

УДК 519.86

А. Косолап, канд. фіз.-мат. наук

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

## БАГАТОСЕКТОРНА ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ

**Резюме.** Розглянуто багатосекторну динамічну модель ринкової економіки, що містить п'ять учасників ринку: постачальників сировини, виробників товару, споживачів, банки і державу. Сформульовано динамічну оптимізаційну модель ринку з даними учасниками. Для кожного учасника ринку визначено параметри і виписано умови їх функціонування. Розроблено комп'ютерну програму даної системи, що дозволяє досліджувати різні проблеми управління економікою.

**Ключові слова:** ринкова економіка, багатосекторна модель, учасники ринку, оптимізаційна модель.

А. Kosolap

## MULTISECTOR DYNAMIC MODEL MARKET ECONOMY

**The summary.** The multisector dynamic model of market economy including five participants of the market is considered: suppliers of raw materials, manufacturers of the goods, consumers, banks and the state. The dynamic optimizing market model with the given participants is formulated. For each participant of the market parameters are defined and conditions of their functioning are written out. The computer program of the given system is developed, allowing to investigate various problems of management of economy.

**Key words:** market economy, multisector model, participants of the market, optimizing model.

**Вступ.** На сьогодні ринкова економіка ставить перед дослідниками і практиками безліч проблем. Це – визначення оптимальної поведінки її учасників (перш за все виробників і споживачів), ролі держави і банківської системи, процеси регулювання цін і стримування інфляції, забезпечення досконалої конкуренції та приборкання ринкової стихії, визначення пропорцій між споживанням та інвестиціями й багато іншого. На ці завдання накладаються також соціальні проблеми, що робить їх змістовний аналіз практично неможливим, а помилки ухвалення рішень у цій області можуть бути катастрофічними для суспільства. Дослідження в цих напрямках продовжуються, а роль в їх розв'язанні математичних методів зростає. Частина відповідей на вказані проблеми отримана в роботах з математичної економіки [1, 2, 3]. Проте розглянуті підходи не є комплексними і не розглядають все різноманіття ринкових проблем у рамках однієї складної моделі. Це призвело до того, що дослідження в області економіки переживають кризу [4]. Вихід з неї можливий шляхом побудови загальних математичних моделей сучасної ринкової економіки та їх комп'ютерного моделювання.

Моделі Леонтьєва і фон Неймана істотно спрощують реальну дійсність, де розв'язані в основному задачі збалансованого зростання економіки для фіксованих технологій. Кількість учасників ринку в них обмежена і явно не визначені функції таких його учасників, як банки і держава. В моделях Вальраса не визначені функції корисності, які необхідно задавати для кожного споживача. Обсяг корисної інформації для учасників ринку з розроблення ефективних управлінських рішень є обмежений. Деякі сучасні дослідження для моделювання ринкової економіки використовують моделі оптимального управління або теорії ігор, але чисельна їх реалізація для реальних задач проблематична. Все це вимагає розроблення нових математичних моделей ринку, які б більшою мірою відповідали реальній дійсності. Побудовані нижче математичні моделі ринку є

білінійними. Проте при фіксованих значеннях деяких параметрів вони будуть лінійними, що дозволяє знайти оптимальні значення інших параметрів і таким чином визначити оптимальне функціонування даної складної системи.

**Постановка задачі та її математична модель.** Розглянуто динамічну модель ринкової економіки зі всіма учасниками ринку: постачальниками сировини, виробниками, споживачами, банками і державою. На відміну від класичних моделей, споживачі характеризуються не функцією корисності, а нішею ринку за кожним товаром [5].

Вхідними даними математичної моделі є: початковий капітал кожного учасника ринку, витрати виробництва, початкові ціни, ніші ринків по кожному товару, технологічні матриці, відсоткові ставки за кредитами, депозитами і цінними паперами, пропорції розподілу бюджету. Математична модель описує взаємодії всіх учасників ринку на заданому інтервалі часу і має такий вигляд. Необхідно максимізувати прибуток виробників

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (p_i y_{ij} - s_i x_{ij}) + A_1(m) - B_1(m) - G_1(m) + H_1(m) + V(m) - W(m) - Q(m) \right\}$$

при обмеженнях (доходи постачальників невід'ємні):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k s_i^0 u_{ij} \leq Q_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} p_i^0 z_{ij} + A_0(k) - B_0(k-1) - G_0(k) + H_0(k-1) - Q_0(k),$$

доходи виробників невід'ємні

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k s_i x_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_i y_{ij} + A_1(k) - B_1(k-1) + V(k) - W(k-1) - G_1(k) + H_1(k-1) - Q_1(k),$$

доходи споживачів невід'ємні

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_j y_{ik} \leq P + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i x_{ij} - A_2(k) - B_2(k-1) - G_2(k) + H_2(k-1) + u(1+\sigma)(Q_0(k) + Q_1(k)),$$

доходи банків невід'ємні

$$K + (1-\beta)(-A(k) + B(k-1) + G(k) - H(k-1)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \gamma_j s_i x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \eta_i y_{ij} - M(k) + O(k-1) \geq 0,$$

доходи бюджету невід'ємні

$$V(k) - W(k-1) - M(k) + O(k-1) \leq R + v(1+\sigma)(Q(k) - Q(k-1)),$$

скрізь  $k = 1, \dots, m$ .

Параметри моделі:

$Q_0$  – початковий капітал постачальників сировини,

$Q$  – початковий капітал виробників,

$P$  – початковий капітал споживачів,

$K$  – початковий капітал банків,

$R$  – початковий капітал бюджету,

$s_i^0$  – витрати на виробництво  $i$ -го товару постачальниками,

$p_i^0$  – ціни  $i$ -го товару постачальників,

$s_i$  – витрати на виробництво  $i$ -го товару,

$p_i$  – ціни  $i$ -го товару,

$R_i$  – ніша ринку  $i$ -го товару,

$A_0(k)$  – кредити комерційних банків за  $k$  періодів, отримані постачальниками,

$A_1(k)$  – кредити комерційних банків за  $k$  періодів, отримані виробниками,

$A_2(k)$  – кредити комерційних банків за  $k$  періодів, отримані споживачами,

$B_0(k)$  – повернені кредити разом з відсотками по них за  $k$  періодів, отримані постачальниками,

$B_1(k)$  – повернені кредити разом з відсотками по них за  $k$  періодів, отримані виробниками,

$B_2(k)$  – повернені кредити разом з відсотками по них за  $k$  періодів, отримані споживачами,

$V(k)$  – кредити центрального банку за  $k$  періодів, отримані виробниками,

$W(k)$  – повернені кредити разом з відсотками по них за  $k$  періодів, отримані виробниками,

$G_0(k)$  – депозити, перераховані в банк постачальниками за  $k$  періодів,

$G_1(k)$  – депозити, перераховані в банк виробниками за  $k$  періодів,

$G_2(k)$  – депозити, перераховані в банк постачальниками за  $k$  періодів,

$H_0(k)$  – повернені депозити постачальникам разом з відсотками за  $k$  періодів (відсотки нараховують у кінці кожного періоду),

$H_1(k)$  – повернені депозити виробникам разом з відсотками за  $k$  періодів (відсотки нараховують у кінці кожного періоду),

$H_2(k)$  – повернені депозити споживачам разом з відсотками за  $k$  періодів (відсотки нараховують у кінці кожного періоду),

$Q_0(k)$  – податки на постачальників за  $k$  періодів,

$Q_1(k)$  – податки на виробників за  $k$  періодів,

$M(k)$  – цінні папери, продані центральним банком комерційним банкам за  $k$  періодів,

$O(k)$  – повернуті цінні папери за  $k$  періодів разом із відсотками (відсотки нараховують після кожного періоду),

$\alpha$  – частина витрат виробників, які повертаються на ринок у вигляді заробітної платні,

$\beta$  – частина активів комерційних банків, які складають витрати і резерви,

$\gamma$  – частина відрахувань комерційним банкам від проходження сум за їх рахунками,

$\sigma$  – частина бюджету, що складається з неподаткових надходжень,

$u$  – витратна (соціальна) частина бюджету,

$v$  – частина бюджету, направлена на інвестиції.

Ніша за кожним видом товарів на плановому періоді не може бути переповненою

$$\sum_{j=1}^m y_{ij} \leq R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ринкова економіка функціонує впродовж перебігу  $m$  виробничих періодів. Обсяг виготовленої продукції кожного з  $n$  товарів визначається технологічною матрицею  $A$  порядку  $n \times n$  за допомогою співвідношення  $x = Az$  (або  $x = (I - A)z$ ).

Вихідними параметрами розглянутої моделі в кожному виробничому періоді є:  $u_{ij}$  – обсяги сировини  $i$ -го виду в  $j$ -му періоді,  $z_{ij}$  – поставки продукції виробникам, виробництва й реалізація кожного товару ( $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ), обсяги кредитів, депозитів, цінних паперів, надходжень і витрат бюджету.

Обсяги кредитів, депозитів, цінних паперів, розраховують за такими формулами:

$$A(k) = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^{m-j+1} K_{jr}, \quad k = 1, \dots, m,$$

де  $K_{jr}$  – кредит, виданий на початку  $j$ -го періоду на  $r$  періодів;

$$B(k) = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^{k-j+1} (1 + d_r) K_{jr}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$G(k) = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^{m-j+1} Z_{jr}, k = 1, \dots, m,$$

де  $Z_{jr}$  – вкладений депозит, виданий на початку  $j$ -го періоду на  $r$  періодів;

$$H(k) = H(k-1) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k-j+1}^{m-j+1} Z_{ij} r_j + \sum_{j=1}^k Z_{jk-j+1}, k = 1, \dots, m.$$

Формули для цінних паперів аналогічні депозитним.

Розглядатимемо три види податків: відрахування з фонду оплати праці (соціальний податок), податок на прибуток і податок на додану вартість (ПДВ). Нехай  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – відповідні ставки розглянутих вище податків, тоді не складно обчислити їх значення за  $k$  минулих періодів.

Відрахування з фонду оплати праці визначаємо за формулою

$$F(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_1 q s_i x_{ij}, k = 1, \dots, m,$$

до якої входять відрахування до Пенсійного фонду, соціального страхування, фонду зайнятості, прибуткового податку. Параметр  $q$  визначає, яку частину витрат складає фонд оплати праці підприємства.

Для обчислення ПДВ необхідно враховувати матеріальні витрати, за якими уже нарахований відповідний податок. Вони складають частину  $(1-q)$  у витратах. Тому цей податок дорівнює

$$D(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_3 (p_i y_{ij} - (1-q) s_i x_{ij}), k = 1, \dots, m.$$

Податок на прибуток обчислюємо останнім, він дорівнює

$$L(k) = \lambda_2 \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (p_i y_{ij} - s_i x_{ij}) - F(k) - D(k) \right\}, k = 1, \dots, m.$$

Очевидно, що податки є додатковими витратами для підприємств, з одного боку, і використовуються для фінансування бюджетної сфери, інвестування пріоритетних галузей, матеріального забезпечення бюджету і загальнодержавних потреб. Таким чином, податки через заробітну платню та інвестиційні банки повертаються знову на ринок. Введемо позначення:  $Q(k) = F(k) + L(k) + D(k)$ , звідки отримаємо формулу

$$Q(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [(1-\lambda_2)(\lambda_1 q - \lambda_3(1-q)) - \lambda_2] s_i x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3) p_i y_{ij}.$$

Розглянута система податків не є єдино можливою. Простішою схемою може бути введення єдиного податку зі ставкою  $\lambda$ , який розраховуватимемо за формулою

$$Q(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda p_i y_{ij}.$$

Як критерій функціонування ринкової економіки розглядали також максимізацію ВНП (внутрішнього національного продукту)

$$\max_y \sum_{i=1}^n p_i \left( \sum_{j=1}^m y_{ij} - R_i \right).$$

При фіксованих значеннях деяких параметрів (банківські відсотки по кредитах і депозитах, по цінних паперах та ін.), розглянута модель є лінійною, її ефективно вирішуємо методами лінійного програмування. Розмірність розглянутої задачі:  $5(m + 1) + 2n$  обмежень і  $2(n + N) + 5m(m + 1)$  змінних. Розроблено програмне забезпечення даної моделі, яке дозволяє за таблицею початкових даних на листі Excel будувати матрицю обмежень задачі лінійного програмування, розв'язувати цю задачу й формувати таблиці та графіки вихідних даних.

За допомогою розглянутої моделі на ПЕОМ досліджували практично всі складові ринкової економіки: вплив інвестицій, банківських відсотків, податків, конкуренції, зростання заробітної платні та інфляції, витрат держбюджету, кредитно-грошову політику ЦБ та ін.

**Висновки.** Розглянута модель відноситься до складних задач оптимізації. Її можна назвати моделлю оптимального управління при багатьох критеріях. Істотним виявляється вибір початкових умов  $Q, P, K, R$ . Існує мінімальний набір цих даних, при якому економіка буде працювати. Змінні визначальні системи (обсяг виробництва, реалізації, кредитів, депозитів, цінних паперів, зовнішніх запозичень) відносяться до змінних стану системи, а решта параметрів, що стосуються процентних ставок, – до параметрів управління. На відміну від стандартної задачі дискретного оптимального управління, параметри стану тут не визначають із різницевих рівнянь, а знаходять одночасно. Але якщо модель продовжити на наступні планові періоди при обчисленні сумарного критерію, то значення змінних стану попереднього періоду при фіксованих параметрах управління однозначно визначатимуть значення змінних стану наступного виробничого циклу. Таким чином, плановий період у даній моделі можна продовжити до безкінечності, перераховуючи кожного разу на кінець інтервалу планування значення початкових умов.

Розглянуті задачі є багатокритеріальні, оскільки містять кількох учасників ринку з протилежними інтересами. Одночасно реальна економіка розвивається за одним критерієм, оскільки пройдений шлях завжди можна оцінити одним критерієм. Іноді в складних системах критерії можуть бути узгоджені між собою в тому значенні, що стани систем при кожному з них близькі між собою. Очевидно, що система зі злагодженими критеріями буде найефективнішою. Який же критерій є найкращим? Ми вважаємо, що це ВВП, оскільки економічний розвиток полягає в найповнішому задоволенні потреб споживачів, які й складають усе суспільство. Проте істотне значення ВВП не на окремо взятому плановому періоді, а на кількох періодах при розрахунку сумарного значення ВВП.

Численні експерименти на ПЕОМ з даною моделлю показали, що вона володіє біфуркаційними властивостями, тобто містить зони стійкого і нестійкого розвитку (стійкість істотно залежить від початкових умов). Перенесення цієї властивості на реальні моделі означає, що управління економікою полягає в утриманні її в зоні стійкого розвитку.

За наслідками експериментів можна зробити висновки: для ефективного зростання економіки соціальна складова бюджету повинна бути досить великою; ринковій економіці властивий монополізм, проте резервування мінімальної кількості загальних ресурсів за кожним підприємством ліквідує монополізм; у витратах на рекламу (реклама збільшує нішу ринку відповідного товару), перш за все, зацікавлені споживачі. В даний час продовжуються експерименти з виявлення зв'язків між параметрами моделі.

### Література

1. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо; пер. с англ. А.В. Малышевского; под ред. Э.М. Бравермана. – М.: Мир, 1972. – 519 с.

2. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. Многоотраслевой анализ / М. Моришима; пер. с англ. В. А. Булавского [и др.]; под общ. ред. В. Л. Макарова. – М.: Наука, 1972. – 280 с.
3. Экланд И. Элементы математической экономики / И. Экланд; пер. с франц. В. Н. Десницкой, Е. Б. Яновской, А. Н. Ляпунова; под ред. А. А. Корбут. – М.: Мир, 1983. – 248 с.
4. Полтерович В.М. Кризис экономической теории / В.М. Полтерович. – М.: ЦЭМИ РАН, 2002. – 23 с.
5. Косолап А.І. Вступ до математичної економіки: навч. посіб. / А. І. Косолап. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2002. – 96 с.

Одержано 27.10.2009 р