Громик А. Математичне моделювання нестаціонарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских тістових заготовок / А.Громик // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 4. — С. 146-154. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 519.6

А.Громик

Подільський державний аграрно-технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В ПРОЦЕСАХ ВИПІКАННЯ ТОНКИХ ПЛОСКИХ ТІСТОВИХ ЗАГОТОВОК

Резюме. *Розглянуто математичну модель нестаціонарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских тістових заготовок. Проведено числове моделювання і аналіз нестаціонарних температурних полів для нагрівальної плити й заготовки з точки зору забезпечення більшої рівномірності нагрівання за різними напрямками з урахуванням частотних характеристик нагрівання.*

Ключові слова: *теплоперенос, інтеграл Лапласа, перетворення Фур'є, температурні поля.*

A.Gromyk

MATHEMATICAL MODELING OF NON-STATIONARY HEAT TRANSFER FOR BAKING PROCESS OF THIN FLAT PASTRY BLANKS

The summary. *Mathematical model of non-stationary heat transfer for baking processes of thin flat pastry blanks are considered. Numerical modeling and analyze of non-stationary temperature fields for hot plane and blank are conducted with taking into account condition of regular heating for different directions and heating frequencies characteristics.*

Key words: *heat transfer, Laplace's integral, Fourier transformations, temperature fields*

Процеси переносу тепла є одним із основних розділів сучасної науки і, крім атомної енергетики та космічної техніки, мають велике значення в станційній та промисловій енергетиці, радіотехніці, електроніці, зварювальному виробництві, при розрахунку конструктивних елементів машин, нагрівальних пристроїв, інженерних споруд, у технологічних процесах будівельної, легкої та інших галузей промисловості.

Дослідженню загальних питань теорії теплопровідності присвячено багато наукових праць [1-6]. У меншій мірі можна вважати закінченими й систематизованими результати досліджень термопружного стану тонких пластин [2, 3], які широко застосовуються в сучасній техніці. Але в усіх цих працях вивчається вплив на термопружний стан тонкої пластини одного з факторів (дія зосередженого чи рухомого теплового джерела, теплообмін через бічну поверхню, тепловий режим на межі й т. д.), а в роботі [3] на перший план поставлено виведення термомеханічних рівнянь і крайових умов для ізотропних та анізотропних пластин з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від температури.

Фізична постановка задачі. Розглянемо процес нестаціонарного теплопереносу при випіканні тонкої плоскої заготовки товщиною δ_1 в електричній печі, схематизація якого зображено на рис. 1.

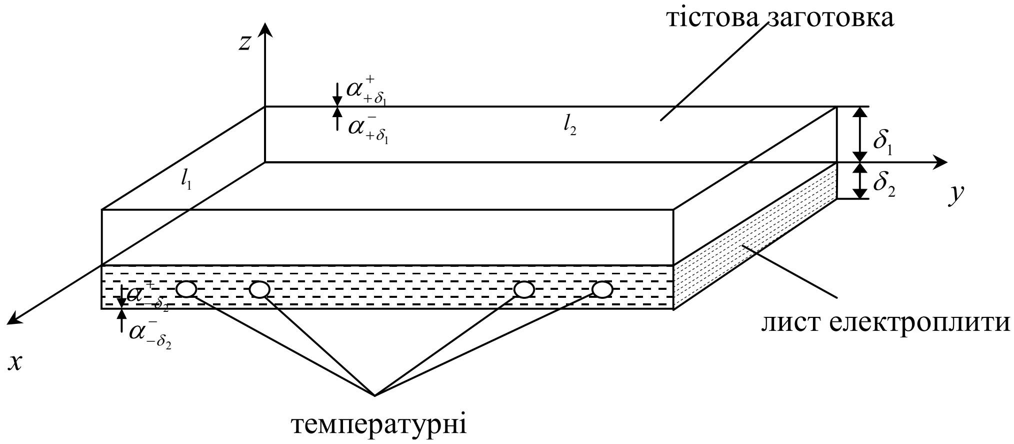

Рис. 1. Схематизація робочої області теплопереносу при випіканні тонкої плоскої тістової заготвки в електропечі

Тістова заготовка знаходиться на електричній плиті товщиною δ_2, яка рівномірно нагріває заготовку до встановленої температури T_f через систему неперервно розподілених джерел температури листа електроплити. При цьому справедливі припущення, що робоча область є добре ізольована, тобто відсутній теплообмін через бічні поверхні.

Математичний опис проблеми. Температурний баланс нестаціонарного теплопереносу при випіканні тонких тістових заготовок можна описати за допомогою мішаної (початково-крайової) задачі: побудувати в області $D_2^n = \{(t,x,y): t>0,\ 0<x<l_1,\ 0<y<l_2\}$ обмежений розв'язок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу [7]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}T_1(t,x,y) - a_1\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)T_1(t,x,y) + \dfrac{\alpha_-}{C_2} - T_2(t,x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}T_2(t,x,y) - a_2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)T_2(t,x,y) + \dfrac{3}{C_2}\left(\alpha_- + \dfrac{4}{r_z}\right)T_2(t,x,y) + \dfrac{3\alpha_-}{C_1}\cdot T_1(t,x,y) = a_2\cdot \mathrm{F}_2(t,x,y) \end{cases} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$T_1(t,x,y)\big|_{t=0} = T_{1_0}(x,y); \qquad T_2(t,x,y)\big|_{t=0} = T_{2_0}(x,y) \quad (2)$$

та крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial \xi_j}\right|_{\xi_j=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial T_i}{\partial \xi_j}\right|_{\xi_j=0} = 0; \quad i,j=\overline{1,2} \qquad \xi_j = \begin{cases} x, & j=1 \\ y, & j=2 \end{cases}, \quad (3)$$

де

$T_1(x,y)$ – температурний розподіл у плоскій тістовій заготовці;

$T_2(x,y)$ – температурний розподіл в листі плити;

$a_i = \dfrac{\lambda_i}{C_i} = \dfrac{\lambda_i\delta_i}{C_i} = \dfrac{\Lambda_i}{C_i}\ \left(i=\overline{1,2}\right)$ – коефіцієнти температурної провідності;

C_i – теплоємності шарів;

$F_{д}(t,x,y)=\theta_0+f_2(t,x,y)$ – розподіл джерела нагрівання в електроплиті;

θ_0 – стала складова значення температури джерела нагрівання;

$f_2(t,x,y)$ – коливальна складова джерел.

Запишемо вихідну систему диференціальних рівнянь (1) - (2) у вигляді

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot T_1(t,x,y)-\alpha_{-}\cdot\dfrac{1}{\Lambda_1}\cdot\dfrac{C_1}{C_2}\cdot T_2(t,x,y)=\dfrac{C_1}{\Lambda_1}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}T_1(t,x,y),\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot T_2(t,x,y)-\dfrac{12}{\delta_2^2}\cdot T_2(t,x,y)-3\alpha_{-}\dfrac{1}{\Lambda_2}\cdot\dfrac{C_2}{C_1}T_1(t,x,y)=\dfrac{C_2}{\Lambda_2}\cdot\dfrac{\partial T_2}{\partial t}-F_{д}(t,x,y).\end{cases}\tag{4}$$

Ввівши позначення

$$\Gamma_1=\alpha_{-}\frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{C_1}{C_2};\;\;\Gamma_2=\frac{12}{\delta_2};\;\;\Gamma_3=3\alpha_{-}\cdot\frac{1}{\Lambda_2}\cdot\frac{C_2}{C_1};\;b_1=\frac{C_1}{\Lambda_2};\;b_2=\frac{C_2}{\Lambda_2},$$

систему (4) запишемо у вигляді

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot T_1(t,x,y)-b_1\dfrac{\partial}{\partial t}T_1(t,x,y)-\Gamma_1\cdot T_2(t,x,y)=0,\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot T_2(t,x,y)-b_2\dfrac{\partial}{\partial t}T_2(t,x,y)-\Gamma_2\cdot T_2(t,x,y)-\Gamma_3\cdot T_1(t,x,y)=-F_{д}(t,x,y).\end{cases}\tag{5}$$

Застосувавши до задачі (5), (2), (3) за змінними *x* та *y* скінченні інтегральні косинус-перетворення Фур'є [2]

$$F_c\left[T_i(x_j)\right]=\int_0^{l_i}T_i(x_j)\cos\frac{n\pi}{l_j}x_j dx_j=T_{i_n},\;F_c^{-1}\left[T_i(x_j)\right]=\frac{1}{l_i}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{j_n}T_{i_n}\cos\frac{n\pi}{l_j}x_j\equiv T_i(x_j)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}T_i(x_j)\right]=-\beta_{j_n}^2\cdot T_{i_n},\;\beta_{j_n}=\frac{n\pi}{l_j},V_{j_n}(x)=\cos\beta_{j_n}x,\left\|V_{j_n}\right\|^2=\frac{l_i}{2},\varepsilon_{j_n}=\begin{cases}1,\;n=0\\2,\;n=\overline{1,\infty}\end{cases};i,j=\overline{1,2},$$

отримаємо задачу Коші

$$\left(\beta_{1_n}^2+\beta_{2_m}^2\right)\cdot T_{1_{n,m}}+b_1\frac{dT_{1_{n,m}}}{dt}+\Gamma_1\cdot T_{2_{n,m}}=0,\tag{6}$$

$$\Gamma_3\cdot T_{1_{n,m}}+\left[\Gamma_2+\left(\beta_{1_n}^2+\beta_{2_m}^2\right)\right]\cdot T_{2_{n,m}}+b_2\frac{dT_{1_{n,m}}}{dt}=F_{д_{n,m}},\tag{7}$$

$$T_{1_{n,m}}\Big|_{t=0}=T_{1_{0_{n,m}}};\qquad\qquad T_{2_{n,m}}\Big|_{t=0}=T_{2_{0_{n,m}}}.\tag{8}$$

Застосувавши до задачі Коші (6)-(8) інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною *t*, отримаємо алгебраїчну систему рівнянь

$$\begin{cases}\left[p+a_{1_{n,m}}\right]T_{1_{n,m}}^*+\qquad\tilde{\Gamma}_1\cdot T_{2_{n,m}}^*=T_{1_{0_{n,m}}}\\ \qquad\tilde{\Gamma}_3\cdot T_{1_{n,m}}^*+\left[p+a_{2_{n,m}}\right]\cdot T_{2_{n,m}}^*=T_{2_{0_{n,m}}}+\dfrac{1}{b_2}F_{2_{n,m}}^*\end{cases},\tag{9}$$

де

$$a_{1_{n,m}}=\frac{1}{b_1}\left(\beta_{1_n}^2+\beta_{2_m}^2\right),\;a_{2_{n,m}}=\frac{1}{b_2}\left(\Gamma_2+\beta_{1_n}^2+\beta_{2_m}^2\right),\;\tilde{\Gamma}_1=\frac{\Gamma_1}{b_1},\;\;\tilde{\Gamma}_3=\frac{\Gamma_3}{b_2}.$$

У припущенні, що визначник системи (9)

$$\Delta^*(p)=p^2+\left(a_{1_{n,m}}+a_{2_{n,m}}\right)p+a_{1_{n,m}}a_{2_{n,m}}-\tilde{\Gamma}_1\cdot\tilde{\Gamma}_3\neq 0,\tag{10}$$

знаходимо її єдиний розв'язок [8]

$$T_1^*(p)=\frac{\begin{vmatrix} T_{1_{0_{n,m}}} & \tilde{\Gamma}_1 \\ \frac{1}{b_2}F^*_{2_{n,m}}+T_{2_{0_{n,m}}} & p+a_{2_{n,m}} \end{vmatrix}}{\Delta^*(p)}=\frac{p+a_{2_{n,m}}}{\Delta^*(p)}T_{1_{0_{n,m}}}-\frac{\tilde{\Gamma}_1}{\Delta^*(p)}T_{1_{0_{n,m}}}-\frac{\tilde{\Gamma}_1}{\Delta^*(p)}\frac{1}{b_2}F^*_{2_{n,m}} \qquad (11)$$

$$T_2^*(p)=\frac{\begin{vmatrix} p+a_{1_{n,m}} & T_{1_{0_{n,m}}} \\ \tilde{\Gamma}_3 & \frac{1}{b_2}F^*_{2_{n,m}}+T_{2_{0_{n,m}}} \end{vmatrix}}{\Delta^*(p)}=-\frac{\tilde{\Gamma}_3}{\Delta^*(p)}T_{1_{0_{n,m}}}+\frac{p+a_{1_{n,m}}}{\Delta^*(p)}T_{2_{0_{n,m}}}+\frac{p+a_{1_{n,m}}}{\Delta^*(p)}\frac{1}{b_2}F^*_{2_{n,m}}. \qquad (12)$$

або

$$T_1^*(p)=K_{11}^*(p)\cdot T_{1_{0_{n,m}}}+K_{12}^*(p)\cdot\left[T_{2_{0_{n,m}}}+\frac{1}{b_2}F^*_{2_{n,m}}(p)\right]; \qquad (13)$$

$$T_2^*(p)=K_{21}^*(p)\cdot T_{1_{0_{n,m}}}+K_{22}^*(p)\cdot\left[T_{2_{0_{n,m}}}+\frac{1}{b_2}F^*_{2_{n,m}}(p)\right]. \qquad (14)$$

Тут елементи фундаментальної матриці Коші $K^*(p)=\left[K_{ij}^*(p)\right]_{i,j=1,2}$ мають вигляд

$$K_{11}^*(p)=-\frac{p+a_{2_{n,m}}}{\Delta^*(p)};\ K_{12}^*(p)=-\frac{\tilde{\Gamma}_1}{\Delta^*(p)};\ K_{21}^*(p)=-\frac{\tilde{\Gamma}_3}{\Delta^*(p)};\ K_{22}^*(p)=\frac{p+a_{1_{n,m}}}{\Delta^*(p)}. \qquad (15)$$

Здійснивши перехід до оригіналів, отримаємо

$$K_{i,i}(t)=L^{-1}\left[\frac{p-a_{s_{n,m}}}{(p-p_1)(p-p_2)}\right]=\frac{p_1-a_{s_{n,m}}}{p_1-p_2}L^{-1}\left[\frac{1}{p-p_1}\right]-\frac{p_2-a_{s_{n,m}}}{p_1-p_2}L^{-1}\left[\frac{1}{p-p_1}\right]=$$
$$=\frac{p_1-a_{s_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_1t}-\frac{p_2-a_{s_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_2t}=\frac{1}{(p_1-p_2)}\left(\left(p_1-a_{s_{n,m}}\right)e^{p_1t}-\left(p_2-a_{s_{n,m}}\right)e^{p_2t}\right);\ i=1,2;s=\begin{cases}1, & i=2,\\ 2, & i=1.\end{cases} \qquad (16)$$

Оскільки

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\Delta^*(p)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right]=-\frac{1}{(p_1-p_2)}\left(e^{p_1t}-e^{p_2t}\right),$$

то

$$K_{1,2}(t)=-\frac{\tilde{\Gamma}_1}{p_1-p_2}\left[e^{p_1\cdot t}-e^{p_2\cdot t}\right];\qquad K_{2,1}(t)=-\frac{\tilde{\Gamma}_3}{p_1-p_2}\left[e^{p_1\cdot t}-e^{p_2\cdot t}\right]; \qquad (17)$$

де

$$p_{1,2}=-\frac{a_{1_{n,m}}+a_{2_{n,m}}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{1_{n,m}}+a_{2_{n,m}}\right)^2-4\left(a_{1_{n,m}}a_{2_{n,m}}-\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_3\right)}=-\frac{a_{1_{n,m}}+a_{2_{n,m}}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{1_{n,m}}-a_{2_{n,m}}\right)^2+4\cdot\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_3}\ -$$

корені рівняння

$$p^2+\left(a_{1_{n,m}}+a_{2_{n,m}}\right)p+\left(a_{1_{n,m}}a_{2_{n,m}}-\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_3\right)=0. \qquad (18)$$

Отже, розв'язок задачі Коші (6)-(8) має вигляд

$$T_{1_{n,m}}(t)=\mathrm{K}_{11_{n,m}}(t)\cdot T_{1_{0_{n,m}}}+\mathrm{K}_{12_{n,m}}(t)\cdot T_{2_{0_{n,m}}}+\frac{1}{b_2}\int_0^t \mathrm{K}_{12_{n,m}}(t-\tau)\cdot \mathrm{F}_{2_{n,m}}(\tau)\,dt; \tag{19}$$

$$T_{2_{n,m}}(t)=\mathrm{K}_{21_{n,m}}(t)\cdot T_{1_{0_{n,m}}}+\mathrm{K}_{22_{n,m}}(t)\cdot T_{2_{0_{n,m}}}+\frac{1}{b_2}\int_0^t \mathrm{K}_{22_{n,m}}(t-\tau)\cdot \mathrm{F}_{2_{n,m}}(\tau)\,dt. \tag{20}$$

Перейшовши у формулах (19), (20) до оригіналу за змінними x та y з урахуванням того, що $T_{1_0}=const, T_{2_0}=const$, отримаємо єдиний обмежений розв'язок вихідної задачі

$$\begin{aligned}T_i(t,x,y)&=T_{1_0}\cdot\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\mathrm{H}_{i1}(t,x,\xi;y,\eta)\,d\xi d\eta+T_{2_0}\cdot\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\mathrm{H}_{i2}(t,x,\xi;y,\eta)\,d\xi d\eta+\\&+\frac{1}{b_2}\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\mathrm{H}_{i2}(t-\tau,x,\xi;y,\eta)\,d\xi d\eta\cdot \mathrm{F}_2(\tau,\xi,\eta)\,d\xi d\eta d\tau,\ i=\overline{1,2}.\end{aligned} \tag{21}$$

де компоненти матриці впливу $\left[\mathrm{H}_{ij}(t,x,y)\right]_{i,j=1,2}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{11}(t,x,\xi;y,\eta)&=\frac{1}{l_1l_2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_{1_n}\varepsilon_{2_m}\left(\frac{p_1-a_{2_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_1t}-\frac{p_2-a_{2_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_2t}\right)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi\xi}{l_1}\cos\frac{m\pi\eta}{l_2}\cos\frac{m\pi y}{l_2},\\ \mathrm{H}_{12}(t,x,\xi;y,\eta)&=-\frac{1}{l_1l_2}\frac{\tilde{\Gamma}_1}{p_1-p_2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_{1_n}\varepsilon_{2_m}e^{p_1t}\left(1-e^{-(p_1-p_2)t}\right)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi\xi}{l_1}\cos\frac{m\pi\eta}{l_2}\cos\frac{m\pi y}{l_2},\\ \mathrm{H}_{21}(t,x,\xi;y,\eta)&=-\frac{1}{l_1l_2}\cdot\frac{\tilde{\Gamma}_3}{p_1-p_2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_{1_n}\varepsilon_{2_m}e^{p_1t}\left(1-e^{-(p_1-p_2)t}\right)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi\xi}{l_1}\cos\frac{m\pi\eta}{l_2}\cos\frac{m\pi y}{l_2},\\ \mathrm{H}_{22}(t,x,\xi;y,\eta)&=\frac{1}{l_1l_2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_{1_n}\varepsilon_{2_m}\left(\frac{p_1-a_{1_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_1t}-\frac{p_2-a_{1_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_2t}\right)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi\xi}{l_1}\cos\frac{m\pi\eta}{l_2}\cos\frac{m\pi y}{l_2}.\end{aligned} \tag{22}$$

Виконавши необхідні перетворення, розв'язок (21) нестаціонарної задачі (1) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}T_1(t,x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_{1_n}\varepsilon_{2_m}&\left[T_{1_0}\left(\frac{p_1-a_{2_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_1t}-\frac{p_2-a_{2_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_2t}\right)-T_{2_0}\frac{\tilde{\Gamma}_1}{p_1-p_2}e^{p_1t}\left(1-e^{-(p_1-p_2)t}\right)+\right.\\&+\frac{\theta_0}{b_2}\frac{\tilde{\Gamma}_1}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{p_1}\left(1-e^{p_1t}\right)-\frac{1}{p_2}\left(1-e^{p_2t}\right)\right)\times\\&\left.\times\left(1+\frac{1}{l_1l_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{\sin\left(\beta_{i_n}+\nu_i\right)l_i}{\beta_{i_n}+\nu_i}+\frac{\sin\left(\beta_{i_n}-\nu_i\right)l_i}{\beta_{i_n}-\nu_i}\right]\right)\right]\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2};\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}T_2(t,x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_{1_n}\varepsilon_{2_m}&\left[-T_{1_0}\frac{\tilde{\Gamma}_3}{p_1-p_2}e^{p_1t}\left(1-e^{-(p_1-p_2)t}\right)+T_{2_0}\left(\frac{p_1-a_{1_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_1t}-\frac{p_2-a_{1_{n,m}}}{p_1-p_2}e^{p_2t}\right)+\right.\\&+\frac{1}{b_2(p_1-p_2)}\left(\frac{p_1-a_{2_{n,m}}}{p_1}\left(e^{p_1t}-1\right)-\frac{p_2-a_{2_{n,m}}}{p_2}\left(e^{p_2t}-1\right)\right)\times\\&\left.\times\left(\theta_0+\frac{1}{l_1l_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{\sin\left(\beta_{i_n}+\nu_i\right)l_i}{\beta_{i_n}+\nu_i}+\frac{\sin\left(\beta_{i_n}-\nu_i\right)l_i}{\beta_{i_n}-\nu_i}\right]\right)\right]\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}\end{aligned} \tag{24}$$

Числове моделювання й аналіз. Метою числового багатофакторного моделювання є отримання і подальший аналіз нестаціонарних температурних полів (своєрідних температурних листів) для нагрівальної плити і заготовки з точки зору забезпечення більшої рівномірності нагрівання за різними напрямками для різних значень безрозмірної геометричної координати *y* при різних перерізах осі *x*: 0,2; 0,5; 0,9. При цьому також враховували зміни частотних характеристик нагрівання ν_1, ν_2.Товщини заготовки і плити брали відповідно рівними – $\delta_1 = 0,01;\ \ \delta_2 = 0,02$. Значення частотних характеристик нагрівання $\nu_1 = 10;\ \nu_2 = 10$.

На рис. 2 зображено просторово розподілені температурні поля (листи) заготовки $T_1(t,x,y)$ та нагрівальної плити $T_2(t,x,y)$ уздовж координати *y*, в зрізі по осі *x* $(x = 0,2)$ протягом часу *t* (в сек.). Як бачимо з рис.2, для перерізу, який розглядаємо, значна температурна нерівномірність для температури в плиті T_2 (близько 60%) та для температури в заготовці T_1 (близько 35-40%) уздовж координати *y*. Максимальні значення (амплітуди) температур T_2 і T_1 у цьому перерізі сягають відповідно 250 ^{0}С та 120 ^{0}С.

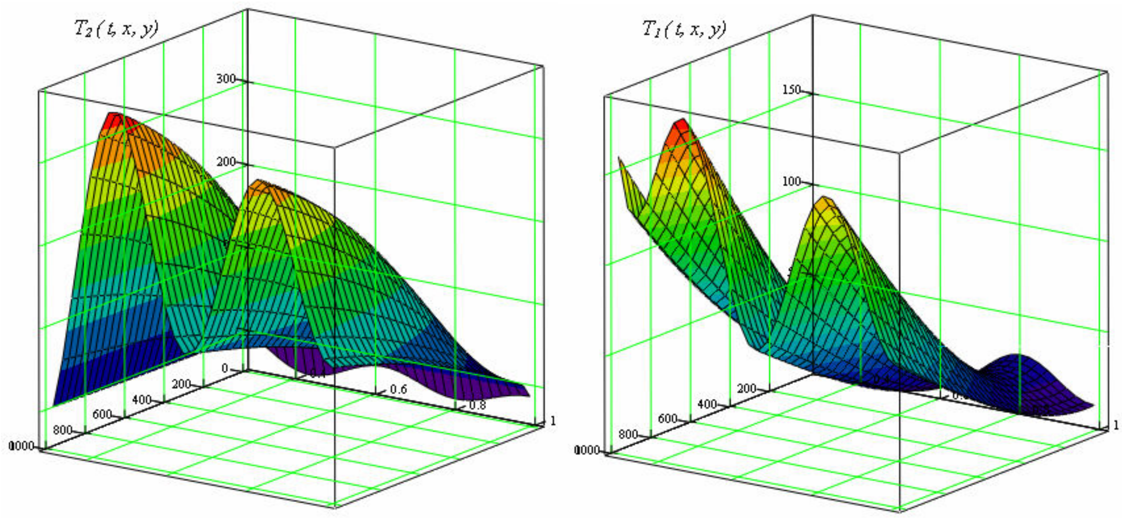

Рис. 2. Розподіл температур *T₁ (t, x, y), T₂ (t, x, y)*
уздовж координати *y*, в зрізі по осі *x* (*x=0,2*) протягом часу *t*

Для перерізів *x=0,5* (рис. 3) та *x=0,9* (рис. 4) температурна нерівномірність, яку розглядаємо, є нижчою і складає відповідно: для температури в плиті T_2 (близько 30%) та для температури в заготовці T_1 (близько 20-25%) в перерізі *x=0,5* та для T_2 (близько 20%) і для T_1 (близько 15%) в перерізі *x=0,9*.

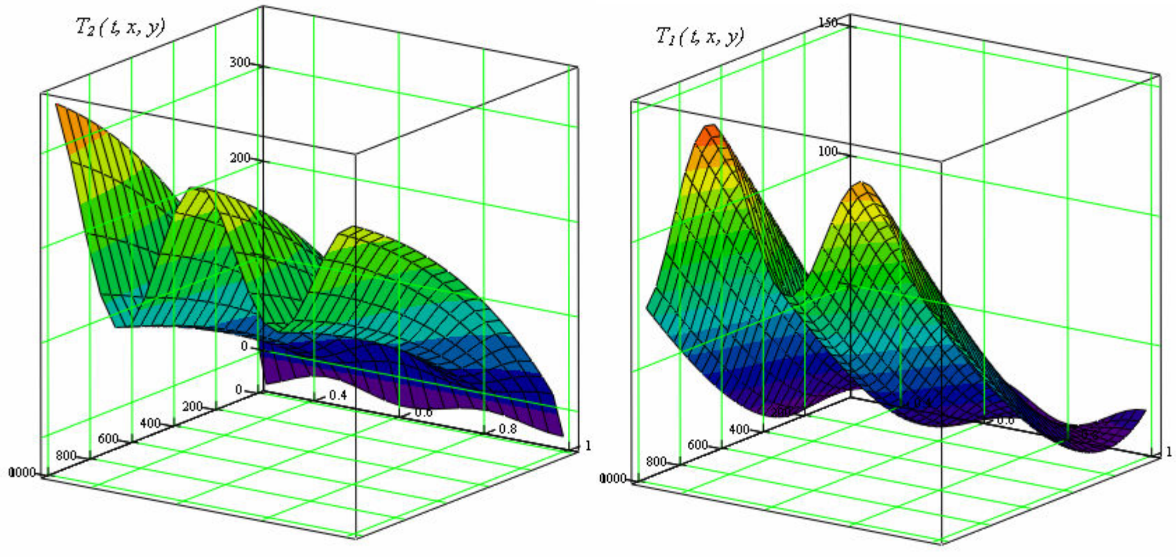

Рис. 3. Розподіл температур *T_1 (t, x, y), T_2 (t, x, y)*
уздовж координати *y*, в зрізі по осі *x* (*x=0,5*) протягом часу *t*

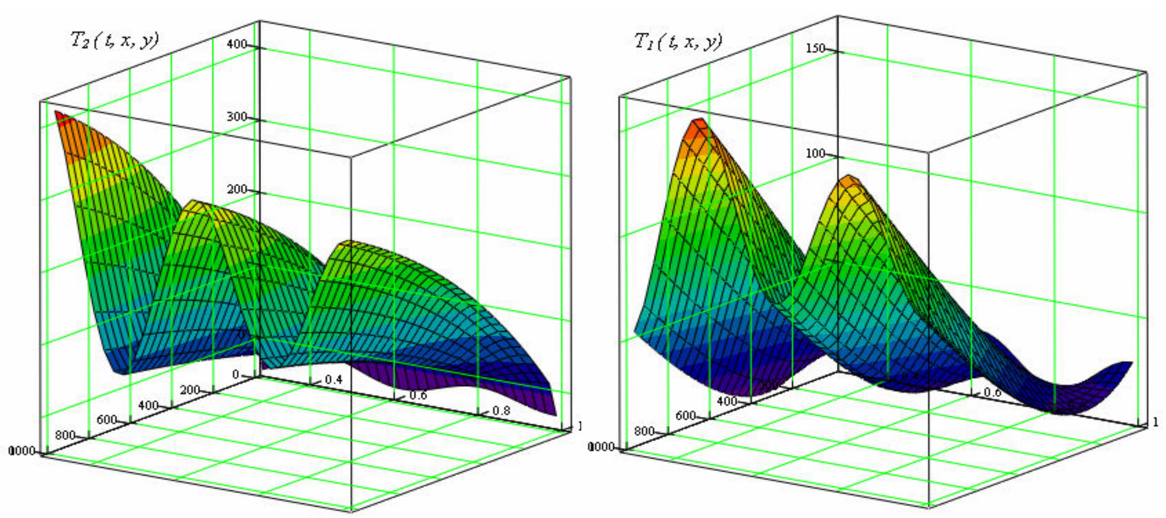

Рис. 4. Розподіл температур *T_1 (t, x, y), T_2 (t, x, y)*
уздовж координати *y*, в зрізі по осі x (x=0,9) протягом часу *t*

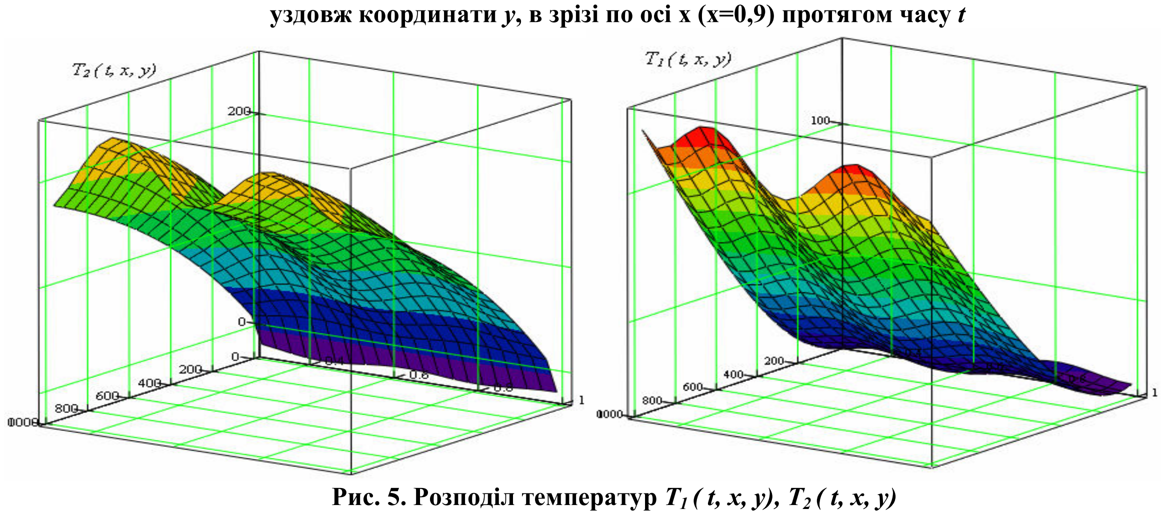

Рис. 5. Розподіл температур *T_1 (t, x, y), T_2 (t, x, y)*
уздовж координати *y*, в зрізі по осі *x* (*x=0,2*) протягом часу *t*

На рис. 5 та 6 зображено ті ж самі просторово розподілені температурні поля (листи) заготовки $T_1(t,x,y)$ та нагрівальної плити $T_2(t,x,y)$ уздовж координати y для тих же перерізів по осі x від часу t, але при іншому значенні частотної характеристики нагрівання $\nu_2 = 20$. Для усіх трьох розглянутих випадків спостерігаємо значно рівномірніші температурні листи, що забезпечує в кінцевому результаті рівномірніші режими нагрівання. Для перерізу *x=0,2* (рис.5) ступінь температурної нерівномірності складає не більше 20% – для температури в плиті T_2 та не більше 15% для температури в заготовці T_1 уздовж координати *y*.

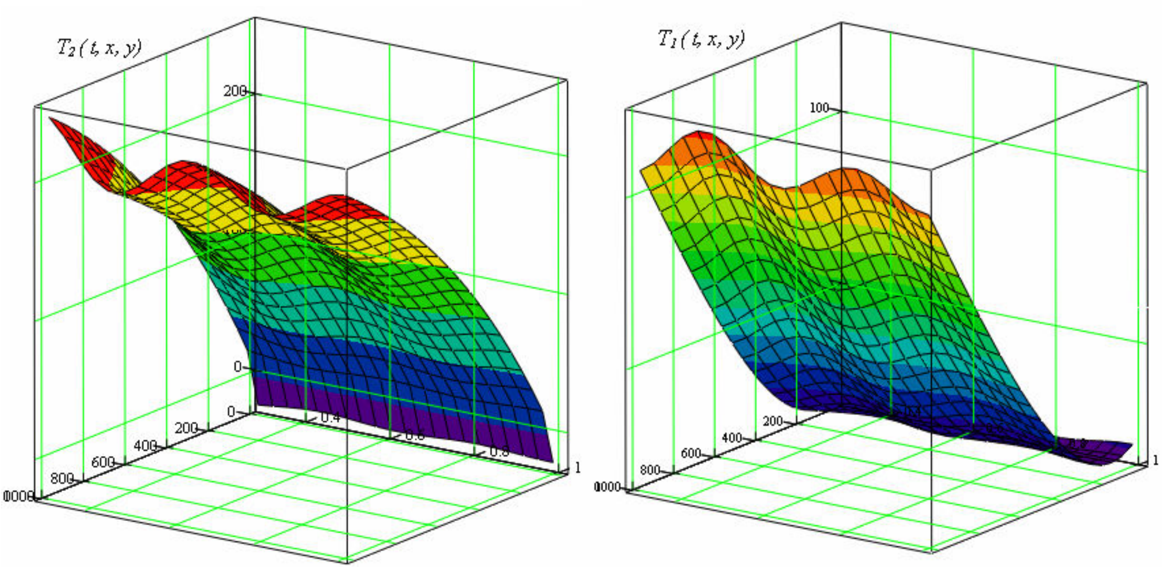

Рис.6. Розподіл температур *T₁ (t, x, y), T₂ (t, x, y)*
уздовж координати *y*, в зрізі по осі *x* (*x=0,5*) протягом часу *t*

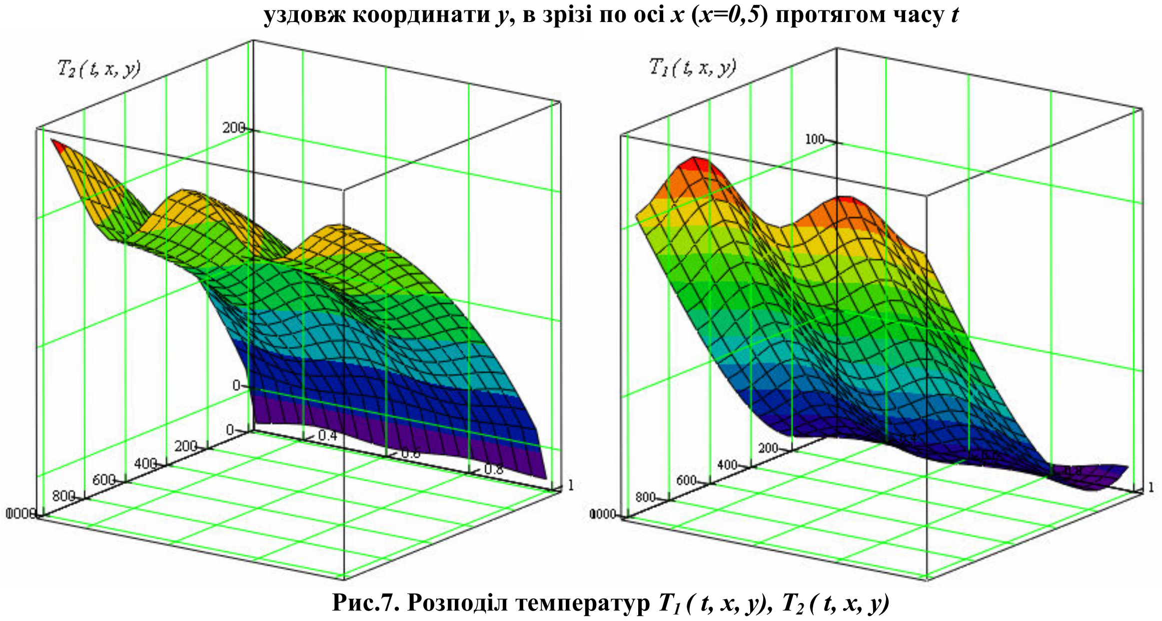

Рис.7. Розподіл температур *T₁ (t, x, y), T₂ (t, x, y)*
уздовж координати *y*, в зрізі по осі *x* (*x=0,9*) протягом часу *t*

Відповідно для перерізів *x=0,5* (рис. 6) та *x=0,9* (рис. 7) розглянуті показники температурної нерівномірності є нижчими і складають: для температури в плиті T_2 не більше 10-15% та для температури в заготовці T_1 не більше 5-10 %.

Висновок. Числовий аналіз дає змогу здійснити обґрунтування рівномірніших режимів нагрівання та теплопередавання, що в цілому суттєво вплине на енерго- та ресурсозберігаючі показники теплоенергетичних і теплонагрівальних установок.

Література

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
3. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
4. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
5. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
6. Шилин Г.Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах / Г.Ф. Шилин. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983. – 115 с.
7. Громик А.П. Нестаціонарна задача теплопровідності в ізотропній прямокутній пластинці / А.П. Громик, І.М. Конет // Задачи со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений: сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. – К., 1996. – С. 23 – 26.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.