УДК 681.518.3

Олександр Мацюк, Микола Приймак

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОРЕТИНОГРАМИ У ВИГЛЯДІ ЛІНІЙНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Побудовано та досліджено математичну модель електроретинограми у вигляді лінійного випадкового процесу. Запропоновано підхід і розроблено метод та наведено статистику для оцінки ядра лінійного випадкового процесу, як моделі електроретинограми.

Для проведення діагностування по електрофізіологічних сигналах (зокрема ЕРГ) із використанням статистичного підходу перш за все необхідно вибрати чи побудувати нову математичну модель електроретинограм. Це пов'язано з тим, що на основі моделі з'являються можливості визначати діагностичні ознаки, які відповідають різним станам пацієнта; провести вибір діагностичних просторів (навчання) і сформувати за експериментальними даними навчаючі сукупності, які відповідають конкретним захворюванням; побудувати правила прийняття рішення, які реалізуються на основі навчаючих сукупностей шляхом повторної реєстрації ЕРГ.

В статті розглянуто перший етап діагностування — побудова математичної моделі електроретинограми у вигляді лінійного випадкового процесу, а також оцінку ядра моделі ЕРГ.

Обґрунтування моделі електроретинограми.

Аналіз механізму утворення ЕРГ показує, що зорову систему можна з певним припущенням розглядати як лінійну.

У результаті подразнення сітківки світловими імпульсами, на виході, де розміщено давач, ми спостерігаємо вихідний сигнал, тобто ЕРГ. Оскільки послідовність вхідних імпульсів є випадковою, то ЕРГ описується з допомогою випадкового процесу

$$\xi(t) = \sum_{k:\tau_k < t} \alpha_k \varphi(\tau_k, t) \qquad (1)$$

де $\{..\tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 \ldots < t\}$ — моменти виникнення імпульсів; $\varphi(\tau, t)$

— імпульсна реакція зорової системи, тобто відгук нестаціонарної системи в момент часу t на одиничний імпульс, що потрапив на вхід у момент часу τ ; α_k — випадкові величини, що характеризують інтенсивність імпульсів.

Вираз (1) можна записати в іншому вигляді. Для цього використаємо випадковий процес з незалежними приростами $\eta(\tau)$, прирости (стрибки) якого в точках росту τ_k являють собою випадкові величини α_k , тобто

$$d\eta(\tau_k)=\eta(\tau_k+0)-\eta(\tau_k-0)=\alpha_k,\ \ k=\ldots-1,0,1,\ldots \qquad (2)$$

При зробленому зауваженні модель ЕРГ можна записати у вигляді стохастичного інтегралу

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\eta(\tau), \qquad (3)$$

для якого процес $\eta(\tau)$ ще називають породжуючим процесом. Сам процес $\xi(t)$ називають [1] лінійним випадковим процесом.

Якщо вважати, що зорова система інваріантна в часі, тобто її імпульсна реакції $\varphi(\tau,t)=\varphi(t-\tau)$, а породжуючий процес $\eta(\tau)$ — однорідний, то моделлю ЕРГ буде стаціонарний лінійний процес

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)d\eta(\tau) \qquad (4)$$

Легко показати, що у випадку, коли для лінійного випадкового процесу (3) його породжуючий процес $\eta(\tau)$ однорідний, математичне сподівання для (3)

$$\mathbf{M}[\xi(t)]=\chi_1\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\tau, \qquad (5)$$

кореляційна функція

$$R_\xi(t_1,t_2)=\chi_2\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t_1)\varphi(\tau,t_2)d\tau, \qquad (6)$$

де χ_1 і χ_2 — відповідні кумулянти випадкової величини $\eta(1)$.

Для стаціонарного лінійного випадкового процесу (4) вирази (5) та (6) набувають вигляду

$$\mathbf{M}[\xi(t)] = \chi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = m = const, \quad (7)$$

$$R_\xi(\tau) = \chi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi(x+\tau)dx. \quad (8)$$

У моделях (1), (3), (4) не бралися до уваги просторові координати точок, у яких розміщені вхід і вихід системи. В загальному випадку імпульсна реакція залежить не тільки від змінних часу τ і t, але й від просторових координат. З урахуванням сказаного, модель ЕРГ можна обґрунтувати у вигляді лінійного випадкового поля

$$\xi(t,\bar{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{R_3} \varphi(\tau, t, \bar{s}, \bar{r}) d_\tau d_{\bar{s}} \eta(\tau, \bar{s}) \qquad \bar{r} \in Q,\ t \in T, \quad (9)$$

де τ, t — змінні часу, розглянуті в моделях (1), (3), (4);

$\bar{s}$ — точка в просторі R_3, де розміщений вхід зорової системи;

$\bar{r}$ — точка розміщення виходу системи, тобто точка, в якій спостерігається ЕРГ;

$\varphi(\tau, t, \bar{s}, \bar{r})$ — імпульсна просторово-часова реакція лінійної системи;

$\eta(\tau, \bar{s})$ – неоднорідне поле з незалежними приростами як по часу, так і по простору, прирости якого характеризують енергетичні характеристики вхідного сигналу.

У випадку, коли зорова система є інваріантною в часі, її моделлю є лінійне стаціонарне по часу поле

$$\xi(t,\bar{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{R_3} \varphi(t-\tau, \bar{s}, \bar{r}) d_\tau d_{\bar{s}} \eta(\tau, \bar{s}). \quad (10)$$

За умови, що в (9) або (10) просторові координати $\bar{s}$ і $\bar{r}$ — фіксовані, ми отримуємо частковий випадок цих моделей, а саме лінійний процес (3) чи відповідно лінійний стаціонарний процес (4).

Важливо, що для лінійного випадкового процесу (3) в явному вигляді записана його характеристична функція. Якщо породжуючий процес $\eta(\tau)$ є однорідним, то згідно з [1] логарифм одновимірної характеристичної функції у формі Колмогорова процесу (3) визначається виразом

$$\ln f_{\xi}(u,t) = \ln \mathbf{M}[\exp(iu\xi(t)] = imu\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\exp(iux\varphi(\tau,t)-1-iux\varphi(\tau,t)]\frac{dK(x)}{x^2}d\tau, \qquad (11)$$

де параметри *m* — математичне сподівання і *K (x)* — пуассонівський спектр стрибків у формі Колмогорова.

Логарифм *n*-вимірної характеристичної функції лінійного випадкового процесу у формі Колмогорова, згідно з [1,2] визначається вираз ом:

$$\ln f_{\xi}(u_1,...,u_n;t_1,...,t_n) = \ln \mathbf{M}\left[\exp(i\sum_{k=1}^{n}u_k\xi(t_k)\right] =$$

$$= im\sum_{k=1}^{n}u_k\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t_k)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp(ix\sum_{k=1}^{n}u_k\varphi(\tau,t_k)-1-ix\sum_{k=1}^{n}u_k\varphi(\tau,t_k))\right]\frac{dK(x)}{x^2}d\tau, \quad (12)$$

$n = 1,2,...;t_1,...,t_n \in T.$

Метод характеристичних функцій має велике практичне значення для розв'язання багатьох прикладних задач, при цьому важливу роль відіграють такі факти [1,2]:

1) існує взаємно однозначна відповідність між функціями розподілу і характеристичними функціями;

2) при використанні характеристичних функцій у зв'язку з її неперервністю і обмеженістю широко використовуються класичні методи функціонального аналізу, який дозволяє проводити аналіз різних видів збіжності рядів характеристичних функцій замість функцій розподілів;

3) шляхом використання характеристичних функцій отримуються основні результати теорії ймовірностей, які стосуються доведення центральної граничної теореми для суми незалежних випадкових величин;

4) характеристична функція у випадку існування n перших моментів має неперервні похідні до порядка n включно, що дозволяє з її допомогою значно спростити процес обчислення моментів (кумулянтів) n-го порядку випадкової величини.

Наявність характеристичної функції (12), як зазначено у [3], дозволяє проводити повний аналіз відгуків лінійних систем: знаходити кумулянти, функцію розподілу ймовірності або функцію розподілу відгуку, вивчати розподіл стрибків реалізацій на вході й виході системи, прослідкувати зв'язки між вхідними й вихідними характеристиками лінійних ланок.

Модель ЕРГ у вигляді лінійного випадкового процесу з дискретним часом.

Враховуючи, що до складу ІВС входять пристрої, які здійснюють цифрову обробку сигналів (дискретизації по часу та квантуванню по рівню реальних неперервних сигналів), важливо побудувати модель ЕРГ з дискретним часом. У відповідності з [1-3] лінійним випадковим процесом з дискретним часом називають процес

$$\xi_t = \sum_{\tau=\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t}\, \varsigma_\tau,\ t \in \overline{(-\infty,\infty)} \tag{13}$$

сформований лінійною системою з дискретною імпульсною реакцією $\varphi_{\tau,t}$, $\sum_{\tau=\infty}^{\infty} \left|\varphi_{\tau,t}\right|^2 < \infty$ при кожному фіксованому t з використанням вхідного білого шуму $\varsigma_\tau, \tau \in (-\infty,\infty)$. Процес ς_τ називають породжуючим процесом, невипадкову функцію $\varphi_{\tau,t}$ — ядром зображення (13).

Аналогічно (5) і (6), математичне сподівання і кореляційну функцію для ЛВП з дискретним часом (13) можна записати

$$\mathbf{M}\xi_t = \chi_1 \sum_{\tau=\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t} \tag{14}$$

$$R_{t_1,t_2} = \chi_2 \sum_{\tau=\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t_1} \varphi_{\tau,t_2}, \tag{15}$$

де $\chi_1 = \mathbf{M}\varsigma_\tau$, $\chi_2 = \mathbf{D}\varsigma_\tau$.

Коли ЛВП з дискретним часом є стаціонарним, тобто $\xi_t = \sum_{\tau=\infty}^{\infty} \varphi_{\tau-t}\, \varsigma_\tau$, то

$$\mathbf{M}\xi_t = \chi_1 \sum_{x=\infty}^{\infty} \varphi_x = const, \tag{16}$$

$$R_\tau = \chi_2 \sum_{x=\infty}^{\infty} \varphi_x \varphi_{x+\tau}. \tag{17}$$

Оцінювання ядра моделі електроретинограм.

На відміну від відомих моделей, запропонована вище математична модель ЕРГ у вигляді лінійного випадкового процесу дає можливість оцінювати його ядро та його характеристики за результатами експерименту.

Розглянемо питання статистичної оцінки ядра лінійного випадкового процесу.

При відсутності фотостимуляції сигнал, який надходить на давач, можна зобразити у вигляді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\, d\eta(\tau), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{18}$$

де, як зазначалося вище, ядро $\varphi(s)$ має фізичну інтерпретацію імпульсної реакції системи.

Будемо вважати, що ядро $\varphi(\tau)$ має скінчену тривалість T_0. За цієї умові фотостимули будемо подавати через інтервали $T > T_0$, тобто на всю систему буде надходити періодично з періодом T послідовність імпульсів. При зроблених зауваженнях досліджуваний процес можна зобразити у вигляді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\, d(\eta(\tau) + I(\tau)), \tag{19}$$

де $\eta(\tau)$ — процес з незалежними приростами, що враховує шумову складову вхідного процесу,

$I(\tau) = I_0 \sum_{n=0}^{N-1} U(\tau - n\mathrm{T})$ — послідовність фотостимулів, I_0 — потужність одного стимулу, причому $I > \ D(\eta(\tau))$,

$U(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$ — функція Хевісайда,

T - період подачі стимулів, N — кількість стимулів, причому $I_0 > \mathbf{D}[d\eta(\tau)]$.

При зроблених зауваженнях (19) можна представити у вигляді:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,d\eta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,dI(\tau), \qquad (20)$$

де другий доданок в (20) є послідовністю відгуків стаціонарної лінійної системи з імпульсною реакцією $\varphi(\tau)$ на вплив послідовності — імпульсів, що подаються на її вхід.

В той же час $\varphi(\tau)$ є ядром лінійного випадкового процесу (19), яке нам необхідно оцінити.

Беручи до уваги (7), очевидно, що

$$\mathbf{M}\xi(\mathrm{t}) = m + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,dI(\tau) = m + I_0 \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(t-n\mathrm{T}) \cdot U(t-n\mathrm{T}) \cdot U((n+1)\mathrm{T}-t), \qquad (21)$$

де $m = \mathbf{M}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathrm{t}-\tau)\,d\eta(\tau)\right]$.

Враховуючи, що при синтезі системи реєстрації досліджуваних сигналів неважко буде розробити фільтр, який враховуватиме «постійну складову» вхідного сигналу в (21), приймемо $m = 0$. На рис.1 проілюстровано сказане вище.

Таким чином, для того, щоб оцінити ядро процесу (18), а в нашому випадку — це оцінити імпульсну реакцію зорової системи, достатньо оцінити математичне сподівання процесу (20) на інтервалі $[0, T_0]$. В якості такої оцінки можна запропонувати

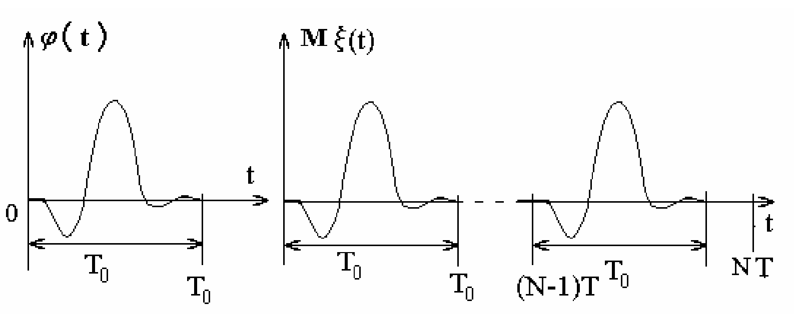

Рисунок 1.

$$m(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi\left(t + n\mathrm{T}\right), \quad t \in \left[0, \mathrm{T}_0\right]. \qquad (22)$$

Таким чином, оцінкою ядра $\varphi(\tau)$ процесу (18), яку ми позначимо через $\hat{\varphi}(\tau)$, буде вираз (22), тобто

$$\hat{\varphi}(t) = m(t), \quad t \in \left[0, \mathrm{T}_0\right]. \qquad (23)$$

Зауважимо лише, що в розроблюваній системі оцінка (23) буде будуватися з допомогою цифрових обчислювальних засобів, тобто параметри будуть набувати дискретних значень $t_i = i \cdot \Delta t$, де $\Delta t = T_0 / N$ — крок дискретизації, $i = \overline{0, N-1}$.

В даній роботі отримано такі результати:

– побудовано математичну модель електроретинограми у вигляді лінійного випадкового процесу, якщо враховувати механізм утворення біопотенціалів сітківки ока. Важливо, що побудована модель є придатною для вирішення завдань вимірювання та діагностики;

– запропоновано підхід і розроблено метод та наведено статистику для оцінки ядра лінійного випадкового процесу як моделі електроретинограми.

Наведені статистичні оцінки можуть бути використанні в прикладних дослідженнях діагностики зорового апарату.

Література

1. Марченко Б. Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике / Б. Г. Марченко. — К.: Наукова думка, 1973. — 191 с.
2. Марченко Б. Г. Линейные случайные процессы и их приложения / Б. Г. Марченко, Л. Н. Щербак. — К.: Наукова думка, 1975. — 143 с.
3. Марченко Б. Г. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин / Б. Г. Марченко, М. В. Мыслович — К.: Наукова думка, 1992. — 192 с.
4. Приймак М. В. Математичне моделювання та застосування теорії критеріїв Неймана-Пірсона в задачах діагностики / М.В. При-

ймак, О. В. Мацюк, М. Є. Фриз // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — Хмельницький: Вид.-во Технологічного ун.-ту Поділля. — 1999. — №1. — С.12–17.

Oleksandr Matsiuk, Mykola Pryjmak

MATHEMATICAL MODEL OF AN ELECTRORETINOGRAM IN FORM OF A LINEAR STOCHASTIC PROCESS

Mathematical model of an electroretinogram in form of a linear process has been built and analyzed. For this purpose, the approach has been proposed and the method has been elaborated, statistical data for estimation of the kernel of a linear stochastic process has been given.