

УДК 624.046.012.45: 539.376

Й. Лучко<sup>1</sup>, докт. техн. наук; С. Слободянюк<sup>2</sup>, докт. техн. наук;  
А. Буратинський<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівська філія Дніпропетровського національного університету  
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

<sup>2</sup>ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»

## МЕХАНІКА ТРИВАЛИХ ВІБРАЦІЙНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПОЗАЦЕНТРОВО-СТИСНЕНОГО ЗАЛІЗОБЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

**Резюме.** Розглянуто механіку тривалих переміщень шарнірно-опертого залізобетонного стержня при тривалій дії вібраційної (динамічної) поздовжньої сили, яка була прикладена з ексцентриситетом  $e_0$ . З часом від дії тривалої динамічної сили і віброповзучості бетону відбувається перерозподіл напружень між бетоном і арматурою та виникають переміщення стержня. Задачу віброповзучості розв'язано за спадковою теорією старіння (СТС). Для цього використовували два методи: перший – метод Бубнова-Гальоркіна –малого параметра – Рунге-Кутти; другий – метод Бубнова-Гальоркіна – метод початкових параметрів віброповзучості (МППВП). Матричний метод МППВП практично збігся з методом Рунге-Кутти і рекомендується для подальшого застосування.

**Ключові слова:** залізобетонний стержень, матричний метод, віброповзучість.

J. Luchko, S. Slobodyanyuk, A. Buratynskyi

## MECHANICS OF PROLONGED VIBRATION SHIFTINGS OF THE NON-CENTRAL PRESSED REINFORCED ROD

**Summary.** This paper deals with the mechanics of prolonged-movement of the pendulum hinged reinforced concrete rod under long-term vibration (dynamic) longitudinal force that was applied with eccentricity  $e_0$ . Over time, from the effects of the long-term dynamic power and vibratory displacement of concrete redistribution of stresses between the concrete and reinforcement take place and displacement of the rod occurs.

Vibratory displacement problem is solved by hereditary theory of aging (HTA) and for this were used two ways: first – Bubnov-Galerkin method of the-small parameter Runge-Kutta and the second – the Bubnov-Galerkin method of initial parameters Vibratory displacement (MIPVD). Matrix method MIPVD practically coincided with the Runge-Kutta method and is recommended for further use.

The experimental studies of non-central pressed reinforced concrete pillars intersection  $100 \times 100 \times 1400$  mm, reinforcement  $4\varnothing 8$  mm, concrete class C25/30 at  $\rho = P/PE = 0,075$ ,  $\Delta\rho = 0,0025$ ,  $e_0 = 5,4$  mm on vibratory displacement and creeping were also conducted. The basis of theoretical research the recommended matrix method (MIPVD) and the modified method of initial parameters of creeping (MMIPC) were chosen, when calculating the HTA and the implementation in the mathematical bag «MathCad».

The theory developed by the authors calculate rods and matrix methods MIPVD and MMIPC, which practically coincide with the experimental data on the racks at static deflection and vibration load (difference 10...17%) and is recommended for further use

These matrix methods (MIPVD and MMIPC) allow getting a theoretical solution at different speeds of reverse, irreversible and elastic components of vibratory displacement deflection and creeping and consider taking into consideration all 10 members of the Taylor series of the improved convergence at the computer implementation in MP «MathCad». In general mechanics of the problem vibratory displacement and creeping showed that graphics of deflections under dynamic loads more intensively grow and exceed their growth under static load, and dynamic deflection (vibratory displacement) exceeded the limits of static deflection (creeping) by 60% in average.

**Key words:** reinforced concrete rod, matrix method, vibratory displacement.

**Постановка проблеми.** З часом від дії тривалої динамічної сили і віброповзучості бетону відбувається перерозподіл напружень між бетоном і арматурою, що призводить до переміщення стержня  $y(x,t)$ , а це, у свою чергу, – значних деформацій. Проте наявність матричних методів, які дозволяють отримати теоретичні вирішення при різних швидкостях зворотної, незворотної і пружної складових деформацій віброповзучості та повзучості, розроблені недосконало.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботах [1–5] наведено математичну модель і детальне пояснення розв'язання задачі – як змінюються в часі  $t$  переміщення (прогин) позацентрово-стисненого залізобетонного стержня при повзучості бетону. Проте розрахунок стержнів при дії віброповзучості у даних роботах не розглядається.

**Мета роботи** – дослідження механіки тривалих вібраційних переміщень позацентрово-стисненого залізобетонного стержня.

**Виклад матеріалу досліджень.** Розглянемо шарнірно-опертий залізобетонний стержень при тривалій дії вібраційної (динамічної) поздовжньої сили  $P(t) = P_0 + \Delta P \sin \omega(t - t_0)$ , яка прикладена з ексцентриситетом  $e_0$ . Розрахункова схема стержня наведена на рис.1. З часом від дії тривалої динамічної сили і віброповзучості бетону відбувається перерозподіл напружень між бетоном і арматурою й виникають переміщення стержня  $y(x,t)$ .

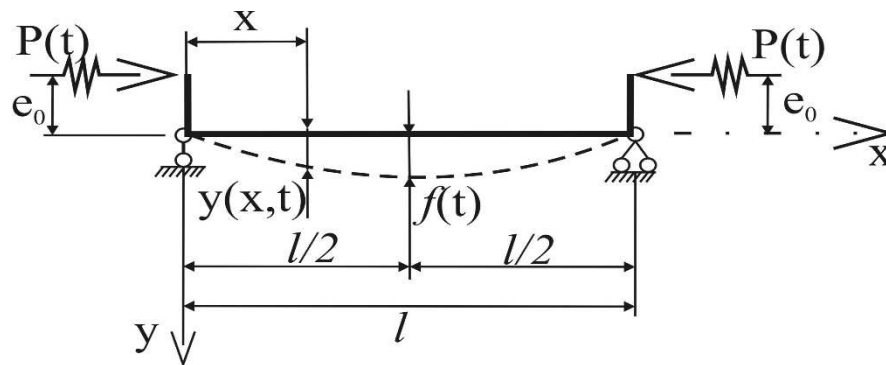


Рисунок 1. Позацентрово-стиснений стержень при вібраційному навантаженні

Figure 1. Noncentral-compressed rod with vibration load

За основу приймаємо методіку розв'язання цієї ж задачі при повзучості [1,2]. З урахуванням того, що  $M(x,t) = P(t)[e_0 + y(x,t)]$  і  $N(x,t) = -P(t)$ , основне рівняння тривалих вібраційних переміщень має вигляд

$$E_0 I K y''(x,t) + \Gamma P_0 y(x,t) + \Gamma \Delta P y(x,t) \sin \omega(t - t_0) = -\bar{M}(t), \quad (1)$$

де  $\bar{M}(t) = \Gamma e_0 P(t) + e_s \mathcal{J} P(t) + H_u M_u$ ;  $M_u = E_0 S_b \varepsilon_u(t)$ ; а  $K = B_\mu B_\lambda - B_\eta$ ;  $\Gamma = B_\mu \Lambda$ ;  $\mathcal{J} = W \Lambda$ ;  $W = \Lambda - V$  і  $H_u = \Lambda V$  - оператори віброповзучості.

**Теоретичні дослідження.** Розв'язано задачу віброповзучості за спадковою теорією старіння (СТС). Для цього використовували два методи: перший – метод Бубнова-Гальоркіна – малого параметра – Рунге-Кутти; другий - метод Бубнова-Гальоркіна (МПШВП).

Перший метод. Метод Бубнова-Гальоркіна був безпосередньо використаний для розв'язання задачі віброповзучості, тобто до рівняння (1) у вигляді

$$\int_0^l \left\{ \left[ E_0 I y_0''(x) K + P_0 y_0(x) \Gamma + \Delta P y_0(x) \sin \omega(t-t_0) \Gamma \right] F(t) + \bar{M}(t) \right\} y_0(x) dx = 0$$

при

$$y(x,t) = y_0(x) F(t); \quad \rho = - \frac{\int_0^l P_0 y_0^2(x) dx}{\int_0^l E_0 I y_0''(x) y_0(x) dx} = 3 - \frac{v(1 - \cos v)}{v - \sin v} = \frac{P_0}{P_3};$$

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= e_o \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1 \right); \\ f_o &= e_o \left( \frac{1}{\cos \frac{v}{2}} - 1 \right). \end{aligned} \right\}$$

Прогин  $f(t)$  представлено співвідношенням  $y(\ell/2, t) = f(t)$  і  $f(t) = f_o F(t)$ , де  $F(t)$  – безрозмірна функція часу з початковою умовою  $F(t_0) = 1$ .

Підставляючи все це в (1.1) і враховуючи узагальнені оператори віброповзучості [1 (табл.4.1), 4], знаходимо рівняння для динамічної часової функції  $F(t)$  в операторній формі

$$\left[ (1-\lambda)V + (\lambda-\rho)\Lambda - \Lambda\Delta\rho(t) \right] F(t) = (1-\rho)\Lambda \left[ 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin \omega(t-t_0) \right], \quad (2)$$

де  $\rho(t) = \rho + \Delta\rho(t)$ ;  $\rho = P/P_3$ ;  $\Delta\rho = \Delta P/P_3$ ;  $\Delta\rho(t) = \Delta\rho \sin \omega(t-t_0)$ .

Підставивши значення диференціальних операторів віброповзучості [4] ( $V \equiv \frac{d^2 \dots}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d \dots}{dt}$ ;  $\Lambda \equiv b_c(t) \dots + b_1(t) \frac{d \dots}{dt} + a(t) \frac{d^2 \dots}{dt^2}$ ) для спадкової теорії старіння (СТС), отримаємо основне рівняння (2) в диференціальному вигляді з урахуванням зростання модуля пружності бетону в часі

$$\begin{aligned} k_2(t)\ddot{F}(t) - \Delta\rho B_2(t)\ddot{F}(t) + k_1(t)\dot{F}(t) - \Delta\rho B_1(t)\dot{F}(t) + \zeta b_c(t)F(t) - \Delta\rho B_c(t)F(t) = \\ = b_c(t) + \Delta\rho B_c(t) \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$k_2(t) = \frac{1-\lambda}{1-\rho} + \zeta a(t), \quad k_1(t) = \gamma_1 \frac{1-\lambda}{1-\rho} + \zeta b_1(t), \quad B_2(t) = \frac{a(t)}{1-\rho} \sin \omega(t-t_0),$$

$$B_1(t) = \frac{1}{1-\rho} \left[ b_1(t) \sin \omega(t-t_0) + 2\omega a(t) \cos \omega(t-t_0) \right],$$

$$B_c(t) = \frac{1}{1-\rho} \left[ b_c(t) \sin \omega(t-t_0) + \omega b_1(t) \cos \omega(t-t_0) - \omega^2 a(t) \cos \omega(t-t_0) \right],$$

$$b_c(t) = (K_6 - 1)(\gamma_1 - \gamma_3)\gamma_3\varphi_3 e^{-\gamma_3(t-t_0)} + K_6\gamma_2\varphi_2 e^{-\gamma_2 t}(\gamma_1 - \gamma_2),$$

$$b_1(t) = \gamma_1 [K_6\varphi_1 + a(t)] + K_6\gamma_2\varphi_2 e^{-\gamma_2 t} + (K_6 - 2)\gamma_3\varphi_3 e^{-\gamma_3(t-t_0)}.$$

Далі застосуємо метод регулярного (прямого) розкладання по малому параметру  $\Delta\rho$ :  $F(t)=F_0(t) + \Delta\rho F_1(t) + \Delta\rho^2 F_2(t) + \Delta\rho^3 F_3(t) + \dots$ , який коротко будемо називати методом малого параметра й отримаємо диференціальні рівняння

$$\text{при } \Delta\rho^0 \quad k_2(t)\ddot{F}_0(t) + k_1(t)\dot{F}_0(t) + \zeta b_c(t)F_0(t) = b_c(t); \quad (4)$$

$$\text{при } \Delta\rho^1 \quad k_2(t)\ddot{F}_1(t) + k_1(t)\dot{F}_1(t) + \zeta b_c(t)F_1(t) = B_2(t)\ddot{F}_0(t) + B_1(t)\dot{F}_0(t) + B_c(t)(F_0(t) - 1); \quad (5)$$

а далі при  $i=2,3,\dots,n$

$$k_2(t)\ddot{F}_i(t) + k_1(t)\dot{F}_i(t) + \zeta b_c(t)F_i(t) = B_2(t)\ddot{F}_{i-1}(t) + B_1(t)\dot{F}_{i-1}(t) + B_c(t)F_{i-1}(t). \quad (6)$$

Точний розв'язок рівняння при  $\Delta\rho^0$  можливий тільки за умови  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma$ :

$$F_0(t) = 1 + \dot{F}_0(0) \int_{t_0}^t e^{-\frac{A_0}{C_0}(t-t_0) - \left(\frac{A_0}{\gamma C_0} - \frac{B_0}{D_0}\right) \ln \frac{C_0 + D_0 e^{-\gamma t}}{C_0 + D_0 e^{-\gamma t_0}}} dt, \quad (7)$$

де  $\dot{F}_0(0) = \frac{1-\lambda}{1-\rho} \gamma(\phi_1 + \phi_2 e^{-\gamma t_0}) K_\epsilon$ ,  $A_0 = \gamma \frac{1-\lambda}{1-\rho} + \gamma \zeta (K_\epsilon \phi_1 + a)$ ,  $C_0 = \frac{1-\lambda}{1-\rho} + \zeta a$ ,  $D_0 = \zeta \phi_3 e^{-\gamma_3 t_0}$ ,

$$B_0 = \zeta (K_\epsilon \gamma \phi_3 e^{-\gamma_3 t_0} + K_\epsilon \gamma \phi_2 + (K_\epsilon - 2) \gamma \phi_3 e^{-\gamma_3 t_0}).$$

Наступний розрахунок наближення має значні математичні труднощі, і розв'язати його в замкненому вигляді не є можливим. Тому розв'язок візьмемо наближений, у вигляді  $F(t) \approx F_0(t)$ .

Потім застосуємо метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності, який прямо прошитий у математичному пакеті (МП) «MathCad» для знаходження часової функції  $F_0(t)$ . Вихідні дані, програма для розрахунку і результати розв'язання рівняння (1.4) методом Рунге-Кутти представлені в протоколах роботи програми.

Цей метод ми коротко назвали методом Бубнова-Гальоркіна – малого параметра – Рунге-Кутти і він дозволяє знаходити прогин за формулою

$$f(t) = f_0 F(t) \approx f_0 F_0(t).$$

Метод Бубнова-Гальоркіна використаний аналогічно.

Далі застосуємо метод початкових параметрів віброповзучості – МППВП. Підставивши зразу в (2) значення матричних операторів віброповзучості для спадкової теорії старіння [4], отримаємо рівняння прогинів у матричному вигляді

$$\vec{f}(t) = f_0 \vec{F} = f_0 [(1-\lambda)V + (\lambda-\rho)\Lambda]^{-1} (1-\rho)\Lambda \dot{1}. \quad (8)$$

При  $V \equiv E$  – матричній одиниці і  $\Lambda \equiv E + C$  – матриці впливу віброповзучості [4], з рівняння (8) отримаємо початкові параметри прогину  $\vec{f}(t) = [f_0 \cdot \dot{f}_0 \cdot \ddot{f}_0 \dots]^T$ . За цими початковими параметрами й рядом Тейлора поліпшеної збіжності [1,2] знаходимо прогин у будь-який час за формулою:

$$f(t) = f_0 + \frac{\dot{f}_0}{\gamma} \cdot \frac{[1 - e^{-\gamma(t-t_0)}]}{1!} + \left(\frac{\ddot{f}_0}{\gamma^2} + \frac{\dot{f}_0}{\gamma}\right) \cdot \frac{[1 - e^{-\gamma(t-t_0)}]^2}{2!} + \dots$$

Вихідні матриці, програма для розрахунку і результати розв'язання рівняння (8) МППВІ з реалізацією в МП «MathCad» представлені в протоколах роботи програми.

Другий метод ми коротко назвали методом Бубнова-Гальоркіна – МППВІ. Він дозволяє знаходити прогин за формулою:  $f(t) = f_0 F(t)$ .

Прогини цими двома незалежними методами співпали, а матричний метод МППВІ практично збігся з методом Рунге-Кутти і тому рекомендується до подальшого застосування.

За першим методом часове рівняння отримане на основі процедури Бубнова-Гальоркіна та малого параметра у вигляді тільки першого наближення, тобто брали  $f(t) = f_0 F(t) \approx f_0 F_0(t)$ , розв'язано за методом Рунге-Кутти з комп'ютерною реалізацією в математичному пакеті (МП) «MathCad» [3]. За другим методом часове рівняння відразу розв'язано методом початкових параметрів віброповзучості (МППВІ) [4] при рівності операторів  $V \equiv E$ ;  $\Lambda \equiv E + C$  – матрицями впливу віброповзучості й так само реалізований в МП «MathCad». Результати їх розв'язання зображені графічно на рис.2.

Вихідні дані й рівняння для розрахунку за методом Бубнова-Гальоркіна – малого параметра – Рунге-Кутти в МП «MathCad»:

$$\lambda \equiv 0,11; \varphi_1 \equiv 0,5; \varphi_2 \equiv 1,5; \varphi_3 \equiv 0,1; \gamma \equiv 0,04; \gamma_1 \equiv 0,04; \gamma_2 \equiv 0,03; \gamma_3 \equiv 0,01; K_6 \equiv 2; t_0 \equiv 0; t \equiv 0, 10 \dots 500; \rho \equiv 0,1; a \equiv 0,9; \Delta\rho \equiv 0,00; \varpi \equiv 150; e_0 = 3;$$

$$f_0 \equiv e_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)} - 1 \right) = 0.412; \zeta \equiv \frac{\lambda - \rho}{1 - \rho}; a(t) \equiv a + \varphi_3 \cdot e^{-\gamma_3 \cdot (t-10)}; \nu = \pi \cdot \sqrt{\rho} = 0,993;$$

$$k_2(t) = \zeta \cdot a(t) + \frac{1 - \lambda}{1 - \rho}; b_{11}(t) \equiv K_6 \cdot (\gamma_1 \cdot \varphi_1 + \gamma_2 \cdot \varphi_2 \cdot e^{-\gamma_2 \cdot t}) + (K_6 - 2) \cdot \gamma_3 \cdot \varphi_3 \cdot e^{-\gamma_3 \cdot (t-t_0)};$$

$$b_c(t) \equiv (\gamma_1 - \gamma_3) \cdot \gamma_3 \cdot \varphi_3 \cdot e^{-\gamma_3 \cdot (t-t_0)} \cdot (K_6 - 1) + (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \gamma_2 \cdot \varphi_2 \cdot e^{-\gamma_2 \cdot (t-t_0)} \cdot K_6; a_2(t) \equiv k_2(t);$$

$$a_1(t) \equiv \gamma_1 \cdot k_2(t) + \zeta \cdot b_{11}(t); b(t) \equiv \zeta \cdot b_c(t); a_0(t) \equiv b_c(t);$$

Given

$$a_2(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} F(t) + a_1(t) \cdot \left( \frac{d}{dt} F(t) \right) + b(t) \cdot F(t) = a_0(t)$$

$$F(0) = 1$$

$$F'(0) = K_6 \cdot \frac{1 - \lambda}{1 - \rho} \cdot (\gamma_1 \cdot \varphi_1 + \gamma_2 \cdot \varphi_2 \cdot e^{-\gamma_2 \cdot t_0})$$

$$F := \text{Odesolve}(t, 500)$$

$$\text{Повз } f_0 \cdot F(500) = 1,217, \text{ вполз } f_0 \cdot F(500) = 2,027.$$

Вихідні дані й рівняння для розрахунку за методом Бубнова-Гальоркіна – МППВІ в МП «MathCad»:

$$C_1 \equiv K_6 \cdot \varphi_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1^4 & \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1^5 & -\gamma_1^4 & \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1^6 & \gamma_1^5 & -\gamma_1^4 & \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1^7 & -\gamma_1^6 & \gamma_1^5 & -\gamma_1^4 & \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1^8 & \gamma_1^7 & -\gamma_1^6 & \gamma_1^5 & -\gamma_1^4 & \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1^9 & -\gamma_1^8 & \gamma_1^7 & -\gamma_1^6 & \gamma_1^5 & -\gamma_1^4 & \gamma_1^3 & -\gamma_1^2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K_e - 1)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K_e - 1)\gamma_3^2 & (K_e - 2)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K_e - 1)\gamma_3^3 & -(2K_e - 3)\gamma_3^2 & (K_e - 3)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(K_e - 1)\gamma_3^4 & (3K_e - 4)\gamma_3^3 & -(2K_e - 6)\gamma_3^2 & (K_e - 4)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K_e - 1)\gamma_3^5 & -(4K_e - 5)\gamma_3^4 & (6K_e - 10)\gamma_3^3 & -(4K_e - 10)\gamma_3^2 & (K_e - 5)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(K_e - 1)\gamma_3^6 & (5K_e - 6)\gamma_3^5 & -(10K_e - 15)\gamma_3^4 & (10K_e - 20)\gamma_3^3 & -(5K_e - 15)\gamma_3^2 & (K_e - 6)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K_e - 1)\gamma_3^7 & -(6K_e - 7)\gamma_3^6 & (15K_e - 21)\gamma_3^5 & -(20K_e - 35)\gamma_3^4 & (15K_e - 35)\gamma_3^3 & -(6K_e - 21)\gamma_3^2 & (K_e - 7)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(K_e - 1)\gamma_3^8 & (7K_e - 8)\gamma_3^7 & -(2K_e - 28)\gamma_3^6 & (35K_e - 56)\gamma_3^5 & -(35K_e - 70)\gamma_3^4 & (2K_e - 56)\gamma_3^3 & -(7K_e - 28)\gamma_3^2 & (K_e - 8)\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ (K_e - 1)\gamma_3^9 & -(8K_e - 9)\gamma_3^8 & (28K_e - 36)\gamma_3^7 & -(6K_e - 84)\gamma_3^6 & (70K_e - 126)\gamma_3^5 & -(50K_e - 126)\gamma_3^4 & (28K_e - 84)\gamma_3^3 & -(8K_e - 36)\gamma_3^2 & (K_e - 9)\gamma_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \equiv K_e \cdot \varphi_2 \cdot e^{-\gamma_2 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2^3 & -2\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2^4 & 3\gamma_2^3 & -3\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2^5 & -4\gamma_2^4 & 6\gamma_2^3 & -4\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2^6 & 5\gamma_2^5 & -10\gamma_2^4 & 10\gamma_2^3 & -5\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2^7 & -6\gamma_2^6 & 15\gamma_2^5 & -20\gamma_2^4 & 15\gamma_2^3 & -6\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2^8 & 7\gamma_2^7 & -21\gamma_2^6 & 35\gamma_2^5 & -35\gamma_2^4 & 21\gamma_2^3 & -7\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2^9 & -8\gamma_2^8 & 28\gamma_2^7 & -56\gamma_2^6 & 70\gamma_2^5 & -56\gamma_2^4 & 28\gamma_2^3 & -8\gamma_2^2 & \gamma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

$$F_2 \equiv [(1 - \lambda) \cdot E + (\lambda - \rho) \cdot (E + C)]^{-1} \cdot (1 - \rho) \cdot (E + C) \cdot e_1$$

$$f_0 \cdot F_m(500) = 1,186, \text{ вполз } f_0 \cdot F_m(500) = 1,961$$

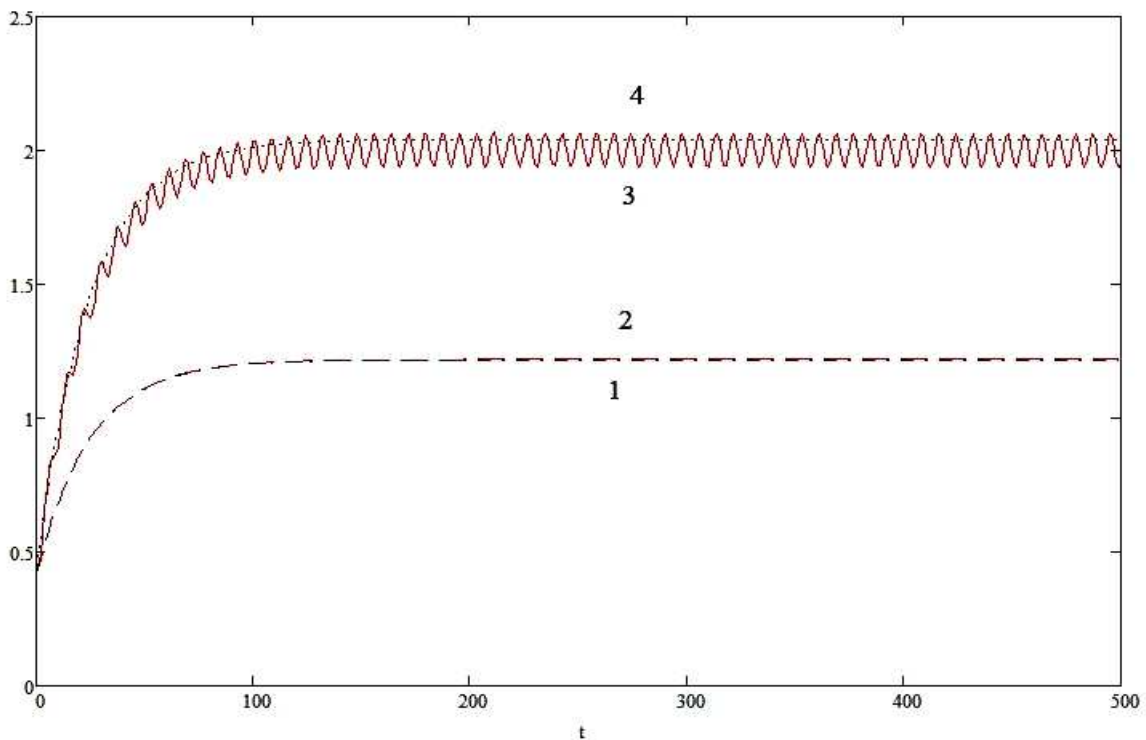


Рисунок 2. Зростання прогину  $f(t)$  залежно від  $t$  (добу) по СТС: 1, 2 – повзучість; 3, 4 – віброповзучість; 2, 4 – метод Бубнова-Гальоркіна –малого параметра-Рунге-Кутти; 1, 3 – метод Бубнова-Гальоркіна – МПІВП

Figure 2. Growth deflection  $f(t)$  depending on  $t$  ( day) by НТА: 1, 2 – creeping, 3, 4 – vibratory displacement, 2, 4 – Bubnov-Galerkin method of the-small parameter Runge-Kutta, 1, 3 – the Bubnov-Galerkin method – MIPVD

З рис.2 бачимо, що графіки зростання динамічного  $f_0(t)$  і статичного  $f_{cm}(t)$  прогину позациентрово-стисненого стержня, обчислені за двома незалежними методами,

практично повністю збіглися. Граничне, найбільше значення динамічного прогину склало  $f_{\delta}(500) = 2,027$  мм для методу Рунге-Кутти – 4, і  $f_{\delta}(500) = 1,961$  мм для МППВІП – 3. Для статичного прогину граничні значення склали  $f_{cm}(500) = 1,217$  мм – 2, і  $f_{cm}(500) = 1,186$  мм – 1 відповідно. Збіг результатів з помилкою до 3,5% свідчить про коректність отриманих розв'язків.

Таким чином, матричний метод МППВІП практично збігається з методом Рунге-Кутти і рекомендується до подальшого застосування.

**Експериментальні дослідження** позацентрово-стиснених залізобетонних стійок на віброповзучість і повзучість, з якими детальніше можна ознайомитися в працях [8,9]. За цими результатами були обчислені характеристики навантажень поперечного перерізу і деформацій залізобетонного стержня:  $\lambda = 0.153$ ,  $\rho = 0.075$ ,  $\Delta\rho = 0.0025$ ,  $e_0 = 5.4$  мм,  $\nu = \pi\sqrt{\rho}$ ,  $\varphi_1 = 0.5$ ,  $\varphi_2 = 1.5$ ,  $\varphi_3 = 0.1$ ,  $\gamma = 0.04$  1/діб,  $\gamma_1 = 0.04$  1/діб,  $\gamma_2 = 0.03$  1/діб,  $\gamma_3 = 0.01$  1/діб,  $K_e = 2$

$$f_0 = e_0 \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)} - 1 \right) = 0,541 \text{ мм.} \quad (9)$$

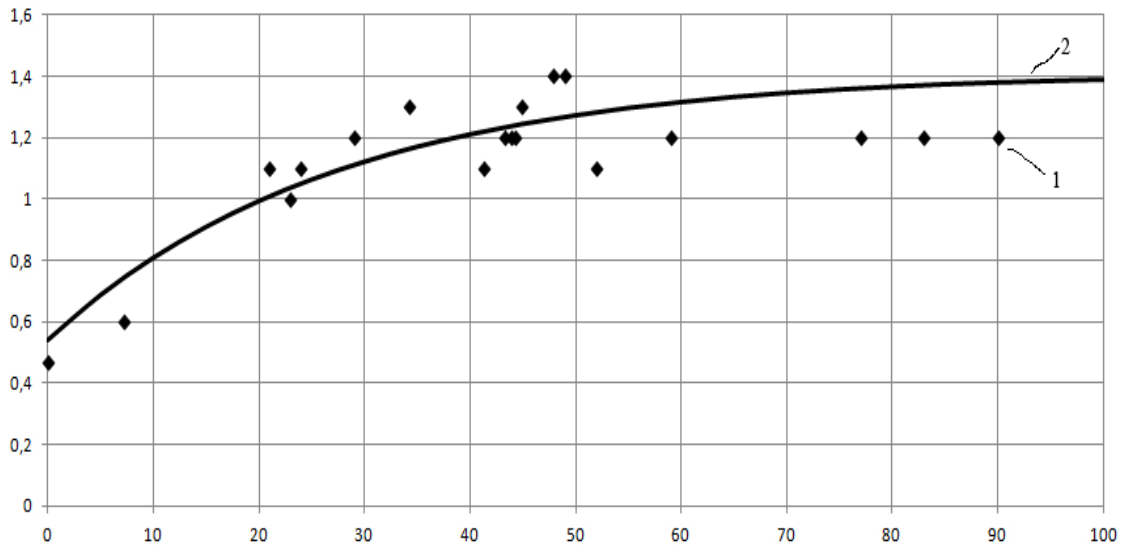
За основу теоретичних досліджень було взято рекомендований метод початкових параметрів віброповзучості (МППВІП) [7] і ММППІ [2] при розрахунку по СТС і з реалізацією в МП «MathCad». У матричній формі прогини були представлені

$$\vec{f}(t) = f_0 \vec{F} = f_0 [(1-\lambda)V + (\lambda-\rho)\Lambda]^{-1} (1-\rho)\Lambda \vec{1}. \quad (10)$$

Дані матричні методи дозволяють отримати теоретичні рішення при різних швидкостях зворотної, незворотної і пружної складових деформацій віброповзучості та повзучості, а також врахувати усі десять членів ряду Тейлора поліпшеної збіжності [2] і знайти прогин у будь-який час за формулою

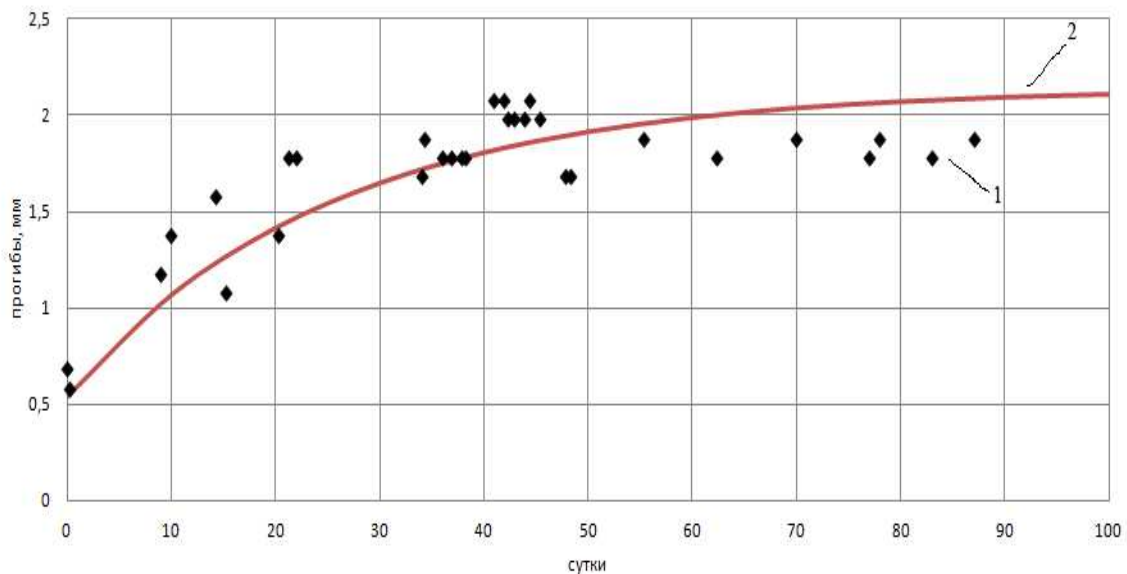
$$f(t) = f_0 + \frac{\dot{f}_0}{\gamma} \cdot \frac{[1 - e^{-\gamma(t-t_0)}]}{1!} + \left( \frac{\ddot{f}_0}{\gamma^2} + \frac{\dot{f}_0}{\gamma} \right) \cdot \frac{[1 - e^{-\gamma(t-t_0)}]^2}{2!} + \dots$$

Результати зіставлення теоретичних і експериментальних даних по прогину стійок при статичному та динамічному (вібраційному) навантаженні наведено на рис.3 (повзучість) та на рис.4 (віброповзучість).



**Рисунок 3.** Зростання прогину  $f(t)$  у часі  $t$  (добу) позакентрово-стисненого стержня при статичному навантаженні: 1  $\blacklozenge$  – експеримент, 2 — теорія ММППП по СТС (повзучість)

**Figure 3.** Growth deflection  $f(t)$  at time  $t$  ( day) of non-central-compressed rod under static loading: 1  $\blacklozenge$  – experiment 2 — theory MMIPC by HTA (creeping)



**Рисунок 4.** Зростання прогину  $f(t)$  у часі  $t$  (добу) позакентрово-стисненого стержня при динамічному навантаженні: 1  $\blacklozenge$  – експеримент, 2 — теорія МППВП по СТС (віброповзучість)

**Figure 4.** Growth deflection  $f(t)$  at time  $t$  ( day) of non-central-compressed rod under dynamic loading: 1  $\blacklozenge$  – experiment 2 — theory MIPVD by HTA (vibratory displacement)

Аналіз результатів за рисунками 3 та 4 показує, що теоретичні розв'язки прогинів стійки задовільно збігаються з експериментальними даними як при статичному навантаженні, так і динамічному. Збіг результатів свідчить про коректність отриманих теоретичних розв'язків і розроблених матричних методів – МППВП і ММППП. Також з рисунків бачимо, що найбільше значення динамічного прогину склало  $f_{\delta}(90) = 1,90$  мм для експерименту і  $f_{\delta}(90) = 2,10$  мм для теорії по МППВП. Для статичного прогину найбільші значення склали  $f_{cm}(90) = 1,20$  мм і  $f_{cm}(90) = 1,40$  мм



відповідно. Збіг результатів теорії і експериментів з помилкою 10...17% свідчить про задовільні отримані розв'язки.

Таким чином, розроблена теорія розрахунку стержнів і матричні методи (МППВП і ММППП) практично збігаються з експериментальними даними і рекомендуються для подальшого застосування.

**Висновки.** Дані матричні методи (МППВП і ММППП) дозволяють отримати теоретичне рішення при різних швидкостях зворотної, незворотної і пружної складових деформацій віброповзучості й повзучості, а також врахувати усі десять членів ряду Тейлора поліпшеної збіжності при комп'ютерній реалізації в МП «MathCad».

Розв'язки експериментально-тестових задач віброповзучості і повзучості показали, що графіки прогинів при динамічному навантаженні інтенсивніше зростають і перевищують їх ріст при статичному навантаженні, а динамічний прогин (віброповзучість) в межі перевищив статичний прогин (повзучість) в середньому на 60%.

Розроблена авторами теорія розрахунку стержнів і матричні методи МППВП та ММППП практично збігаються з експериментальними даними (розбіжність 10...17%) і рекомендуються для подальшого застосування.

**Conclusions.** These matrix methods (MIPVD and MMIPC) allow getting a theoretical solution at different speeds of reverse, irreversible and elastic components of vibratory displacement deflection and creeping and consider taking into consideration all 10 members of the Taylor series of the improved convergence at the computer implementation in MP «MathCad».

In general mechanics the problems of vibratory displacement and creeping showed that graphics of deflections under dynamic loads grows more intensively and exceeds their growth under static load, and dynamic deflection (vibratory displacement) exceeded the limits of static deflection (creeping) by an average of 60%.

Theory to calculate rods and matrix methods MIPVD and MMIPC developed by the authors practically coincides with the experimental data on the racks at static deflection and vibration load (difference 10...17%) and is recommended for further use.

#### **Список використаної літератури**

1. Яценко, Е.А. Теория длительной прочности и устойчивости железобетонных систем с учетом ползучести бетона [Текст] / Е.А. Яценко, С.А. Слободянюк. – Днепропетровск: ПГАСА, Пороги, 2002. – 250 с.
2. Слободянюк, С.А. Деформационный расчет и устойчивость стержневых железобетонных систем с учетом длительных процессов: дисс. ... доктора техн. наук: 05.23.01 [Текст] / С.А. Слободянюк. – Днепропетровск: ПГАСА, 2002. – 280 с.
3. Споруди транспорту. Мости та труби. Навантаження і впливи: ДБН В.1.2-15:2009. – К.: Мінбуд України, 2009. – 83 с.
4. Лучко, Й.Й. Вимірювання напружено-деформованого стану конструкцій мостів при змінних температурах і навантаженнях: монографія [Текст] / Й.Й. Лучко, В.В. Ковальчук. – Львів: Каменяр, 2012. – 235 с.
5. Лучко, Й.Й. Міцність, тріщиностійкість і довговічність бетонних та залізобетонних конструкцій на засадах механіки руйнування [Текст] / Й.Й. Лучко, В.М. Чубріков, В.Ф. Лазар. – Львів: Каменяр, 1999. – 348 с.
6. Макаров, Е.Г. MathCad: Учебный курс [Текст] / Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2009. – 584 с.
7. Слободянюк, С.А. Метод начальных параметров виброползучести бетона [Текст] / С.А. Слободянюк, А.П. Буратинский // Бетон и железобетон в Украине. – 2010. – № 5. – С.6–7.
8. Слободянюк, С.А. Экспериментальные исследования ползучести железобетона при вибрационной нагрузке [Текст] / С.А. Слободянюк, А.П. Буратинский // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. – 2009. – Вип.8. – С.260–267.
9. Слободянюк, С.А. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных по ползучести и виброползучести железобетонных стоек [Текст] / С.А. Слободянюк, А.П. Буратинский // Теоретичні основи будівництва: 20 Польсько-Український семінар. – Warsaw, 2012. – С.381–384.

*Отримано 10.05.2014*