

УДК 519.63

Ігор Баран

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ У ДВОШАРОВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

У роботі розглянуто задачі, що описуються еліптичним рівнянням в полярній системі координат з умовами спряження неідеального контакту. На основі методу скінчених елементів (МСЕ) побудовані обчислювальні алгоритми підвищеного порядку точності їх дискретизації. Наведено результати розв'язку модельних прикладів

Ключові слова: *неідеальний контакт, тонке включення, умови спряження, МСЕ*

Реальні технічні системи є, як правило, багатокомпонентними конструкціями. Складові частини контактують між собою через тонкі включення, які мають інші, по відношенню до основних складових, фізико-механічні властивості. Враховуючи складність розглядуваних конструкцій та режимів зовнішнього впливу, якісне дослідження різноманітних фізико-механічних процесів в таких системах зустрічає значні труднощі та на сьогодні можливе лише за допомогою сучасних обчислювальних методів і засобів математичного моделювання. На даний час одним із найкращих методів для розв'язування задач такого класу є МСЕ.

Підземне сховище для зберігання промислових відходів можна моделювати двома аксіальними анізотропними циліндрами, з'єднаними між собою тонкими включенням. При цьому виникають задачі стаціонарної дифузії тепла для складених кільцевих циліндрів. Задачі такого типу зводяться до розв'язування еліптичного рівняння з умовами спряження неідеального контакту.

Постановка та схема розв'язування задачі. Розглянемо випадок, коли розв'язок не залежить від осьової координати z . Тоді на області $G = G_1 \cup G_2$ в полярній системі координат рівняння набуде вигляду

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = f, \quad (r, \varphi) \in G, \quad (1)$$

де $\bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ij}(r, \varphi)$ - неперервні на кожній із областей \bar{G}_l , мають неперервні обмежені перші часткові похідні на G_l ($i, j, l = 1, 2$); $f|_{G_l} = f(r, \varphi)|_{G_l} \in C(G_l)$,

$|f| < \infty$; $\bar{G}_1 = \{(r, \varphi) : 0 < l_1 \leq r \leq l_0, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}$, $\bar{G}_2 = \{(r, \varphi) : l_0 \leq r \leq L_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}$, $\bar{G} = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2$, $L_2 - l_2 \leq 2\pi$. Області \bar{G} в прямокутній декартовій системі

координат ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) відповідає складене кільце при $L_2 - l_2 = 2\pi$ або складений кільцевий сектор при $L_2 - l_2 < 2\pi$. Кільцевому відрізку γ в полярній системі координат відповідає прямолінійний відрізок $\gamma_0 = \{(r, \varphi) :$

$r = l_0, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}$. Для складеного кільця \bar{G} його границя $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

складається з двох кіл $\Gamma_1 = \{(r, \varphi) : r = l_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2 = l_2 + 2\pi\}$ і $\Gamma_2 = \{(r, \varphi) : r = L_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2 = l_2 + 2\pi\}$, а для складеного кільцевого сектора

\bar{G} - $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$ ($\Gamma_1 = \{(r, \varphi) : r = l_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}$,

$\Gamma_2 = \{(r, \varphi) : r = L_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}$, $\Gamma_3 = \{(r, \varphi) : 0 < l_1 \leq r \leq L_1, \varphi = l_2\}$,

$\Gamma_4 = \{(r, \varphi) : 0 < l_1 \leq r \leq L_1, \varphi = L_2\}$, $L_2 - l_2 < 2\pi$).

На включенні γ_0 області \bar{G} задані неоднорідні умови спряження неідеального контакту у вигляді:

$$R_1 \left\{ \bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}^- + R_2 \left\{ \bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}^+ = [u] + \delta, \quad (r, \varphi) \in \gamma_0, \quad (2)$$

$$\left[\bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] = \beta_1 (\nu u^+ + \chi u^-) + \alpha_1, \quad (r, \varphi) \in \gamma_0, \quad (3)$$

де $[u] = u^+ - u^-$, $u^+ = \{u\}^+ = u(r, \varphi)$ при $(r, \varphi) \in \gamma_0 \cap \partial G_2$, $u^- = \{u\}^- = u(r, \varphi)$

при $(r, \varphi) \in \gamma_0 \cap \partial G_1$, $\gamma_0 = \partial G_1 \cap \partial G_2$, $R_1, R_2, \beta_1, \nu, \chi = const \geq 0$, $R_1 + R_2 > 0$,

$\nu + \chi = 1$, $\alpha_1, \delta \in C(\gamma_0)$. При R_1, R_2 , одночасно нерівних нулю, прийемо

$\nu = R_1 / (R_1 + R_2)$, $\chi = R_2 / (R_1 + R_2)$.

Крайові умови на ділянках Γ_1, Γ_2 задамо у вигляді:

$$u = g_1(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Gamma_1, \quad (4)$$

$$\bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\bar{\alpha}_1 u + \bar{\beta}_1, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_2, \quad (5)$$

де $\bar{\alpha}_1 = const > 0, \bar{\beta}_1 \in L_2(\Gamma_2)$.

Розглядаючи задачу на складеному кільці ($l_2 = 0, L_2 = 2\pi$), будемо шукати 2π - періодичний розв'язок $u_1(r, \varphi)$, що задовольняє співвідношення (1)-(5) і умови

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad r \in [l_1, L_1], \quad (6)$$

$$\left\{ \bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\} \Big|_{\varphi=0} = \left\{ \bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\} \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad r \in [l_1, L_1]. \quad (7)$$

Якщо розглядається задача на складеному сегменті ($L_2 - l_2 < 2\pi$), то на ділянках Γ_3, Γ_4 задамо наступні крайові умови:

$$u = g_2(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Gamma_3, \quad (8)$$

$$\bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\bar{\alpha}_2 u + \bar{\beta}_2, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_4, \quad (9)$$

де $\bar{\alpha}_2 = const > 0, \bar{\beta}_2 \in L_2(\Gamma_2)$.

Таким чином, незалежний від координати z дифузійний процес у складеному кільцевому циліндрі описується крайовою задачею (1)-(9) (задача 1), а у складеному кільцевому секторі – крайовою задачею (1)-(5), (8), (9) (задача 2) для еліптичного рівняння, записаного в полярній системі координат з умовами спряження неідеального контакту.

Використовуючи методику, викладену в роботі [1], та результати, отримані автором в роботі [2], для задачі 1 будемо відповідну їй варіаційну задачу, яка полягає у відшуканні функції $u_1(r, \varphi) \in H_1$, що надає мінімум функціоналу енергії

$$\Phi_1(v) = \iint_G \left\{ r \bar{k}_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \bar{k}_{12} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} dr d\varphi +$$

$$+ \frac{l_0}{R_1 + R_2} \int_0^{2\pi} \left([v]_{r=l_0} \right)^2 d\varphi + \beta_1 \int_0^{2\pi} l_0 (v v^+ + \chi v^-)^2 d\varphi + \int_0^{2\pi} \bar{\alpha}_1 L_1 (v|_{r=L_1})^2 d\varphi -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \iint_G r f v d r d \varphi - 2 \int_0^{2\pi} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} l_0 [v] d \varphi + 2 \int_0^{2\pi} l_0 \alpha_1 v^+ d \varphi - \\
& - 2 \int_0^{2\pi} \bar{\beta}_1 L_1 v|_{r=L_1} d \varphi, \quad \forall v(r, \varphi) \in H_1, \tag{10}
\end{aligned}$$

де $H_1 = \{v(r, \varphi)|_{G_l} \in W_2^1(G_l) : l=1, 2; v|_{\Gamma_1} = g_1(r, \varphi), v(r, 0) = v(r, 2\pi), r \in [l_1, L_1]\}$. Тут $W_2^1(G_l)$ - простір функцій С.Л.Соболева, визначених на областях G_l [1].

Задача в слабкій постановці полягає у відшуканні функції $u_1(r, \varphi) \in H_1$, що задовольняє $\forall v(r, \varphi) \in H_{10}$ рівняння

$$\begin{aligned}
& \iint_G \left\{ r \bar{k}_{11} \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \bar{k}_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} d r d \varphi + \\
& + \int_0^{2\pi} \frac{l_0 [u_1][v]|_{r=l_0}}{R_1 + R_2} d \varphi + \beta_1 l_0 \int_0^{2\pi} (v u_1^+ + \chi u_1^-)(v v^+ + \chi v^-) d \varphi + \int_0^{2\pi} \bar{\alpha}_1 L_1 u_1 v|_{r=L_1} d \varphi = \\
& = \iint_G r f v d r d \varphi + \int_0^{2\pi} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} l_0 [v]|_{r=l_0} d \varphi - \int_0^{2\pi} l_0 \alpha_1 v^+ d \varphi + \int_0^{2\pi} \bar{\beta}_1 L_1 v|_{r=L_1} d \varphi, \tag{11}
\end{aligned}$$

де $H_{10} = \{v(r, \varphi)|_{G_l} \in W_2^1(G_l) : l=1, 2; v|_{\Gamma_1} = 0, v(r, 0) = v(r, 2\pi), r \in [l_1, L_1]\}$.

Аналогічно, для крайової задачі 2 варіаційна задача полягає у відшуканні функції $u_2(r, \varphi) \in H_2$ яка $\forall v(r, \varphi) \in H_2$ надає мінімум функціоналу енергії

$$\begin{aligned}
\Phi_2(v) & = \iint_G \left\{ r \bar{k}_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \bar{k}_{12} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} d r d \varphi + \\
& + \frac{l_0}{R_1 + R_2} \int_{l_2}^{L_2} ([v]|_{r=l_0})^2 d \varphi + \beta_1 \int_{l_2}^{L_2} l_0 (v v^+ + \chi v^-)^2 d \varphi + \int_{l_2}^{L_2} \bar{\alpha}_1 L_1 (v|_{r=L_1})^2 d \varphi + \\
& + \int_{l_1}^{L_1} \bar{\alpha}_2 (v|_{\varphi=L_2})^2 d r - 2 \iint_G r f v d r d \varphi - 2 \int_{l_2}^{L_2} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} l_0 [v] d \varphi + \\
& + 2 \int_{l_2}^{L_2} l_0 \alpha_1 v^+ d \varphi - 2 \int_{l_2}^{L_2} \bar{\beta}_1 L_1 v|_{r=L_1} d \varphi - 2 \int_{l_1}^{L_1} \bar{\beta}_2 v|_{\varphi=L_2} d r, \quad \forall v(r, \varphi) \in H_2, \tag{12}
\end{aligned}$$

де $H_2 = \{v(r, \varphi)|_{G_l} \in W_2^1(G_l) : l=1, 2; v|_{\Gamma_1} = g_1(r, \varphi), v|_{\Gamma_3} = g_2(r, \varphi)\}$.

Задача в слабкій постановці полягає у відшуванні функції $u_2(r, \varphi) \in H_2$, ЩО задовольняє

$\forall v(r, \varphi) \in H_{20} = \{v(r, \varphi)|_{G_l} \in W_2^1(G_l) : l=1,2; v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0\}$ рівняння

$$\begin{aligned} & \iint_G \left\{ r \bar{k}_{11} \frac{\partial u_2}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \bar{k}_{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} dr d\varphi + \\ & + \frac{l_0}{R_1 + R_2} \int_{l_2}^{L_2} ([v]|_{r=l_0})^2 d\varphi + \beta_2 l_0 \int_{l_2}^{L_2} (v u_2^+ + \chi u_2^-)(v v^+ + \chi v^-) d\varphi + \\ & + \int_{l_2}^{L_2} \bar{\alpha}_1 L_1 u_2 v|_{r=L_1} d\varphi + \int_{l_2}^{L_2} \bar{\alpha}_2 u_2 v|_{\varphi=L_2} dr = \iint_G r f v dr d\varphi + \int_{l_2}^{L_2} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} l_0 [v]|_{r=l_0} d\varphi - \\ & - \int_{l_2}^{L_2} l_0 \alpha_1 v^+ d\varphi + \int_{l_2}^{L_2} \bar{\beta}_1 L_1 v|_{r=L_1} d\varphi + \int_{l_1}^{L_1} \bar{\beta}_2 v|_{\varphi=L_2} dr. \end{aligned} \quad (13)$$

Використовуючи результати, наведені в роботі [1], легко встановити справедливність наступних тверджень.

Лема. Задачі (10), (11) ((12), (13)) еквівалентні і мають єдиний в H_1 (H_2) розв'язок.

Визначення. Розв'язки $u_1(r, \varphi) \in H_1$ та $u_2(r, \varphi) \in H_2$ відповідно задач (10), (11) та (12), (13) називаються узагальненими розв'язками, а самі ці задачі – узагальненими задачами крайових задач 1 та 2.

Теорема. Крайова задача m має єдиний узагальнений розв'язок $u_m(r, \varphi) \in H_m$. Якщо $u_m(r, \varphi)|_{\bar{G}_l} \in C^1(\bar{G}_l) \cap C^2(G_l)$ ($l, m=1,2$), то $u_m(r, \varphi) \in$ класичним розв'язком задачі m .

Розглядувані крайові задачі зручно розв'язувати за допомогою МСЕ. Для цього розіб'ємо області \bar{G}_j на N_j скінчених трикутних елементів \bar{e}_i^j ($i = \overline{1, N_j}; j = 1, 2$). Для знаходження наближеного узагальненого розв'язку задачі m використаємо простори $H_{mk}^N \subset H_m$ ($m = 1, 2$) скінчено-елементних функцій $v_k^N(r, \varphi)$. Позначимо \bar{H}_k^N простір неперервних на областях \bar{G}_1, \bar{G}_2 функцій $v_k^N(r, \varphi)$, що є повними поліномами степеня k змінних r, φ на кожному із \bar{e}_i^j . Тоді наближений узагальнений розв'язок $u_{km}^N(r, \varphi)$ крайової задачі m будемо шукати в підмножині $H_{mk}^N \subset H_m$. Тут

$$H_{1k}^N = \{v_k^N(r, \varphi) \in \bar{H}_k^N : v_k^N|_{\Gamma_1} = g_1(r, \varphi), v_k^N(r, 0) = v_k^N(r, 2\pi), r \in [l_1, L_1]\},$$

$$H_{2k}^N = \{v_k^N(r, \varphi) \in \bar{H}_k^N : v_k^N|_{\Gamma_1} = g_1(r, \varphi), v_k^N|_{\Gamma_3} = g_2(r, \varphi)\}.$$

Виходячи із варіаційної задачі (10) або (12) (аналогічно із задачі у слабкій постановці (11) або (13)), числовий наближений узагальнений розв'язок отримуємо як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь із симетричною додатно визначеною розрідженою матрицею [1, 2].

Справджується твердження: Нехай класичний розв'язок u_m задачі m має на областях G_l ($l=1,2$) обмежені неперервні часткові похідні до $(k+1)$ -го порядку включно. Тоді для наближеного узагальненого розв'язку $u_{mk}^N \in H_{mk}^N$ цієї задачі справедлива оцінка [1]

$$\|u_m - u_{mk}^N\|_{W_2^1} \leq \frac{c_m h^k}{f(\theta)}, \quad (14)$$

де $c_m = \text{const} > 0$, h - довжина найбільшої сторони всіх \bar{e}_i^j , k - степінь поліномів МСЕ; при $k=1$ $f(\theta) = \cos(\theta)$, θ - половина величини найбільшого кута; при $k=2,3$ $f(\theta) = \sin(\theta)$, θ - величина найменшого кута всіх \bar{e}_i^j ,

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 = \iint_G \left\{ \psi^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2 \right\} dr d\varphi.$$

Результати розв'язання модельних прикладів.

В області $G = G_1 \cup G_2$ (рис. 1, а) визначена крайова задача 1, де

$$\bar{k}_{11} = \begin{cases} 0,5, & (r, \varphi) \in \bar{G}_1, \\ 0,75, & (r, \varphi) \in \bar{G}_2, \end{cases} \quad \bar{k}_{12} = \bar{k}_{21} = \begin{cases} 0,75, & (r, \varphi) \in \bar{G}_1, \\ 1,25, & (r, \varphi) \in \bar{G}_2, \end{cases} \quad \bar{k}_{22} = \begin{cases} 1,5, & (r, \varphi) \in \bar{G}_1, \\ 2,25, & (r, \varphi) \in \bar{G}_2, \end{cases}$$

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} (1,5 \sin \varphi - 0,5r) / r^2, & (r, \varphi) \in G_1, \\ (2,25 \sin \varphi - 1,5r) / r^2, & (r, \varphi) \in G_2. \end{cases}$$

Параметри умов спряження (2), (3) такі: $R_1 = 1$; $R_2 = 0,5$;
 $\omega = 0,25 \cos \varphi + 1$; $\delta = 0,6875 \cos \varphi - 0,75$.

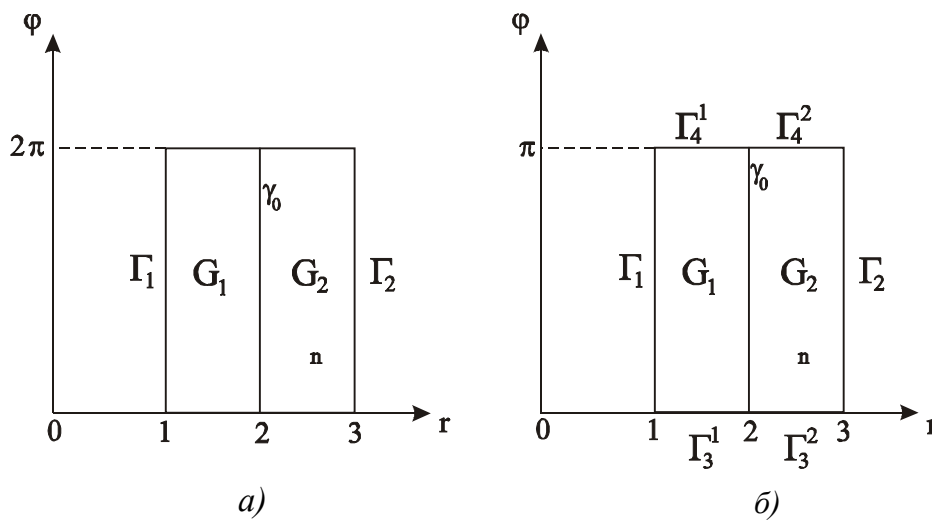


Рисунок 1. Модельна область \bar{G} з включенням γ_0
 а) складене кільце; б) складений кільцевий сектор

Параметри крайових умов (4), (5) наступні: $g_1 = \sin \varphi + 1$; $\bar{\alpha}_1 = 1$;
 $\bar{\beta}_1 = \sin \varphi + 7,5 + 5 \cos \varphi / 12$.

За цих даних класичний розв'язок модельного прикладу має вигляд:

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} r + \sin \varphi, & (r, \varphi) \in G_1, \\ 2r + \sin \varphi, & (r, \varphi) \in G_2. \end{cases}$$

Задачі розв'язано за допомогою системи DIFUS [2]. Розглядувана область розбивалася на елементи з трьома та шістьма вузловими точками з подвійною нумерацією вузлів на включенні, тобто для апроксимації використовувалися кусково-лінійні та кусково-квадратичні функції МСЕ. Використання для апроксимації різних видів функцій МСЕ для однакової кількості вузлів розбиття дає розв'язки однакового порядку точності. При використанні кусково-квадратичних функцій область \bar{G} з розрізом γ_0 розбивалась на 96 трикутних елементів. Порядок матриці МСЕ $n=250$. Півширина стрічки ненульових елементів матриці після перенумерації вузлів $m=27$. Відносна похибка $\Delta = |(u - u_k^N) / u| \cdot 100\%$ отриманого наближеного числового розв'язку знаходилась в наступних межах: $8,79 \cdot 10^{-8} < \Delta < 8,04 \cdot 10^{-2}$ – для $v_2^N \in H_2^N$. В табл.1 наведено деякі результати розрахунку.

Таблиця 1

Результати розрахунку крайової задачі 1.

Номер вузла	r -координата вузла	φ -координата вузла	Точний розв'язок	Наближений розв'язок	Відносна похибка
19	2	0	4	4	$8,79 \cdot 10^{-8}$
116	2	$5\pi/6$	4,5	4,4997696	$5,12 \cdot 10^{-3}$
117	2	$5\pi/6$	2,5	2,4998398	$6,41 \cdot 10^{-3}$
191	1,5	$4\pi/3$	0,6339746	0,6334959	$7,55 \cdot 10^{-2}$
218	2	$5\pi/3$	3,1339746	3,1314549	$8,04 \cdot 10^{-2}$
220	2	$5\pi/3$	1,1339746	1,1339618	$1,13 \cdot 10^{-3}$
242	1,5	$11\pi/6$	1	1,0000431	$4,31 \cdot 10^{-3}$

В області $G = G_1 \cup G_2$ (рис. 1, б) визначена крайова задача 2, де

$$\bar{k}_{11} = \begin{cases} 2, & (r, \varphi) \in \bar{G}_1, \\ 1,5, & (r, \varphi) \in \bar{G}_2, \end{cases} \quad \bar{k}_{12} = \bar{k}_{21} = \begin{cases} 1, & (r, \varphi) \in \bar{G}_1, \\ 0,75, & (r, \varphi) \in \bar{G}_2, \end{cases} \quad \bar{k}_{22} = \begin{cases} 0,75, & (r, \varphi) \in \bar{G}_1, \\ 0,5, & (r, \varphi) \in \bar{G}_2, \end{cases}$$

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} -(8r + 2\varphi + 2)/r, & (r, \varphi) \in G_1, \\ -(12r + 3\varphi + 3)/r, & (r, \varphi) \in G_2. \end{cases}$$

Змішані крайові умови мають вигляд

$$u = 1 + \varphi, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_1, \quad \bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\bar{\alpha}_1 u + \bar{\beta}_1, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_2,$$

$$u = r^2, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_3^1, \quad u = 2r^2, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_3^2,$$

$$\bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\bar{\alpha}_2 u + \bar{\beta}_2, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_4^1, \quad u = 2r^2 + 2\pi r, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_4^2,$$

де $\bar{\alpha}_1 = 1$; $\bar{\beta}_1 = 37,5 + 9\varphi$; $\bar{\alpha}_2 = 70$; $\bar{\beta}_2 = 70r^2 + 2r + 70\pi r + 0,75 + \pi$.

Параметри умов спряження (2), (3) наступні: $R_1 = 0,5$; $R_2 = 1$;
 $\omega = 4,5 + \varphi$; $\delta = 14 + 2\varphi$.

За цих даних класичний розв'язок модельного прикладу має вигляд:

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} r^2 + r\varphi, & (r, \varphi) \in G_1, \\ 2r^2 + 2r\varphi, & (r, \varphi) \in G_2. \end{cases}$$

При використанні кусково-квадратичних функцій область \bar{G} з розрізом γ_0 розбивалась на 216 трикутних елементів з $n=518$ вузлами розбиття, $m=18$. Межі відносної похибки: $8,93 \cdot 10^{-7} < \Delta < 5,34 \cdot 10^{-2}$ - для $v_2^N \in H_2^N$. В табл. 2 наведено деякі результати розрахунку.

Результати розрахунку крайової задачі 2

Номер вузла	r -координата вузла	φ -координата вузла	Точний розв'язок	Наближений розв'язок	Відносна похибка
16	1,0278	$\pi/6$	1,5944704	1,5944615	$5,58 \cdot 10^{-4}$
204	1,8333	π	9,1206981	9,1158276	$5,34 \cdot 10^{-2}$
247	2	$5\pi/6$	9,2359877	9,2358348	$1,66 \cdot 10^{-3}$
247	2	$5\pi/6$	18,471975	18,471803	$9,29 \cdot 10^{-4}$
268	2	$\pi/6$	5,0471976	5,0470426	$3,07 \cdot 10^{-3}$
272	2	$\pi/6$	10,094395	10,094179	$2,13 \cdot 10^{-3}$
309	2,1111	0	8,9135807	8,9135808	$8,93 \cdot 10^{-7}$
497	2,9444	$2\pi/3$	29,673166	29,671133	$6,85 \cdot 10^{-3}$

Висновки. Для розв'язування задач, що описуються еліптичним рівнянням в полярній системі координат з умовами спряження неідеального контакту, зручно використовувати високоточні обчислювальні алгоритми, побудовані на основі МСЕ. З використанням розробленого на основі цих алгоритмів програмного забезпечення розв'язано модельні приклади. Теоретичні результати підтверджені експериментальними даними.

Література.

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 2001. – 606 с. – ISBN 966-00-0701-9
2. Баран І.О. Високоточні обчислювальні алгоритми та система автоматизованого розрахунку дифузійних процесів в багатокомпонентних середовищах: Дис... канд. техн. наук: 01.05.02. Тернопіль, ТДТУ, 2003.

Ihor Baran

MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELD IN TWO-LAYER CYLINDRICAL BODY WITH A THIN INCLUSION

The problems for the elliptical equation in polar coordinates with conjugate conditions are considered. Computing algorithms of the increased accuracy order of sampling for the problems under considerations basing on the finite elements method are constructed. The solutions of the model examples are presented.

Keywords: *nonideal contact, thin inclusion, conjugate conditions, FEM*