Величко О. Розв'язок задачі локації в області з прямолінійною частиною межі/ О. Величко, А. Кривохата // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — №4 . — С. 127-131. — (приладобудування та інформаційно-вимірювальні технології).

УДК 519.6, 621.396.96

О. Величко, канд. фіз.-мат. наук; А. Кривохата

Запорізький національний університет

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛОКАЦІЇ В ОБЛАСТІ З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ЧАСТИНОЮ МЕЖІ

***Резюме.** Розглянуто пасивну багатопозиційну локацію об'єкта, який є джерелом миттєвого всенаправленого сигналу. Датчики фіксують тільки час отримання сигналу, причому швидкість його розповсюдження сигналу та час початку випромінювання невідомі. Отримано точний розв'язок цієї задачі. У випадку, коли вихідні дані визначають з деякою похибкою, пропонуємо спосіб наближеного розв'язку. Наведено результати чисельних експериментів.*

***Ключові слова:** багатопозиційна локація, фронт хвилі, мінімізація функції, система лінійних алгебраїчних рівнянь.*

O. Velichko, A. Krivohata

THE SOLUTION OF THE LOCATION PROBLEM IN THE AREA WITH THE STRAIGHT-LINE PART OF THE BORDER

***The summary.** The article deals with passive multiposition location of the source of the instant omni-directional signal. The sensors record only the time of receipt of the signal. The speed of propagation of the signal and the start time of radiation are unknown. An exact solution of this problem has been obtained. The method of the approximate solution of the posed problem in the case when the initial data are determined with an error has been proposed. The results of numerical experiments has been given.*

***Key words:** multiposition location, front of the wave, minimization of the function, system of linear algebraic equations.*

Вступ. Проблемам визначення положення об'єкта за результатами даних, що отримані багатопозиційними вимірювальними системами, присвячено чимало досліджень. Це пояснюється їх широким застосуванням у різних галузях: радіолокації, сейсмології, акустиці, гідроакустиці, фізиці елементарних частинок, астрономії та ін.

Класичними в цьому напрямку є, наприклад, монографії [1,2]. Із сучасних публікацій відзначимо огляди [3,4], де наведено класифікації завдань локації та методи їхніх вирішень.

При пасивній локації вивчають випадки, коли датчики визначають або відстань до цілі, або напрямок на джерело сигналу, або і те, й інше. У презентованій статті розглядаємо випадок, коли датчики фіксують тільки час отримання сигналу, причому швидкість хвилі вважаємо невідомою. Аналоги таких завдань у доступній літературі авторам невідомі.

Постановка задачі. Розглянемо плоску область, обмежену прямою. На цій прямій розміщені датчики. У певний момент часу в деякій точці області вмикається джерело, від якого в усі боки починає поширюватися кругова хвиля. Датчики фіксують час приходу хвилі. Потрібно знайти положення джерела випромінювання, якщо швидкість хвилі невідома. Кількість датчиків дорівнює $n \ge 4$.

Математична постановка задачі. Для розв'язання задачі введемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб задана область перебувала в півплощини $y \ge 0$, а приймачі містилися на прямій $y = 0$. Тоді i - й датчик перебуває у точці $M_i(x_i, 0)$. Вважаємо, що джерело випромінювання – у точці $M_0(x_0, y_0)$ і вмикається у момент часу t_0. На рисунку 1 наведено схематичне зображення.

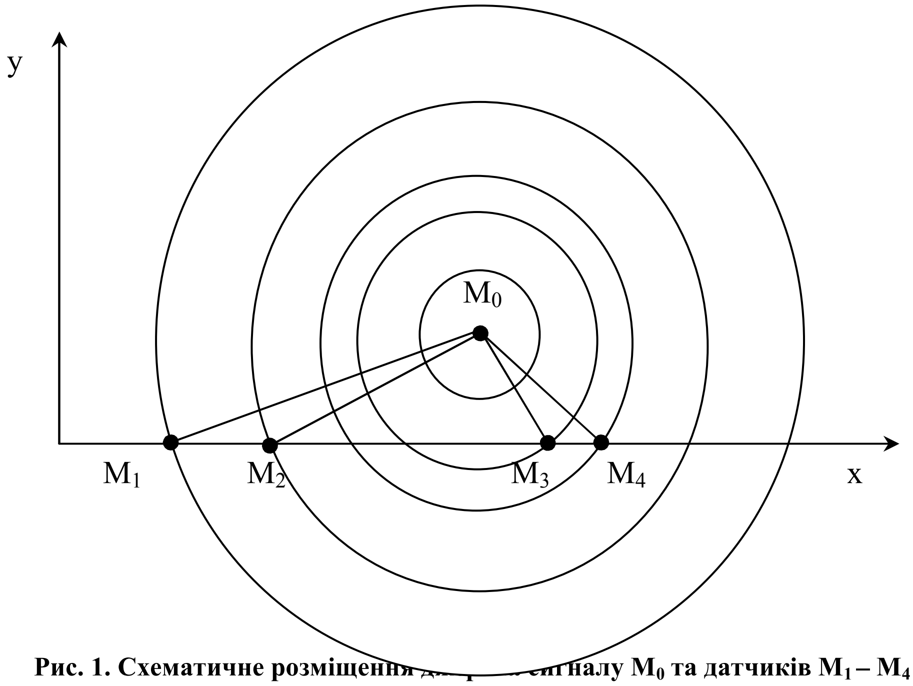

Рис. 1. Схематичне розміщення джерела сигналу M_0 та датчиків $M_1 – M_4$

Час, у який спрацьовує i -й датчик, позначимо через t_i , а швидкість руху хвилі – через v. Відзначимо, що за фізичним змістом v є додатною величиною. Потрібно із заданих значень x_i і t_i , $i = \overline{1,n}$ знайти x_0, y_0, t_0 і v.

Відстань $L_i = M_i M_0 = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + y_0^2}$ між джерелом і i -м датчиком пропорційна часу $T_i = t_i - t_0$, який проходить з моменту випромінювання до моменту спрацьовування відповідного датчика, тобто має місце формула $L_i = vT_i$. Таким чином, задача зводиться до визначення невідомих x_0, y_0, t_0, v із системи рівнянь

$$\sqrt{(x_i - x_0)^2 + y_0^2} = v(t_i - t_0), i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Оскільки невідомими є чотири величини, то кількість рівнянь (а отже, кількість датчиків) має бути не менша чотирьох. На практиці для підвищення точності локації кількість датчиків беруть із запасом, і в цьому випадку, через похибки вимірювань, отримана система (1) буде швидше за все несумісною. Тому замість системи (1) потрібно вирішувати задачу визначення мінімуму функції

$$F(x_0, y_0, t_0, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(x_i - x_0)^2 + y_0^2} - v(t_i - t_0) \right)^2 \to \min . \tag{2}$$

Оскільки ця функція нераціональна, то аналітичний розв'язок задачі дещо утруднений, тому мета статті – відшукати аналітичне вирішення задачі (2).

Метод розв'язання. Додамо до розгляду третю координату t, за якою будемо визначати час і розглянемо геометричне місце точок, яке в цьому просторі утворюють точки фронту хвилі.

У момент часу t точки фронту хвилі віддалені від джерела на відстань $v(t - t_0)$. Тобто шукана фігура задається рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = v^2 (t - t_0)^2 \tag{3}$$

і є круговим конусом. Перетин цього конуса з площиною π , яку визначаємо рівнянням $y = 0$, в якій перебувають датчики, є гіпербола

$$v^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2=y_0^2 . \tag{4}$$

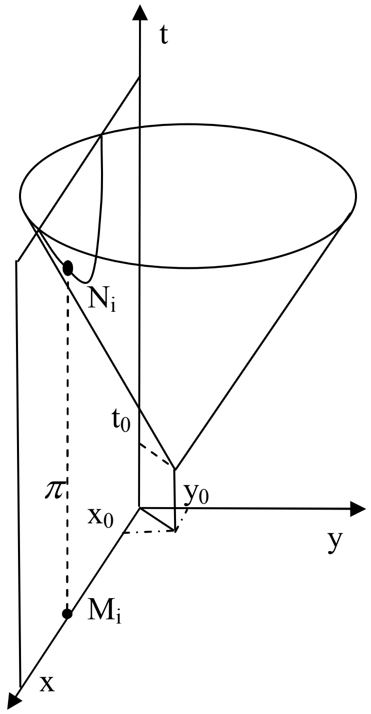

Рис. 2. Конус фронту хвилі

У площині π індукується система координат Oxt. Оскільки датчикам у момент реєстрації сигналу відповідають точки $N_i(x_i,t_i)$, то вони мають міститися на гіперболі (4). На рисунку 2 зображено конус і площину.

Як зазначалося вище, через похибки вимірювання точки будуть розташовані не на самій гіперболі, а поблизу неї. Підбір величин x_0, y_0, t_0, v здійснений таким чином, щоб гіпербола проходила якомога ближче до точок N_i, ускладнений тим фактом, що ці величини входять у рівняння (4) не лінійно.

Розкриваючи дужки в (4) і групуючи складові, перепишемо його у вигляді

$$\alpha t^2+\beta t-x^2+\gamma x+\delta=0, \tag{5}$$

де

$$\alpha=v^2, \beta=-2v^2t_0, \gamma=2x_0, \delta=v^2t_0^2-x_0^2-y_0^2 . \tag{6}$$

Для визначення параметрів $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ складаємо функцію нев'язки

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha t_i^2+\beta t_i+\gamma x_i+\delta-x_i^2\right)^2\to\min . \tag{7}$$

Знаходячи частинні похідні й прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha\sum_{i=1}^{n}t_i^4+\beta\sum_{i=1}^{n}t_i^3+\gamma\sum_{i=1}^{n}t_i^2x_i+\delta\sum_{i=1}^{n}t_i^2=\sum_{i=1}^{n}t_i^2x_i^2, \\ \alpha\sum_{i=1}^{n}t_i^3+\beta\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\gamma\sum_{i=1}^{n}t_ix_i+\delta\sum_{i=1}^{n}t_i=\sum_{i=1}^{n}t_ix_i^2, \\ \alpha\sum_{i=1}^{n}t_i^2x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}t_ix_i+\gamma\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\delta\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^3, \\ \alpha\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\beta\sum_{i=1}^{n}t_i+\gamma\sum_{i=1}^{n}x_i+\delta\cdot n=\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язавши її, знайдемо шукані величини x_0, y_0, t_0, v за формулами

$$v=\sqrt{\alpha}\,,\ t_0=-\frac{\beta}{2\alpha}\,,\ x_0=\frac{\gamma}{2}\,,\ y_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}-\gamma^2-4\delta}\,, \tag{9}$$

які є наслідком співвідношень (6). Таким чином, задачу буде вирішено. Якщо ж хоча б один із підкореневих виразів у (9) виявиться від'ємним, то це означатиме, що при визначенні одного або кількох значень x_i або t_i виникли істотні похибки.

Приклад розрахунку. Наведемо приклад розв'язання модельної задачі. Нехай у момент часу $t_0=0$ джерело, що міститься у точці з координатами $x_0=-1, y_0=5$, генерує кругову хвилю, що рухається зі швидкістю $v=2$. На прямій $y=0$ є п'ять джерел у точках з абсцисами $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=6$, $x_5=10$. Будемо вважати, що датчики визначають час приходу сигналу з точністю до 0.01. Тоді

$$t_1=t_0+\frac{1}{v}\sqrt{(x_1-x_0)^2+y_0^2}=0+\frac{1}{2}\sqrt{1+25}=\frac{1}{2}\sqrt{26}\approx 2.55\,,$$

$$t_2=t_0+\frac{1}{v}\sqrt{(x_2-x_0)^2+y_0^2}=0+\frac{1}{2}\sqrt{4+25}=\frac{1}{2}\sqrt{29}\approx 2.69\,,$$

$$t_3=t_0+\frac{1}{v}\sqrt{(x_3-x_0)^2+y_0^2}=0+\frac{1}{2}\sqrt{16+25}=\frac{1}{2}\sqrt{41}\approx 3.20\,,$$

$$t_4=t_0+\frac{1}{v}\sqrt{(x_4-x_0)^2+y_0^2}=0+\frac{1}{2}\sqrt{49+25}=\frac{1}{2}\sqrt{74}\approx 4.30\,,$$

$$t_5=t_0+\frac{1}{v}\sqrt{(x_5-x_0)^2+y_0^2}=0+\frac{1}{2}\sqrt{121+25}=\frac{1}{2}\sqrt{26}\approx 6.04\,.$$

Переходимо до розв'язування задачі. Підставивши числові дані, отримаємо систему (8) такого вигляду

$$\begin{cases} 1872.288488\,\alpha+368.670348\,\beta+513.7121\,\gamma+78.9502\,\delta=4413.1961\,, \\ 368.670348\,\alpha+78.9502\,\beta+98.49\,\gamma+1878\,\delta=790.29\,, \\ 513.7121\,\alpha+98.49\,\beta+146\,\gamma+20\,\delta=1244\,, \\ 78.9502\,\alpha+18.78\,\beta+20\,\gamma+5\delta=146\,. \end{cases}$$

Її розв'язок $\alpha=4.027113, \beta=-0.4463, \gamma=-1.917353, \delta=-25.0262$. Скориставшись співвідношеннями (9), знаходимо шукані значення швидкості $v=2.00677$, часу генерації сигналу $t_0=0.05548$ і координат джерела $x_0=-0.95868, y_0=4.91116$. Порівнявши їх із заданими величинами, побачимо, що виходить задовільний збіг.

Для збільшення точності локації потрібно або збільшувати кількість датчиків, або збільшувати їхню точність.

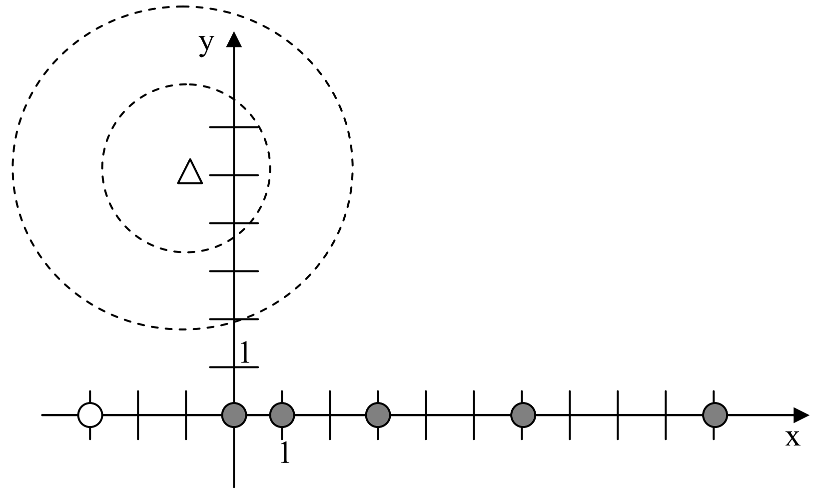

Рис. 3. Розміщення об’єкта та датчика в тестовій задачі

Якщо в розглянутій задачі точність датчиків дорівнює 0.0005, то отримаємо такі результати: $v = 1.99996$, $t_0 = 0.000091$, $x_0 = -0.999995$, $y_0 = 4.999951$.

Якщо в розглянутій задачі залишити точність 0.01, але додати ще один датчик у точці з абсцисою $x_6 = -3$ і часом приходу сигналу

$$t_6 = t_0 + \frac{1}{v}\sqrt{(x_6 - x_0)^2 + y_0^2} = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{29} \approx 2.69\,,$$

то отримаємо такий розв’язок:

$$v = 2.0024,\ t_0 = 0.0064\,,\ x_0 = -1.0017,\ y_0 = 4.9926\,.$$

Для проведення розрахунків використано програму, яку створили автори, реалізовану в пакеті Maple.

Висновки та перспективи. У статті вирішено задачу знаходження координат джерела випромінювання за даними датчиків, розміщених на одній прямій. При безпосередньому вирішенні вона зводиться до пошуку мінімуму ірраціональної функції від чотирьох змінних. Завдяки геометричним методам, які використали автори, задачу вдалося звести до розв’язування системи лінійних рівнянь. Наведено приклад розрахунку і показано вплив точності й кількості датчиків на вирішення задачі локації. Надалі цікаво розв’язати таку задачу при довільному розміщенні датчиків на площині.

Література

1. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация / Черняк В.С. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
2. Караваев В.В. Статистическая теория пассивной локации / В.В. Караваев, В.В. Сазонов. – М.: Радио и связь, 1987. – 237 с.
3. Бузуверов Г. В. Алгоритмы пассивной локации в распределенной сети датчиков по разностно-дальномерному методу / Г.В. Бузуверов, О.И. Герасимов // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – №5. – С. 12 – 24.
4. Горицкий Ю.А Разнесенные измерительные системы: локация групповых объектов / Ю.А. Горицкий // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – №2. – С. 47 – 57.

Одержано 14.10.2009р.