицією задачі із застосуванням альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області комплексного квазіпотенціалу на підобласті з “накладками”, що дає змогу, по-перше, ефективно знаходити (“склеювати”) неперервні розв'язки нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами, по-друге, розв'язувати задачі у більш “зручних” підобластях, аніж уся область вихідної задачі, що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових пластах, де маємо значні співвідношення між розмірами продуктивної зони пласта і діаметрами свердловин, по-третє, дозволяє розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

6. Узагальнено методи сумарних зображень на випадки розв'язання крайових задач, що моделюють квазіідеальні процеси у неоднорідних та анізотропних середовищах. Отримані при цьому числово-аналітичні представлення розв'язків відповідних задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами побудовано з використанням ідеї поетапної фіксації окремих параметрів задачі шляхом поєднання числових (різницевих) і аналітичних (розщеплень, розділення змінних, інтегральних представлень тощо) методів.

7. Розроблено підхід і відповідні алгоритми числового визначення параметрів квазіідеальних процесів (кусково-сталих значень коефіцієнта провідності,

критичних значень потенціалу і значень локальних фільтраційних витрат) у нелінійно-шаруватих пористих середовищах.

8. Проведені числові експерименти показали, що для областей різної конфігурації, зокрема, і з негладкими границями, та при різних значеннях параметрів розбиття розрахункової області отримані значення повної витрати, матриць величини швидкості і координат вузлів динамічної сітки практично співпадають з експериментальними результатами, котрі описані у літературі, та аналогічними розрахунками, зробленими іншими авторами, що підтверджує обчислювальну стійкість алгоритмів. Ефективність розробленого підходу забезпечується меншою кількістю кроків ітераційних процесів, за яку досягається прийнятний результат, та вищою точністю обчислень.

9. Розроблено рекомендації й виконано дослідно-промислові роботи з впровадження методики розрахунку та моделювання квазіідеальних процесів за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища. Спільно з ДП «Науканафтогаз» встановлено експрес методики інтерпретації результатів індикаторних досліджень напрямків фільтраційних потоків та ідентифікації параметрів при розробці та проектуванні родовищ нафти і газу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – Москва–Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2004. – 416 с.
2. Акульшин А.И. Прогнозирование разработки нефтяных месторождений / А.И. Акульшин. – М.: Недра, 1988. – 239 с.
3. Алифанов О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988.– 288 с.
4. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.
5. Аникеев Д.П. Возможности увеличения КИГ при разработке залежей газа с подошвенной водой / Д.П. Аникеев, С.Н. Закиров, А.Р. Кондрат // Газовая промышленность. – Москва, 2013. – № 9 (695). – С. 51–53.
6. Баренблатт Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В.Н. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 303 с.
7. Басниев К.С. Нефтегазовая гидромеханика / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследов., 2005. – 544 с.
8. Бейко І.В. Моделювання та оптимізація параметрів емісійних процесів у повітряному басейні міста / І.В. Бейко, В.І. Ночвай // Матем. та комп. моделювання. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 25–32.
9. Бойко В.С. Видобування нафти в ускладнених умовах: Монографія / В.С. Бойко, Р.В. Бойко, Р.В. Грибовський та ін. – Івано-Франківськ: Нова Зоря, 2013. – 711 с.
10. Бойко В.С. Ймовірнісна оцінка процесу парафінової кольматації привибійної зони нафтового пласта / В.С. Бойко, В.Д. Середюк // Нафтогазова енергетика – Ів.-Франківськ, 2013. – № 2 (20). – С. 7–18.
11. Бомба А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький. – К.: Наук. думка, 2007. – 308 с.
12. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу: Монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак.– Рівне: НУВГП, 2013.– 415с.
13. Бомба А.Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія”: [монографія] / А.Я. Бомба, Ю.Є. Климюк. – Рівне: ТзОВ «Ассоль», 2014. – 273 с.

14. Бомба А.Я. Методы комплексного анализа идентификации параметров квазиидеальных процессов в нелинейно двоякостроистых пористых пластах / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Проблемы управления и информатики. – 2014.– № 6. – С. 17–28.
15. Бомба А.Я. Численно-аналитические методы комплексного анализа и расщеплений моделирования одного класса нелинейных квазиидеальных полей/ А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Компьютерная математика. – 2014. № 2. – С. 3–13.
16. Бомба А.Я. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Журнал обч. та прикл. математики. – 2013.– №1 (111) – С. 35–45.
17. Бомба А.Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Фіз.-мат. моделюв. та інформаційні технології. – 2013.– № 18. – С. 32–42.
18. Бомба А.Я. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012.– № 2. – С. 87–94.
19. Бомба А.Я. Числово-аналітичні представлення розв'язків одного класу нелінійних крайових задач / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – 2013. – Вип. 3 (80). – С. 76–83.
20. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу і сумарних зображень моделювання нелінійних процесів витіснення для системи двох свердловин у двояко-шаруватому нафтогазовому пласті / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Вісник ТНТУ. – 2014. – Вип. 1 (73). – С. 238–251.
21. Бомба А.Я. Числово-аналітичне узагальнення методу сумарних зображень розв'язання одного класу нелінійних крайових задач / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вісник Харків. нац. ун-ту. – 2013.– № 1089. Серія: Матем. модел-ня. Інформ. технології. АСУ. Вип. 23. – С. 22–30.
22. Бомба А.Я. Моделювання зворотнього впливу характеристик процесу витіснення нафти на проникність пласта / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 11. – С. 5–20.

23. Бомба А.Я. Синтез числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень розв'язання модельних крайових задач для областей з вільними межами / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Волин. матем. вісник. Серія прикл. матем. – Вип. 10 (19). – Рівне, 2013. – С. 105–116.
24. Бомба А.Я. О математическом моделировании нелинейных процессов вытеснения нефти и газа с учетом образования трещин гидроразрыва пласта / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Сб. тр. VIII Казахстанско-Рос. междунар. научн.-практ. конф. «Матем. модел-ние в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли» – Атырау (Казахстан), 2014. – С. 22–28.
25. Бомба А.Я. Числові методи комплексного аналізу та сумарних зображень моделювання нелінійних квазіідеальних процесів у неоднорідних пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Матер. Міжнар. наук. конф. «Сучасні пробл. матем. модел-ня та обч. методів». – Рівне: РВВ РДГУ, 2015. – С. 32.
26. Бомба А.Я. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області при моделюванні квазіідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // V Міжнар. наук. конф. «Обч. та прикл. матем.». Матеріали конференції. – Київ, 2012. – С. 36.
27. Бомба А.Я. Обчислювальна технологія розв'язання нелінійних крайових задач на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // XVIII Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикл. матем. та інформ.». Матеріали конференції. – Львів, 2012. – С. 45.
28. Бомба А.Я. Розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах шляхом синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // IV Міжнар. конф. мол. вчених з диф. рів-нь та їх застосув. ім. Я.Б. Лопатинського. Тези доп. – Донецьк, 2012. – С. 25.
29. Бомба А.Я. Числові методи комплексного аналізу моделювання нелінійних процесів витіснення нафти та газу із складно структурованих осадових порід / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // Нафта і газ України. Матер. 9-ої Міжнар. наук.-практ. конф. – 2013. – С. 74–75.

30. Бомба А.Я. Методи квазіконформних відображень і числово-аналітичних розщеплень моделювання одного класу нелінійних квазіідеальних полів / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // VI Міжнар. наук. конф. ім. ак. І.І. Ляшка «Обчисл. та прикл. матем.». Матеріали конференції – Київ, 2013. – С. 82.
31. Бомба А.Я. Розв'язання одного класу нелінійних крайових задач шляхом синтезу методів комплексного аналізу і числово-аналітичних представлень / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Усеукр. наук. конф. «Матем. моделюв. та матем. фізика»: матер. конф. – Кременчук, 2013. – С. 40–41.
32. Бомба А.Я. Синтез методів комплексного аналізу і числово-аналітичних узагальнень формул сумарних зображень розв'язання одного класу нелінійних крайових задач для криволінійних областей / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Праці міжнар. наук. конф. «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)». – К.: Ін-тут кіб-ки ім. В.М. Глушкова НАНУ, 2013. – С. 40.
33. Бомба А.Я. Синтез числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі при математичному моделюванні нелінійних процесів витіснення у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // «Сучасні пробл. матем. моделюв., прогнозув. та оптиміз.»: тези доп. VI міжнар. наук. конф. – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 20–21.
34. Бомба А.Я. Метод комплексного аналізу ідентифікації параметрів нелінійних квазіідеальних процесів / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // «Комп'ютерне моделювання в наукомістких технологіях (КМНТ-2014)». Праці міжнар. наук.-техн. конф. – Харків, 2014. – С. 33–36.
35. Бомба А.Я. Метод числової ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів витіснення у малопроникних (сланцевих) пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вип. 3. Обч. методи і системи перетворення інформації; зб. пр. III наук.-техн. конф. – Львів, 2014. – С. 9–10.
36. Бомба А.Я. Синтез числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень ідентифікації параметрів нелінійних квазіідеальних процесів / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, Л.Л. Крока // VII Міжнар. наук. конф. «Обч. та прикл. матем.» ім. акад. І.І. Ляшка: Матер. конф. – Київ, 2014. – С. 26–27.
37. Бомба А.Я. Проблемы идентификации коэффициента проницаемости нефтегазовых пластов / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая, С.В. Яроцак // Обратные краевые задачи и их приложения: материалы конференции. [Электронный ресурс]: – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.

38. Бомба А.Я. Обчислювальна технологія на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень розв'язання модельних крайових задач для областей з вільними межами / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми матем. модел. та обчисл. методів». Матер. конф. – Рівне, 2013. – С. 33.
39. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу і сумарних зображень моделювання нелінійних процесів у двояко-шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Зб. тез виступів учасників Міжнар. наук.-пр. конф. «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в ХХІ ст.». – Рівне, 2013. – С. 65–67.
40. Бомба А.Я. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях з потенціалом керування / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Вісник Львів. ун-ту. Серія: Прикл. матем. та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 18–27.
41. Бомба А.Я. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький, В.В. Скопецкий // Доп. НАНУ.– 2004. – №3. – С. 62–68.
42. Бомба А.Я. Крайові задачі на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький // Доповіді НАН України. – 2004. – №4. – С. 57–63.
43. Бомба А.Я. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А.Я. Бомба, В.В. Скопецкий, С.В. Ярощак // Проблемы управления и информатики. – 2010.– № 4. – С. 64–72.
44. Бомба А.Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А.Я. Бомба, С.В. Ярощак // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34–40.
45. Бомба А.Я. Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах площового заводнення / А.Я. Бомба, С.В. Ярощак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2010. – № 2(35) С. 31–35.
46. Бомба А.Я. Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів // А.Я. Бомба, А.В. Теревус / Журнал обч. та прикл. математики – 2010. – №4. – С. 9–16.
47. Булавацький В.М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та

- масопереносу / В.М. Булавацький, Ю.Г. Кривонос, В.В. Скопецький // К.: Наук. думка. – 2005. – 282 с.
48. Булавацький В.М. Математическе моделювання динаміки процесу консолідації на основі системного підходу / В.М. Булавацький, В.В. Скопецький // Пробл. управл. і інф-ки. – 2007. – № 4. – С. 59 – 66.
49. Булыгин Д.В. Геологія і імітація розробки залежій нафти / Д.В. Булыгин, В.Я. Булыгин. – М.: Недра, 1996. – 382 с.
50. Бэрнардинер М.Г. Гідродинамічна теорія аномальних рідин / М.Г. Бэрнардинер, В.М. Ентов. – М.: Наука, 1975. – 200 с.
51. Вабищевич П.Н. Численне моделювання / П.Н. Вабищевич. – М.: Изд. МГУ, 1993. – 152 с.
52. Василевський Ю.В. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. / Ю.В. Василевський, М.А. Ольшанський – М.: МГУ, 2007. – 105 с.
53. Васильев В.П. Численне рішення задачі Баклея-Леверетта / В.П. Васильев, Т.С. Тимофеева // Матем. заметки ЯГУ.–1995.–т. 2, №1.–С.110–119.
54. Винников В.А. Гідромеханіка / В.А. Винников, Г.Г. Каркашадзе. – М.: Изд. МГУ, 2003. – 302 с.
55. Власюк А.П. Автоматическе побудова конформних і квазіконформних отображень чотирикутних областей з допомогою різностних сіток з "плаваючими" вузлами / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук – К., 1989. – 55 с. – (Препринт АН УРСР. Ін-т матем., 89.79).
56. Гильманов А.Н. Методи адаптивних сіток в задачах газової динаміки / А.Н. Гильманов. – М.: Наука ФІЗМАТЛІТ, 2000. – 248 с.
57. Гладка О.М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатосферній смузі / О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – К.: Ін-т матем. НАН України, 1995. – Вип. 9. – С. 168–173.
58. Гладка О.М. Задачі ідентифікації характеристик середовища і параметрів квазіідеального процесу за умов їх взаємовпливу / О.М. Гладка // Вісник ТНТУ. – 2014. – Вип. 2 (74). – С. 242–253.
59. Гладка О.М. Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних

- відображень та сумарних зображень / О.М. Гладка // Волин. матем. вісник. Серія прикладна матем. – Рівне, 2012. – Вип. 9 (18). – С. 45-58.
60. Гладка О.М. До розв'язування крайових задач для рівняння дивергентного типу з розривними коефіцієнтами в шаруватих кругових областях / О.М. Гладка // Вісник НУВГП – Рівне, 2005. – Вип. 2 (30). – С. 276–281.
61. Гладка О.М. До розв'язування нестационарної крайової задачі для рівняння з розривними коефіцієнтами в багат шаровій області / О.М. Гладка // Вісник НУВГП – Рівне, 2007. – Вип. 1 (37). – С. 282–287.
62. Глущенко А.А. Некоторые пространственные задачи теории фильтрации / А.А. Глущенко. – К.: КГУ, 1970. – 164 с.
63. Глущенко А.А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики / А.А. Глущенко // Доклады АН УССР. – Сер. А. – 1978. – № 6. – С. 490–494.
64. Годунов О.К. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах / О.К. Годунов, Г.П. Прокопов // Ж. выч. матем. и матем. физики. – 1972. – 12, № 2. – С. 429–440.
65. Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної / О.Ю. Грищенко, С.И. Ляшко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2009. – 495 с.
66. Грищенко О.Ю. Ідентифікація точкових структурованих за віком джерел забруднень з використанням двокрокового симетризованого алгоритму / О.Ю. Грищенко, В.В. Оноцький, Д.А. Ключин, Г.М. Стешенко // Ж. обч. та прикл. матем. – 2011. – № 1 (104). – С. 40–48.
67. Дейк Л.П. Практический инжиниринг резервуаров / Л.П. Дейк. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2008. – 668 с.
68. Дейнека В.С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий – К.: Наукова думка, 1995. – 262 с.
69. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами / В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка. – 2005. – 364 с.
70. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2001. – 605 с.
71. Елизаров А.М. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики / А.М. Елизаров, Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев. – М.: Наука, 1994. – 437 с.

72. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений / Ю.П. Желтов. – М.: Недра, 1986. – 333 с.
73. Жуковский Н.Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод. Собр. сочинений: в 7 т. / Н.Е. Жуковский – М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
74. Журавчак Л.М. Математичне моделювання розподілу пластового тиску з урахуванням фізичної неоднорідності пласта / Л.М. Журавчак, А.Є.Струк // Наук. вісник Ів.-Франківського нац. техн. ун-ту нафти і газу. – 2012. – №3. – С. 47–55.
75. Зайцев М.В. Фильтрация в техногенно измененных околоскважинных зонах и производительность скважин / М.В. Зайцев, Н.Н. Михайлов // Георесурсы, геознергетика, геополитика. – 2010. – Вып. 2 (2). – С. 1–20.
76. Закиров Э.С. Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа / Э.С. Закиров, И.С. Закиров, М.Н. Баганова, А.В. Спиридонов. – М.: 2004. – 520 с.
77. Закиров С.Н. Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа. Часть 2 / С.Н. Закиров, И.М. Индрупский, Э.С. Закиров и др. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2009. – 484 с.
78. Зінько П.М. Системний аналіз процесів підвищення техніко-експлуатаційних характеристик свердловин / П.М. Зінько, І.В. Бейко, Л.Ю. Бодачівська // Вісник Київ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2007. – № 2. – С. 101–105.
79. Иванов В.И. Конформные отображения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: МГУ, 2002. – 167 с.
80. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебн. для студентов высш. учебн. заведений / С.И. Кабанихин. – Новосибирск, 2009. – 457 с.
81. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р.Д. Каневская. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 140 с.
82. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.–Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
83. Кудин В.И. Анализ вычислительных схем моделирования процессов геогидродинамики / В.И. Кудин, В.А. Богаенко, В.В. Скопецкий // Проблемы управления и информатики – 2009 – № 8. – С. 1-12.
84. Колдоба А.В. Гиперболичность уравнений изотермической многофазной

- фльтрації/ А.В. Колдоба, Е.В. Колдоба // Математ. моделювання. – 2011. – т. 23, №1. – С. 65–80.
85. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
 86. Кондрат Р.М. Дослідження застосування поверхнево-активних речовин для інтенсифікації видобування нафти на завершальній стадії розробки родовищ / Р.М. Кондрат, Л.Б.Мороз, В.Д. Михайлюк // Науковий вісник. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2013. – № 2 (35). – С. 134–140.
 87. Крэйг Ф.Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении / Ф.Ф. Крэйг. – М.: Недра, 1974. – 192 с.
 88. Кричлоу Б.Г. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования / Б.Г. Кричлоу. – М.: Недра, 1979. – 305 с.
 89. Крылов А.П. Научные основы разработки нефтяных месторождений / А.П. Крылов, М.М. Глоговский, М.Ф. Мирчинк, Н.М. Николаевский, И.А. Чарный. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2004. – 416 с.
 90. Кузьменко А.П. До розв'язання нестационарних крайових задач у шаруватих кругових областях / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Гідромеліорація та гідротехнічне буд-во. – Рівне: УДАВГ, 1998. – Вип. 23. – С. 76–83.
 91. Кузьменко А.П. До розв'язування початково-крайової задачі для параболічного рівняння методом прямих / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Волин. матем. вісник. – Рівне, 2010. – Вип. 7 (16). – С. 110–115.
 92. Кузьменко А.П. Один з підходів до застосування методу прямих сумісно з Р-трансформаціями для розв'язування просторової початково-крайової задачі / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Волин. матем. вісник. Серія прикл. матем. – Рівне, 2011. – Вип. 8 (17). – С. 108–112.
 93. Кузьменко А.П. Розв'язок крайових задач для рівняння дивергентного типу із розривними коефіцієнтами у кільці / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Волин. матем. вісник. – Рівне, 1995. – Вип. 2. – С. 113–115.
 94. Кузьменко А.П. Паралельний алгоритм чисельно-аналітичного розв'язку одного класу просторових початково-крайових задач для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко // XIV Міжнар. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука. Матер. конф. Т.1. Диф. та інтегр. рівня, їх застосув. – К.:КПІ, 2012. – С. 263.
 95. Кузьменко А.П. Варіант синтезу методу прямих та методу сумарних

- наближень із декомпозицією області / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко // IV Міжнар. конф. ім. ак. І.І. Ляшка. «Обчислювальна та прикладна математика». Матер. конф. – Київ, 2011. – С. 102.
96. Кузьменко А.П. Один варіант синтезу методу прямих та Р-трансформацій на основі декомпозиції області / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко // Міжнар. матем. конф. ім. В.Я. Скоробогатька. Тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 109.
97. Кузьменко А.П. До розв'язування крайових задач для рівнянь параболічного типу / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Наук.-техн. конф. «Обч. методи і системи перетвор. інф-ції». Зб. праць. – Львів, 2010. – С. 40–43.
98. Кузьменко А.П. До розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних з періодичністю в крайових умовах за алгоритмом декомпозиції області / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко, В.В. Войтишин // XIII Міжнар. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука. Тези доповідей. – Київ, 2010. – С. 178.
99. Кузьменко А.П. До методики розв'язування крайових задач в шаруватих середовищах / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // IV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. Тези доповідей. – Київ, 1995. – С. 143.
100. Кузьменко А.П. Один метод розв'язування крайових задач для деяких рівнянь у частинних похідних із розривними коефіцієнтами / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // III Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. Тези доповідей. – Київ, 1994. – С. 66.
101. Кузьменко А.П. Синтез методу прямих і методу сумарних зображень в одній задачі розрахунку нестационарної фільтрації у нафтоносному пласті / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Матер. Міжнар. наук. конф. «Сучасні пробл. матем. моделюв. та обч. методів». – Рівне, 2015. – С. 96.
102. Лаврик В.И. Математическое моделирование в гидроэкологических системах / В.И. Лаврик, Н.А. Никифорович – К.: Фитосоциоцентр, 1998. – 288 с.
103. Лаврик В.И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В.И. Лаврик, В.П. Фильчакова, А.А. Яшин – К.: Наук. дум., 1990 – 374с.
104. Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

105. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1977. – 407 с.
106. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л.С. Лейбензон. – М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. – 244 с.
107. Лейбензон Л.С. Подземная гидрогазодинамика. Собр. трудов в 2 т. / Л.С. Лейбензон. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – 554 с.
108. Ляшко И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264 с.
109. Ляшко И.И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко, В.И. Лаврик, Г.Е. Мистецкий. – К.: Наукова думка, 1974. – 200 с.
110. Ляшко И.И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, И.В. Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий. – К.: Наукова думка, 1977. – 288 с.
111. Ляшко И.И. Решение краевых задач в слоистых грунтах / И.И. Ляшко, А.Е. Грищенко. // Алг-мы и прогр-мы решения краевых задач матем. физики. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1972. – 173 с.
112. Ляшко С.І. Лагранжово-ейлеровий підхід до розв'язання оберненої задачі конвективної дифузії / С.І. Ляшко, Д.А. Ключин В.В. Семенов, К.В. Шевченко // Доповіді НАНУ. – 2007. – № 10. – С. 38–43.
113. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук – М.: Наука, 1989. – 608 с.
114. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2004. – 628 с.
115. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти / М. Маскет. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 606 с.
116. Мацокин А.М. Метод альтернирования Шварца в подпространстве / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Изв. высш. учебн. завед. Матем. – 1985. – №10. – С. 61–66.
117. Мирзаджанзаде А.Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2004. – 368 с.

118. Михайлов Н.Н. Информационно-технологическая геодинамика околоскважинных зон / Н. Н. Михайлов. – М.: Недра, 1996. – 339 с.
119. Монахов В.Н. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче / В.Н. Монахов, Б.Т. Жумагулов, Н.В. Зубов, Ш.С. Смагулов. – Алма-Аты: Гылым, 1996. – 166 с.
120. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I, 2 / Р.И. Нигматулин – М.: Наука, 1987. – 824 с.
121. Никифоров Г.А. Применение метода контрольных объемов для решения задач двухфазной фильтрации в переменных "скорость-насыщенность" / Г.А. Никифоров // Выч. методы и программы: новые выч. технологии. – 2006. – Т. 7. – № 1. – С. 224–228.
122. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика / В.Н. Николаевский. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
123. Нифаптов А.В. Современное состояние математического моделирования пластовых систем / А.В. Нифаптов // Сер.: Разработка газовых и газоконденсатных месторождений. – М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2004. – 80 с.
124. Оран Э. Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Борис. – М.: Мир, 1990. – 660 с.
125. Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
126. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В.Ф. Пивень. – Орёл: Из-тво ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2006. – 508 с.
127. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г.Н. Положий. – К.: Изд-во КГУ, 1962. – 161 с.
128. Положий Г.Н. Об одном классе формул суммарных представлений / Г.Н. Положий, А.А. Скоробагатько // Прикл. матем. и мех. – 1965. – Вып. 1. – С. 20–40.
129. Положий Г.Н. Метод движения граничных точек и мажорантных областей теории фильтрации / Г.Н. Положий // УМЖ. – 1953. – 5, № 4.
130. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
131. П'янило Я.Д. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих

- середовищах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула // Фіз.-мат. моделюв. та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 69–77.
132. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. Полубариновой-Кочиной П.Я. – М.: Наука, 1969. – 546 с.
133. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е.С. Ромм. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.
134. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 612 с.
135. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
136. Самарский А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
137. Самарский А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
138. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка. – 1991. – 432 с.
139. Сергиенко И.В. Идентификация параметров системы конвективно-диффузионного переноса / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С. 42-63.
140. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1986 – 288 с.
141. Толпаев В.А. Математическая модель линейного упругого режима фильтрации в искривленных пластах переменной толщины / В.А. Толпаев, Д.В. Баско // Нефтепромысловое дело. – 2008. – № 12. – С. 9–13.
142. Трапезникова М.А. Моделирование процесса нефтедобычи явными и неявными численными методами / М.А. Трапезникова, Н.Г. Чурбанова // Матем. моделирование. – 1997. – т. 9. – №6. – С. 53–66.
143. Тугай А.М. Аналіз процесів кольматажу і існуючих методів його врахування при визначенні продуктивності свердловин / А.М. Тугай, Я.О. Тугай // Науч.-тех. сб.: Коммун. хоз-во гор. – 2004. – №58. – С. 261–269.
144. Уолш М. Первичные методы разработки месторождений углеводородов / М. Уолш, Л. Лейк. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2008. – 672 с.
145. Фазлыев Р.Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений / Р.Т. Фазлыев. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2008. – 256 с.

146. Фильчаков П.Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т.2. / П.Ф. Фильчаков. – К.: Изд-во АН СССР, 1960. – 255 с.
147. Хейфец Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Л.И. Хейфец, А.В. Неймарк. – М.: Химия, 1982. – 320 с.
148. Чапля Є.Я. Фізико-математичне моделювання гетеродифузійного масо-переносу / Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
149. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика / И.А. Чарный. – Москва-Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2006. – 436 с.
150. Чернуха О.Ю. Моделювання граничних випадків контактної-крайової задачі стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах / О.Ю. Чернуха, В.Є. Гончарук, В.А. Дмитрук // Моделювання та інформаційні технології. – 2010. – № 55. – С. 141–150.
151. Шестерин Д.Е. Математическое моделирование продвижения двумерной границы разноцветных жидкостей в неоднородно-анизотропном грунте / Д.Е. Шестерин // Вісник ХНУ. Серія: Матем. модел-ня. Інформ. технології. АСУ. – 2007. – №780. – С. 186–192.
152. Штраубе А.В. Эффективное решение уравнения конвективного переноса современными численными методами / А.В. Штраубе. – Пермь, 2003. – 28 с.
153. Щелкачев В.Н. Подземная гидравлика / В.Н. Щелкачев, Б.Б. Лапук. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2001. – 736 с.
154. Abdulmouti H. Bubbly Two-Phase Flow: Part II – Characteristics and Parameters / H. Abdulmouti // American J. of Fluid Dynamics. – 2014. – № 4 (4). – P. 115–180.
155. Ahamadi M. Modeling and Simulation of Compressible Three-Phase Flows in an Oil Reservoir: Case Study of Tsimiroro Madagascar / M. Ahamadi, H.T. Rakotondramiarana, Rakotonindrainy // American J. of Fluid Dynamics. – 2014. – № 4 (4). – P. 181–193.
156. Araújo G.M. On a System of Equations of a Non-Newtonian Micropolar Fluid / G.M. de Araújo, M.A.F. de Araújo, E.F.L. Lucena // J. of Appl. Math. – 2015. – Vol. 2015. – P. 1–11.

157. Azevedo A.V. Uniqueness of the Riemann Solution for Three-Phase Flow in a Porous Medium / A.V. Azevedo, A.J. de Souza, F. Furtado, D. Marchesin // *SIAM J. Appl. Math.* – 2014. – Vol. 74, No. 6. – P. 1967–1997.
158. Barfield W.D. Numerical method for generating orthogonal curvilinear meshes / W.D. Barfield // *J. Comp. Phys.* – 1970. – № 1. – P. 23–33.
159. Beyko I. Solve-Operator Methods for Optimization of Risk Controlled Stochastic Processes / I. Beyko, P. Zinko // *Taurida J. of Comp. Sci. Theory and Math.* – 2013. - No 2. – P. 17–24.
160. Bruckner G. An inverse problem from the 2D-groundwater modelling / G. Bruckner, S. Handrock-Meyer, H. Langmach – *WIAS-Preprint*, No 343, Berlin, 1997.
161. Bomba A. The syntheses of numerical methods of complex analysis and numerical-analytical representations for solving of a class of nonlinear boundary value problems in curvilinear domains / A. Bomba, O. Hladka // *Zeszyty Naukowe WSinf.* – 2014.– Vol. 13, Nr 1. – C. 120–131.
162. Bomba A. Methods Quasiconformal Mappings and Splittings for Solution of a Class of Nonlinear Boundary Value Problems / A. Bomba, O. Hladka // *Intern. Conf. «Complex Analysis, Potential Theory and Applications»*. Abstracts. – Kyiv, 2013. – http://www.imath.kiev.ua/~complex/conf_2013/abstracts.html.
163. Borcea L. Electrical impedance tomography / L. Borcea // *Inverse Problems.* – 2002. – 18. – P. 99–136.
164. Buckley S. Mechanism of fluid displacement in sands / S. Buckley, M.C. Leverett // *Trans. AIME.* – 1942. – V. 146. – P. 107 – 115.
165. Carlson M. *Practical Reservoir Simulation* / M. Carlson – Penn Well, – 2003. – 540 p.
166. Chan T.F. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients / T.F. Chan, X.-C. Tai – *UCLA, Math. Depart.* – CAM-report 03-15, 2003.
167. Chen C.-M. Numerical methods of the variable-order Rayleigh–Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative

- /C.-M. Chen, F. Liu, K. Burrage, Y. Chen // IMA J. Appl. Math. – 2013. – Vol. 78, No 5. – P. 924–944.
168. Currie I.G. Fundamental Mechanics of Fluids. 3rd edition. / I.G. Currie. – Marcel Dekker, Inc., New York, – 2003. – 525 p.
169. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
170. Das D.B. Upscaling Multiphase Flow in Porous Media from Pore to Core and Beyond / D.B. Das, S.M. Hassanizadeh. – Springer, – 2005. – 257 p.
171. Dilts G.A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics ii: conservation and boundaries / G.A. Dilts // Int. J. for Num. Meth. in Eng. – 2000. – 48 (10). – P. 1503–1524.
172. Garbey M. Parallel Schwarz method for a convection-diffusion problem / M. Garbey, Yu. Kuznetsov, Yu. Vassilevski // SIAM J. Sci Comp. – 2000. – Vol. 22. – P. 891–916.
173. Getsinger D.R. Structural and stability characteristics of jets in crossflow / D.R. Getsinger, L. Gevorkyan, O.I. Smith, A.R. Karagozian // J. of Fluid Mech. – 2014. – Vol. 760. – P. 342–367.
174. Grisvard P. Elliptic problems in nonsmooth domains / P. Grisvard. – Pitman Publishing, London, 1985.
175. Haber S. Boundary Conditions for Darcy's Flow through Porous Media / S. Haber, R. Mauri // J. Multiphase Flow. – 1983. – 9, №5. – P. 561–574.
176. Hasanov A. Inverse coefficient problems for monotone potential operators / A. Hasanov // Inverse Problems. – 1997. – Vol. 13. – P. 1265–1278.
177. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains / O. Hladka, A. Bomba // Journal of Mathematics and System Science (USA). – 2014. – Vol. 4, №7 (Ser. No. 29). – P. 514–521.
178. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of nonlinear quasiideals processes / O. Hladka // The Intern. Conf. «Complex Analysis and Related Topics». – St. Petersburg, 2014. – P. 13.
179. Hussein H. Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable

- media with different capillarity pressures / H. Hussein, F. Abbas // *Advances in Water Resources*. – 2008. – Vol. 31, Issue 1. – P. 56–73.
180. Jin Y. Numerical investigation of the possibility of macroscopic turbulence in porous media: a direct numerical simulation study / Y. Jin, M.-F. Uth, A.V. Kuznetsov, H. Herwig // *J. of Fluid Mech.* – 2015. – Vol. 766. – P. 76–103.
181. Kabanikhin S.I. Numerical analysis of inverse problems / S.I. Kabanikhin // *J. of Inverse Ill-posed Problems*. – 1995. – 3, No. 4 – P. 278-304.
182. Kondrat O. Study of methods of hydrocarbon recovery enhancement from the depleted oil fields / O. Kondrat // *AGH Drilling Oil and Gas Quarterly*. – Poland, 2013. – Vol. 30, № 1. – P. 127–145.
183. Leverett M.C. Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands. / M.C. Leverett // *Trans. AIME*. – 1939. – Vol. 132. – P. 149–159.
184. Mohan H. Double-Diffusive Convection in Compressible Viscoelastic Dusty Fluid Through Brinkman Porous Media / H. Mohan, P. Kumar // *American J. of Fluid Dynamics*. – 2012. – № 2 (2). – P. 1–6.
185. Nield D.A. Convection in porous media / D.A. Nield, A. Bejan. – Springer, – 2006. – 653 p.
186. Nomirovskiy D.A. Identification of age-structured contamination sources in ground water / D.A. Nomirovskiy, S.I. Liashko, V.V. Semenov, D.A. Kliushyn // *Optimal Control of Age-Structured Populations in Economy, Demography and the Environment*. Routledge, UK. – 2010. – P. 277–292.
187. Patel H.G. Third-Order Continuous-Discrete Filtering for a Nonlinear Dynamical System / H.G. Patel, S.N. Sharma // *J. Comp. Nonlinear Dynam.* – 2014. – № 9 (3). – P. 82–90.
188. Pomp A. The boundary-domain integral method for elliptic system. With application in shells / A. Pomp // *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1683, Berlin. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. – 163 p.
189. Smith B. Domain decomposition. Parallel multilevel method for elliptic partial differential equations / B. Smith, P. Bjorstad, W. Gropp. – Cambridge University Press, 1996.

190. Shukla A. A Recent Development of Numerical Methods for Solving Convection-Diffusion Problems / A. Shukla, A.K. Singh, P. Singh // *Applied Math.* – 2011. – № 1 (1). – P. 1–12.
191. Thompson J.F. Numerical Grid Generation. Foundation and Applications / J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin. – New York, 1985. – 931 p.
192. Vafai K. Handbook of porous media / K. Vafai. – Taylor & Francis Group, 2005. – 747 p.
193. Versteeg H.K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H.K. Versteeg, W. Malalasekera - New York: Longman Sci. & Tech., 1995. - 267 p.
194. Vogel C.R. Computational methods for inverse problems / C.R. Vogel – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
195. Wakeman R. Filtration: equipment selection, modeling and process simulation / R. Wakeman, J. Tarleton. – Oxford: Elsevier Advanced Technology, 1999.
196. Whitaker S. Advances in theory of fluid motion in porous media / S. Whitaker // *Indust. And Eng. Chemistry.* – 1969. – № 12 (61). – P. 14–28.
197. Zaitsev M.V. Effect of residual oil saturation on the flow through a porous medium in the neighborhood of an injection well / M.V. Zaitsev, N.N. Mikhailov // *J. Fluid Dynamics.* – 2006. – № 4 (41). – P. 568–573.
198. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Comp. Sci. and Eng.) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. – Paperback. Society for Ind. and Appl. Math., 2006. - 531 p.

ДОДАТКИ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з наукової роботи
Дочірнього підприємства «Науково-
дослідний інститут нафтогазової
промисловості» Національної
акціонерної компанії «Нафтогаз
України», к.т.н.



Гришаненко В.П.

20 19 р.

АКТ

**про впровадження (використання) результатів дисертаційного дослідження за темою
"Числові методи комплексного аналізу та сумарних зображень моделювання
нелінійних квазіідеальних процесів у пористих пластах"
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02–
математичне моделювання та обчислювальні методи
Гладкої Олени Миколаївни**

Комісія у складі:

Голова – Завідувач відделення супервізії та інформаційного супроводу геологорозвідувальних робіт Центру сейсмічних досліджень та комплексування нафтогазопошукових методів, к.г.н. Коваль А.М.

Члени комісії – старший науковий співробітник відділу видобутку та буріння свердловин, к.т.н., Драчук О.Г., старший науковий співробітник відділу моніторингу та техніко-економічних досліджень ефективності розробки родовищ, к.т.н., Карпенко В.М.

цим Актом засвідчує, що результати дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – "математичне моделювання та обчислювальні методи" Гладкої О.М. використані співробітниками Дочірнього підприємства «Науково-дослідний інститут нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» під час дослідження нелінійних фільтраційних процесів у шарувато-неоднорідних пористих пластах за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища та ідентифікацію параметрів моделі.

Основні результати дисертаційної роботи, які були використані Дочірнім підприємством «Науково-дослідний інститут нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» під час проектування та аналізу ефективності розробки родовищ нафти і газу:

1. удосконалення методик розрахунку та моделювання нелінійних фільтраційних процесів у шарувато-неоднорідних пористих пластах за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища, що базуються на синтезі числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі;
2. розробка методу числової ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів у нелінійно-шаруватих нафтогазоносних пластах.

Використання вищевказаних результатів дозволяє встановити особливості нелінійних процесів витіснення з урахуванням зворотнього впливу параметрів процесу в моделі на присвердловинну зону пласта, підвищити якість проектування та ефективність розробки родовищ нафти та газу.

Голова комісії

Завідувач відділення супервізії та інформаційного супроводу геологорозвідувальних робіт Центру сейсмічних досліджень та комплексування нафтогазопошукових методів, к.г.н.



А.М. Коваль

Члени комісії

Старший науковий співробітник відділу видобутку та буріння свердловин, к.т.н.



О.Г. Драчук

Старший науковий співробітник відділу моніторингу та техніко-економічних досліджень ефективності розробки родовищ, к.т.н.



В.М. Карпенко

«28» 03 2014 р.



проф. Мошинський В. С.
" 2014 р.

АКТ

**про впровадження (використання) результатів дисертаційного дослідження
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
Гладкої Олени Миколаївни**

Комісія у складі:

голова – директор навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, д. п. н., проф. Тадеєв П.О.;

члени комісії –

заступник директора навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки з наукової роботи, канд. т. н. Степанченко О.М.;

в. о. завідувача кафедри прикладної математики, канд. ф.-м. н., доц. Турбал Ю.В.

цим Актом засвідчує, що розроблені у дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – "математичне моделювання та обчислювальні методи" Гладкої О.М. методи математичного моделювання нелінійних квазіідеальних процесів у шарувато-неоднорідних пористих пластах за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища та ідентифікації параметрів, які базуються на синтезі числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі, використані у Національному університеті водного господарства та природокористування при читанні дисципліни "Чисельні методи конформних і квазіконформних відображень", а також використовуються для написання курсових та дипломних робіт для студентів спеціальності "Прикладна математика".

Голова комісії:

директор навчально-наукового інституту
автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки, д. п. н., проф.

Тадеєв П.О.

Члени комісії:

заступник директора навчально-наукового
інституту автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки з наукової роботи,
канд. т. н..

Степанченко О.М.

в. о. завідувача кафедри прикладної
математики, канд. ф.-м. н., доц.

Турбал Ю.В.

« 16 » червня 2014 р.

ЗАТВЕРДЖУЮРектор Рівненського державного
гуманітарного університету

проф. Постолювський Р.М.


2014 р.

**АКТ**


про впровадження (використання) у навчальний процес результатів дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи Гладкої Олени Миколаївни

Комісія у складі: голова комісії – декан факультету математики та інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент Шахрайчук М. І.; члени комісії – завідувач кафедри інформатики та прикладної математики, доктор технічних наук, професор Бомба А. Я., викладач кафедри інформатики та прикладної математики, кандидат технічних наук Ярошак С. В., цим Актом засвідчує, що розроблені у дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – "математичне моделювання та обчислювальні методи" Гладкої О. М. методи математичного моделювання нелінійних квазіідеальних процесів у шарувато-неоднорідних пористих пластах за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища та ідентифікації параметрів, що базуються на синтезі числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі, використані у Рівненському державному гуманітарному університеті при читанні спецкурсів "Методи комплексного аналізу", "Проблеми оптимізації і керування процесами і системами" та "Сучасні проблеми прикладної математики", а також використовуються при написанні курсових та дипломних робіт студентами спеціальності «Прикладна математика» на кафедрі інформатики та прикладної математики.

Результати роботи використовувались при виконанні науково-дослідних робіт "Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу "фільтрація-конвекція-дифузія" з післядією при неповних даних" (номер державної реєстрації 0109U001065, 2009 – 2011р.), "Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах" (номер державної реєстрації 0112U001014, 2012 – 2014 р.).

Голова комісіїДекан факультету математики та інформатики  к.ф.-м.н., доц. Шахрайчук М. І.**Члени комісії**

Завідувач кафедри інформатики та ПМ

 д.т.н., проф. Бомба А. Я.

Викладач кафедри інформатики та ПМ

 к.т.н., Ярошак С. В.

«27» червня 2014 р.