Окрепкий Б. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті з урахуванням анізотропії матеріалів / Б. Окрепкий, Ф.Мигович // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 4. — С. 188-192. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 536.2

Б. Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук; Ф.Мигович, канд.фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет

ОСЕСИМЕТРИЧНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ТІЛ ЦИЛІНДР-ПІВПРОСТІР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ З УРАХУВАННЯМ АНІЗОТРОПІЇ МАТЕРІАЛІВ

Резюме. *Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті між циліндром та півпростором у випадку анізотропії матеріалів. Отримано формули для визначення температурних полів при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях циліндра і півпростору. Досліджено вплив контактної провідності й коефіцієнтів анізотропії на розподіл температурних полів і градієнтів у зоні контакту двох тіл.*

Ключові слова: *осесиметричні задачі, анізотропія матеріалів, циліндр-півпростір, неідеальний тепловий контакт.*

B.Okrepkiy, F. Migovich

AXES –SYMMETRIC TEMPERATURE TASK FOR THE BODY SYSTEM CYLINDER –SEMISPASE UNDER NON-IDEAL HEAT CONTACT IN THE OCCASION ANISOTROPY MATERIALS

The summary. *The solution of the axes-symmetric temperature task for the body system cylinder – semispase under non-ideal heat contact between cylinder and semispace in the occasion anisotropy materials. Formula for determination temperature conditions on the border surface of the cylinder and semispace have been obtained. Invastigation was made on the influence of the contact conductivity and coefficients of anisotropy on distributing of the temperature fields and gradients in the area of contact of two bodies.*

Key words: *axes- symmetric temperature, anisotropy materials, cylinder-semispase, non-ideal contact.*

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень із урахуванням температурних полів і анізотропії матеріалів є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їх взаємодії при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції й несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У багатьох працях досліджено вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл [1-5]. У роботі [5] розв'язано осесиметричну температурну задачу для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті у випадку ізотропних тіл. Проте недостатньо вивченим є вплив умов неідеального теплового контакту анізотропних тіл на величину і характер розподілу температури в двох контактуючих тілах.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр-півпростір для трансверсально-ізотропних тіл із урахуванням неідеального теплового контакту і знайти формули для визначення температури в циліндрі й півпросторі, а також дослідити вплив контактної провідності на розподіл температурних полів і градієнтів у зоні контакту.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндр радіусом R і довжиною L перебуває в неідеальному тепловому контакті з півпростором. Матеріали тіл є трансверсально-ізотропними. На вільному торці циліндра задано постійну температуру T_0.

Розглянемо три випадки температурних умов на бічній поверхні циліндра та границі півпростору:

1. Бічна поверхня циліндра теплоізольована, а границя півпростору підтримується за нульової температури.
2. Бічні поверхні циліндра і півпростору теплоізольовані.
3. Бічні поверхні циліндра і півпростору підтримуються за нульової температури.

Введемо циліндричну систему координат $r, \theta, z,$ центр якої лежить на поверхні півпростору, а вісь $0z$ спрямована вздовж осі циліндра. Усі величини, які позначено індексом «1», відносяться до півпростору, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури у першому випадку мають вигляд

$$\lambda_Z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_Z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z}, \quad \lambda_Z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T^1) \quad (0 \le r \le R, z = 0), \tag{1}$$

$$T^1 = 0 \qquad (R \le r < \infty, z = 0), \tag{2}$$

$$T = T_0 \qquad (0 \le r \le R, z = L), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad (r = R, 0 \le z \le L). \tag{4}$$

В другому випадку умови (1), (3) і (4) залишаються без зміни, а замість (2), маємо

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} = 0 \quad (R \le r < \infty, \quad z = 0). \tag{5}$$

У третьому випадку умови (1)-(3) залишаються без зміни, а замість (4) отримаємо

$$T = 0 \quad (r = R; 0 \le z \le L), \tag{6}$$

де λ_Z, λ_Z^1 – коефіцієнти теплопровідності в напрямку осі $0z$; h_0 – контактна провідність.

Розв'язування крайових задач для рівняння теплопровідності. Відомо $[6,7]$, що в осесиметричному випадку температурне поле T трансверсально ізотропного тіла визначають із рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{7}$$

За допомогою методу Фур'є загальний розв'язок рівняння (7) для циліндра зобразимо так:

$$\begin{aligned} T(r,z) = {} & A_0 + B_0 z + D_0(\lambda^2 r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k \rho)\left[A_k sh\left(\frac{\beta_k z}{\lambda}\right) + B_k ch\left(\frac{\beta_k z}{\lambda}\right)\right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\lambda \gamma_k r)(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z), \end{aligned} \tag{8}$$

де A_k, B_k, C_k, D_k – довільні постійні; $J_0(\beta_k r)$ – функції Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0(\lambda\gamma_k r)$ – функції І-го роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні числа, які визначаємо з граничних умов; λ^2 – відношення коефіцієнтів теплопровідності в напрямку осі $0z$ і перпендикулярному до нього.

Для знаходження температури в півпросторі вводимо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r,z)$ нульового порядку

$$\overline{T^1}(\xi,z)=\int_0^\infty rT^1(r,z)J_0(\xi r)dr\,, \tag{9}$$

за допомогою якої з рівняння (7) знаходимо вираз для $T^1(\rho,\zeta)$ через довільну функцію $\varphi_1(\eta)$:

$$T^1(\rho,\zeta)=\int_0^\infty \varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta/\lambda^1}J_0(\eta\rho)d\eta\,, \tag{10}$$

де

$$\rho=r/R,\quad \zeta=z/R\,.$$

Розглянемо перший випадок температурних умов (1)-(4). Вони будуть задовольнятись, якщо покласти $D_0=0,\quad D_k=0,\quad C_k=0\quad (k=1,2,...)$. Із умови (4) отримуємо , що $\beta_k=\dfrac{\mu_k}{R}$, де μ_k – корені рівняння $J_1(\mu_k)=0$.

Гранична умова (3), з урахуванням ортогональності функції Бесселя, призводить до деяких співвідношень між постійними A_n і B_n, у результаті чого температура в циліндрі виражається через одну нескінченну систему постійних $C_k^{(1)}$ за формулою

$$T=T_0\left\{1+C_0^{(1)}\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z\lambda}(\xi-l)-\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\frac{\lambda}{\lambda_1}\sum_{k=1}^\infty C_k^{(1)}\frac{sh\left[\mu_k(l-\zeta)/\lambda\right]}{ch(\mu_k l/\lambda)}J_0(\mu_k\rho)\right\},\quad l=\frac{L}{R}\quad . \tag{11}$$

Задовольнивши першу умову (1) й умову (2), отримаємо парні інтегральні рівняння відносно функції $\varphi_1(\eta)$:

$$\int_0^\infty \eta\varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=T_0\left\{C_0^{(1)}+\sum_{л=1}^\infty \mu_л J_0(\mu_k\rho)C_k^{(1)}\right\}(\rho<1)\,, \tag{12}$$

$$\sum_0^\infty \varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0\quad (\rho>1)\,, \tag{13}$$

розв’язок яких має вигляд

$$\varphi_1(\eta)=\frac{2}{\pi}T_0\left[C_0^1\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}-\cos\eta\right)+\sum_{k=1}^\infty \mu C_k^{(1)}\int_0^1\sin\eta y\sin\mu_k y dy\right]. \tag{14}$$

Другу умову (1), з урахуванням (10) і (11), запишемо так:

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=T_0\left\{1-\left(\frac{\lambda_z^1 l}{\lambda_z\lambda}+\frac{\lambda_z^1}{\lambda h_0 R}\right)C_0^{(1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\frac{\lambda}{\lambda^1}th\mu_k l+\frac{\lambda_z^1}{h_0R\cdot\lambda^1}\mu_k\right)C_k^{(1)}J_0(\mu_{k\rho})\right\}(\rho<1)\,. \tag{15}$$

Підставивши (14) в рівняння (15), отримаємо:

$$\frac{2}{\pi}T_0C_0^{(1)}\int_0^\infty\frac{J_0(\eta\rho)}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}-\cos\eta\right)dy+\frac{2}{\pi}T_0\sum_{k=1}^\infty\mu_kC_k^{(1)}\int_0^\infty J_0(\eta\rho)d\eta\int_0^1\sin\eta y\cdot\sin\mu_k y dy=$$

$$T_0\left\{1-\left(\frac{\lambda_z^1 l}{\lambda_z\lambda}+\frac{\lambda_z^1}{\lambda h_0R}\right)C_0^{(1)}-\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{\lambda_z^1\lambda}{\lambda_z\lambda^1}th\mu_k l+\frac{\lambda_z^1}{h_0R\lambda^1}\mu_k\right)C_k^{(1)}J_0(\mu_k\rho)\right\}\quad(\rho<1)\,. \tag{16}$$

Помноживши обидві частини рівності (16) на ρ та $\rho\cdot J_0(\mu_k\rho)$ і проінтегрувавши в межах від 0 до 1, з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_k^{(1)}$:

$$\alpha_k^{(1)} C_k^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k,n}^{(1)} C_n^{(1)} = \gamma_k^{(1)} (k = 0,1,...), \tag{17}$$

де

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\frac{l}{\lambda} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda h_0 R}\right) + \frac{2}{3\pi},$$

$$\alpha_{0,n}^{(1)} = \frac{2}{\pi\mu_n}\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - \cos\mu_n\right), \quad \gamma_0^{(1)} = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{2}{\pi\mu_k^2}\left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k\right),$$

$$\alpha_{k,n} = \frac{2}{\pi}\mu_n \frac{\mu_n \sin\mu_k \cos\mu_n - \mu_k \sin\mu_n \cos\mu_k}{\mu_k^2 - \mu_n^2}, \quad k \neq n,$$

$$\alpha_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_{k,n}, & k \neq n, \\ \alpha_{k,n} + \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\frac{\lambda}{\lambda_1} th\mu_n l + \frac{\lambda_z^1}{h_0 R\lambda^1}\mu_n\right)\frac{J_0^2(\mu_n)}{2}, & k = n; \end{cases}$$

$$\gamma_k^{(1)} = 0 (k = 1,2,...).$$

У другому випадку температурних умов розв’язок будуємо аналогічно. На завершення задачу зводимо до визначення деяких постійних $C_k^{(2)}$ із нескінченної системи рівнянь виду (17).

Температурне поле в циліндрі визначаємо за формулою (11) шляхом заміни постійних $C_0^{(1)}$ і $C_k^{(1)}$ відповідно на $C_0^2(\lambda_z\lambda^1/\lambda_z^1\lambda)$ і $C_k^{(2)}(\lambda_z\lambda^1/\lambda_z^1\lambda)cth(\mu_k l/\lambda)$, а в півпросторі – згідно з формулою (10) – через функцію $\varphi_2(\eta)$, де

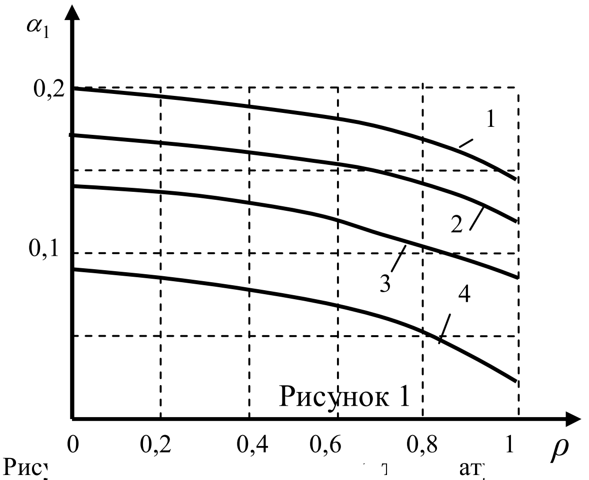
$$\varphi_2(\eta) = T_0(1 - C_0^{(2)})\frac{\sin\eta}{\eta} - \frac{2}{\pi}T_0\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} \int_0^1 \cos\eta y \cos\mu_k y dy.$$

У третьому випадку температурних умов задача значно ускладнюється. Температурне поле вдається знайти через дві нескінченні системи постійних $C_n^{(3)}$ і $C_n^{(4)}$, які визначаємо із двох взаємопов’язаних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Після знаходження постійних $C_n^{(3)}$ і $C_n^{(4)}$ температурне поле в півпросторі задаємо формулою (10) через деяку функцію $\varphi_3(\eta)$, а функцію $\varphi_3(\eta)$ визначаємо за формулою (14) при заміні $C_n^{(1)}$ на $C_n^{(3)}$. Вираз для температурного поля в циліндрі не наводимо через громіздкість.

Визначивши необхідну кількість постійних $C_n^{(2)}$, можна знайти температурні поля і градієнти, а також термопружні потенціали й напруження від них у будь-якій точці циліндра і півпростору.

Якщо у відповідних формулах покласти $\lambda^1 = \lambda = 1$, то отримаємо ізотропний випадок задачі [5].

Розглянуто числовий приклад для задачі з граничними умовами (1)-(4). Так як системи рівнянь є квазірегулярними при будь-яких співвідношеннях теплофізичних характеристик тіл, то розв’язуємо їх методом редукції з усічених систем. Розв’язавши систему із тридцятьма невідомими, на основі їх значень побудуємо графіки розподілу температури $\alpha_1 = \frac{T}{T_0}$ і градієнта $\alpha_2 = R\,{}^{\partial T}\!/_{\partial z}\,T_0$ уздовж безрозмірної координати ρ при ${}^{\lambda_z^1}\!/_{\lambda_z} = 0,5$ та різних значеннях контактної провідності $h_0^1 = {}^{h_0 R}\!/_{\lambda_z}$.



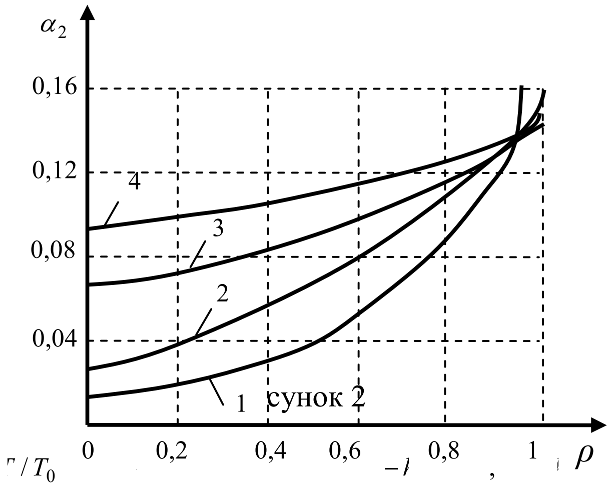


Рис...

$3-h_0^1=4$, $4-h_0^1=\infty$

Рис. 2. Графіки розподілу градієнта $\alpha_2 = R\,\partial T / \partial z\, T_0$ у зоні контакту, криві $1-h_0^1=0{,}1$, $2-h_0^1=1$, $3-h_0^1=4$, $4-h_0^1=\infty$

Висновки. Осесиметричну температурну задачу для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті з урахуванням анізотропії матеріалів можна звести до розв'язування диференціального рівняння Лапласа (7) за різних граничних умов. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, розв'язування температурних задач зведено до визначення деяких постійних із нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля і градієнти в будь-якій точці циліндра і півпростору. На числовому прикладі бачимо, що контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температурних полів і градієнтів у зоні контакту системи тіл циліндр-півпростір. Для трансверсально-ізотропного матеріалу (магнію) температура і градієнти зменшуються приблизно на 6-10% порівняно з ізотропними тілами.

Література

1. Грилицкий Д.В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости термоупругости /Д.В.Грилицкий, Я.М.Кизыма – Львов: Изд-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135с.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко – К.: Наук. Думка, 1970 – 304с.
3. Шелестовский Б.Г. Термоупругая контактная задача для трансверсально-изотропного полупространства при неидеальном тепловом контакте / Борис Шелестовский, Дмитрий Грилицкий // Изв. АН СССР, МТТ. – 1973. – № 5. – С. 47 – 53.
4. Кизыма Я.М. Осесимметричная температурная задача для систем тел цилиндр-полупространство / Ярослав Кизыма, Богдан Окрепкий // Прикладная механика. – 1975. – Т.11, вып.12. – С.37 – 44.
5. Окрепкий Б.С. Осесимметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті /Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська// Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №3. – С.23 – 27.
6. Singh A. Axisymmetrical thermal stresses in transversely isotropic bodies / Arch., mech. Stosowanej.- 1960.- vol.12.- /№3.
7. Singh A. Stress distributions within solids of revolution /Z.angew. Math. And Mech.- 1959.- Bd.39.- №12.