

Міністерство освіти і науки молоді та спорту України  
Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя

*Кафедра біотехнічних систем*

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ  
МОДЕЛЮВАННЯ МЕДТЕХНІКИ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ, ЗАВДАННЯ ДЛЯ  
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ТА ТЕСТУВАННЯ**

для студентів за напрямом підготовки  
6.050902 «Радіоелектронні апарати»,  
спеціальністю 7.05090204, 8.05090204 "Біотехнічні та медичні  
апарати і системи"

Тернопіль  
2012

Шадріна Г.М. Методичні вказівки для практичних робіт, завдання для самостійної роботи та тестування з дисципліни „Математичне та комп'ютерне моделювання медтехніки” для студентів за напрямом підготовки 6.050902 «Радіоелектронні апарати», спеціальністю 7.05090204, 8.05090204 "Біотехнічні та медичні апарати і системи"// Шадріна Г.М. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2012. – 68 с.

Укладач: доц. Шадріна Г.М

Рецензент:.

Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри біотехнічних систем Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.  
Протокол № від 2012 р.

Схвалено та рекомендовано до друку методичною радою факультету контрольно-вимірювальних та радіокомп'ютерних систем Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.  
Протокол № від 2012 р.

## ВСТУП

Математичні моделі це математичні об'єкти, які відображають характерні закономірності досліджуваних явищ (в рамках поставленої задачі), є підставою для планування експериментальних досліджень (міряння характеристик і врахування їх при розробленні алгоритмів опрацювання отримуваних даних) і передбачають інтерпретацію результатів у термінах моделей явищ і об'єктів, описаних засобами математики і придатних для інженерних розрахунків

Математичне моделювання процесів і явищ у різних галузях науки і техніки, зокрема у медтехніці, є одним із основних способів отримання нових знань і технологічних рішень. Для того, щоб використати методи математичного та комп'ютерного моделювання на практиці, майбутній бакалавр, спеціаліст або магістр повинен володіти відповідним математичним апаратом, вміти його застосувати до опису реального явища, знати певний мінімальний набір алгоритмів обчислювальної математики та володіти способами їх програмної реалізації. Такі знання й навички потрібні також і при використанні готових пакетів програм, оскільки у цьому випадку необхідне розуміння алгоритмів роботи програм для грамотної інтерпретації отриманих результатів.

Методичні вказівки призначені для поглибленого вивчення студентами розділів курсу „Математичне та комп'ютерне моделювання медтехніки” й вироблення в них уміння застосовувати отримані теоретичні знання для проведення інженерних розрахунків із використанням комп'ютерної техніки.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

### Системи лінійних алгебраїчних рівнянь як моделі явищ і систем у медтехніці

Метою заняття є набуття вмінь та навиків використання систем лінійних алгебраїчних рівнянь для моделювання явищ і систем медтехніки

### Теоретичні відомості

#### 1.1 Точні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

При розв'язанні багатьох задач, пов'язаних із побудовою радіоелектронного апарату, зокрема з розробленням та дослідженням електричних схем, часто виникає необхідність у складанні та розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для ефективного розв'язання таких задач необхідно добре орієнтуватися в існуючих методах. До таких методів відносять не ітеративні (точні) методи Гауса та Жордана-Гауса, та ітеративні (наближені) – метод простих ітерацій та метод Зейделя.

Не ітеративні методи дають точний (в межах точності ЕОМ) розв'язок за один крок алгоритму, але перетворення у цьому алгоритмі є відносно складними і при великій кількості невідомих можуть давати суттєву похибку за рахунок заокруглення при обчисленнях на ЕОМ.

Задача розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

полягає у знаходженні змінних  $x_1 \dots x_n$  при заданих коефіцієнтах  $b_1 \dots b_n$  і  $a_{11} \dots a_{nn}$ , де  $b_1 \dots b_n$  – вектор вільних членів;  $x_1 \dots x_n$  – вектор невідомих;  $\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$  – матриця коефіцієнтів системи.

##### 1.1.1 Метод Гауса

Одним з поширених методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих або метод Гауса, який складається з двох етапів:

- 1) прямий хід;
- 2) зворотний хід.

Розглянемо метод Гауса на прикладі системи трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.1)$$

Прямий хід полягає в тому, щоб з другого рівняння виключити невідому  $x_1$ , а з третього невідомі  $x_1, x_2$ . Виключимо невідоме  $x_1$  з усіх рівнянь системи (1.1), крім першого. Для цього поділимо обидві частини першого рівняння на  $a_{11} \neq 0$ .

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (1.2)$$

Позначимо  $\frac{a_{12}}{a_{11}} = a_{12}^{(1)}, \frac{a_{13}}{a_{11}} = a_{13}^{(1)}, \frac{b_1}{a_{11}} = b_1^{(1)}$ . Рівняння (1.2) набуде вигляду:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad (1.3)$$

Для того, щоб позбутися від змінної  $x_1$  у другому та третьому рівняннях системи (1.1), віднімемо рівняння (1.3), домножене на  $a_{21}$ , від другого рівняння і, домножене на  $a_{31}$ , від третього рівняння.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}, \\ (a_{21} - a_{21})x_1 + (a_{22} - a_{21}a_{12}^{(1)})x_2 + (a_{23} - a_{21}a_{13}^{(1)})x_3 = b_2 - a_{21}b_1^{(1)}, \\ (a_{31} - a_{31})x_1 + (a_{32} - a_{31}a_{12}^{(1)})x_2 + (a_{33} - a_{31}a_{13}^{(1)})x_3 = b_3 - a_{31}b_1^{(1)}. \end{cases}$$

Позначимо коефіцієнти  $a_{22} - a_{21}a_{12}^{(1)} = a_{22}^{(1)}, a_{23} - a_{21}a_{13}^{(1)} = a_{23}^{(1)}, b_2 - a_{21}b_1^{(1)} = b_2^{(1)}, a_{32} - a_{31}a_{12}^{(1)} = a_{32}^{(1)}, a_{33} - a_{31}a_{13}^{(1)} = a_{33}^{(1)}, b_3 - a_{31}b_1^{(1)} = b_3^{(1)}$ . Система (1.1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}, \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}, \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Аналогічно виключаємо з третього рівняння системи (1.4) невідому змінну  $x_2$ . Отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)}, \\ 0 + x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)}, \\ 0 + 0 + a_{33}^{(3)} x_3 = b_3^{(3)}. \end{cases} \quad (1.5)$$

На цьому прямий хід обчислень завершено.

Зворотний хід починаємо із визначення з третього рівняння системи (1.5)

значення змінної  $x_3 = \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}.$

Підставимо отримане значення  $x_3$  у друге рівняння цієї ж системи і

визначимо з нього значення змінної  $x_2 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}.$

Значення  $x_2$  та  $x_3$  підставимо у перше рівняння системи (1.5) і визначимо значення змінної  $x_1$ :

$$x_1 = b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \left( b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \right) - a_{13}^{(1)} \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}.$$

Щоб перевірити правильність результатів, необхідно обчислені значення змінних  $x_1, x_2, x_3$  підставити у систему (1.1) і отримати правильні рівності.

### 1.1.2 Метод Жордана-Гауса

Метод Жордана-Гауса це дещо модифікований метод Гауса. Він складається з двох етапів:

1. зведення розширеної матриці системи до верхньої трикутної (аналогічно до методу Гауса);
2. зведення отриманої матриці системи до нижньої трикутної.

Розглянемо цей метод на прикладі системи (1.1). Розширена матриця системи (1.1) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Після виконання першого етапу (див. метод Гауса прямий хід) вона набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

На другому етапі третій рядок матриці (1.6) ділимо на  $a_{33}^{(3)}$  і позначаємо  $\frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = b_3^{(4)}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(4)} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Тепер необхідно зробити нульовими коефіцієнти  $a_{12}^{(1)}$ ,  $a_{13}^{(1)}$ ,  $a_{23}^{(2)}$ . Для цього від другого рядка віднімемо третій, помножений на  $a_{23}^{(2)}$  і від першого рядка віднімемо третій, помножений на  $a_{13}^{(1)}$ . Матриця набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & b_1^{(1)} - b_3^{(4)} a_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(2)} - b_3^{(4)} a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(4)} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Щоб обнулити коефіцієнт  $a_{12}^{(1)}$ , віднімемо від першого рядка матриці (1.8) другий рядок цієї ж матриці, помножений на  $a_{12}^{(1)}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1^{(1)} - b_3^{(4)} a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} (b_2^{(2)} - b_3^{(4)} a_{23}^{(2)}) \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(2)} - b_3^{(4)} a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(4)} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

На цьому завершено другий етап обчислень і отримано значення невідомих:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^{(1)} - b_3^{(4)} a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} (b_2^{(2)} - b_3^{(4)} a_{23}^{(2)}), \\ x_2 &= b_2^{(2)} - b_3^{(4)} a_{23}^{(2)}, \\ x_3 &= b_3^{(4)} \end{aligned}$$

Правильність результату перевіряємо аналогічно до методу Гауса.

## 1.2 Наближені методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Ітеративні методи дозволяють знайти наближений розв'язок системи шляхом покрокового наближення від деякого наперед заданого значення (початкового наближення). Процес зупиняють, якщо отриманий розв'язок є достатньо близьким (за певним критерієм) до точного розв'язку. При використанні ітеративних методів актуальним є питання збіжності та швидкості збіжності методу.

Збіжність ітераційного процесу зв'язана з нормами матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих системи (1.1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Процес ітерації системи лінійних алгебраїчних рівнянь збігається до єдиного розв'язку, якщо виконується хоча б одне з трьох співвідношень:

$$\|a\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1,$$

або

$$\|a\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1, \quad (1.11)$$

$$\|a\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} < 1$$

Розглянемо два наближених методи: метод ітерації (послідовних наближень), метод Зейделя.

### 1.2.1 Метод ітерації

Нехай задано систему 3-х лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1). Припустивши, що діагональні елементи матриці (1.10) відмінні від нуля, виразимо  $x_1$  з першого рівняння,  $x_2$  з другого рівняння,  $x_3$  з третього рівняння:



$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3, \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3, \\ x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2. \end{cases} \quad (1.12)$$

Система (1.12) є системою, приведеною до нормального вигляду. Далі необхідно для цієї системи перевірити на збіжність ітераційний процес за одним із трьох співвідношень (1.11) і вибрати початкове наближення розв'язку системи  $x^{(0)}$  і точність  $\varepsilon$ .

За початкове (нульове) наближення розв'язку системи виберемо вільні члени:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = b_1^{(0)}, \quad x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = b_2^{(0)}, \quad x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = b_3^{(0)}.$$

Маючи нульове наближення розв'язку системи, обчислимо перше наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = b_1^{(0)} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(0)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(0)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = b_3^{(0)} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(0)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(0)}. \end{cases} \quad (1.13)$$

На основі системи (1.13) запишемо вираз для знаходження  $i$ -го наближення розв'язку системи (1.12):

$$\begin{cases} x_1^{(i)} = b_1^{(i-1)} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(i-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(i-1)}, \\ x_2^{(i)} = b_2^{(i-1)} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(i-1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(i-1)}, \\ x_3^{(i)} = b_3^{(i-1)} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(i-1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(i-1)}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Процес обчислення завершується за умови, коли  $|x^{(i)} - x^{(i-1)}| \leq \varepsilon$ .

### 1.2.2 Метод Зейделя

Цей метод є модифікація методу ітерації. У методі Зейделя при обчисленні  $i$ -го наближення розв'язку системи (1.12)  $x^i$  замість невідомих попереднього кроку ітерації підставляємо невідомі біжучого кроку як тільки їх знаходимо.

Так, для першого наближення матимемо:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = b_1^{(0)} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(0)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = b_3^{(0)} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)}. \end{cases}$$

А система (1.14) набуде вигляду

$$\begin{cases} x_1^{(i)} = b_1^{(i-1)} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(i-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(i-1)}, \\ x_2^{(i)} = b_2^{(i-1)} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(i)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(i-1)}, \\ x_3^{(i)} = b_3^{(i-1)} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(i)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(i)}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Питання збіжності та завершення процесу обчислень вирішуються аналогічно як для методу ітерації.

### Завдання

Згідно варіанту розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методами, вказаними у завданні.

### Варіанти завдань

Варіант	Метод	Система
1	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x - 2y + z = -10; \\ x + 3y - z = 7; \\ -2x + y + 4z = 9. \end{cases}$
2	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 7x + 4y - 2z = 7; \\ -2x + 6y + z = -10; \\ 3x - y + 5z = -6. \end{cases}$
3	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 4x + 2y + z = 5; \\ 2x + 4y - z = 1; \\ x - y + 3z = 8. \end{cases}$
4	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x + 2y + z = 7; \\ 2x + 4y - z = 1; \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$
5	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x + y + 2z = 9; \\ -x + 6y + 3z = 1; \\ -2x + 3y + 7z = -8. \end{cases}$
6	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 7x - 4y + z = 8; \\ 2x + 5y + z = -6; \\ y + 3z = -10. \end{cases}$
7	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 5x - y - 2z = 7; \\ -3x + 7y - 2z = -1; \\ -x + 2y + 5z = 5. \end{cases}$
8	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 7x - 3y + 2z = 9; \\ -2x + 7y - 3z = 6; \\ x + 5y + 8z = -1. \end{cases}$
9	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 3x - y = 8; \\ -x + 6y - 3z = 6; \\ -x + 2y + 5z = -6. \end{cases}$

Варіант	Метод	Система
10	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 7x - y + 4z = 9; \\ -x + 6y + 3z = 1; \\ 4x + y + 7z = 2. \end{cases}$
11	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 6x - 3y - z = -10; \\ 2x + 5y + z = -8; \\ -3y + 5z = 8. \end{cases}$
12	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x + 2y - z = 7; \\ x + 3y = -1; \\ -x + y + 4z = 1. \end{cases}$
13	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 6x + 3y - z = 5; \\ -x + 4y + z = -9; \\ -x + 2y + 5z = -1. \end{cases}$
14	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 5x - 2y - z = -10; \\ -2x + 7y - 3z = -1; \\ 3x + 3y + 8z = 7. \end{cases}$
15	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 7x - 2y - 3z = -3; \\ x + 5y - 2z = 8; \\ x + 2y + 5z = -9. \end{cases}$
16	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x - 2y - z = 10; \\ -2x + 5y - z = 3; \\ -3x + y + 6z = -1. \end{cases}$
17	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 7x - y + 3z = -2; \\ -x + 8y - 3z = 3; \\ -x - 3y + 5z = 8. \end{cases}$
18	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 6x + y + 3z = 7; \\ 3x + 8y - z = -4; \\ 3x - y + 7z = -10. \end{cases}$

Варіант	Метод	Система
19	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 5x - y - 2z = 5; \\ x + 4y - 2z = -8; \\ -2x + y + 5z = 10. \end{cases}$
20	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x - y - z = 7; \\ x + 10y - 4z = 4; \\ -4x - y + 8z = 7. \end{cases}$
21	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 10x + 5y + 2z = 9; \\ 6x + 9y - z = -5; \\ 2y + 5z = 8. \end{cases}$
22	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 8x - 3y - z = -3; \\ 7y + 4z = -10; \\ 3x - y + 10z = 9. \end{cases}$
23	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 8x - 3y - 3z = 5; \\ 2x + 7y - z = -7; \\ 2x + y + 4z = 9. \end{cases}$
24	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 7x - 4y - z = 5; \\ -3x + 6y + z = 9; \\ x + y + 4z = -7. \end{cases}$
25	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 6x - y + 3z = 10; \\ x + 7y + 4z = -9; \\ x - 5y + 8z = -1. \end{cases}$
26	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 6x + y - 3z = 8; \\ -x + 4y + z = -5; \\ -x - 3y + 6z = 7. \end{cases}$
27	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 6x + y + 3z = 10; \\ 3x + 9y + 4z = -7; \\ x + 4y + 7z = 7. \end{cases}$

Варіант	Метод	Система
28	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 5x - y + 2z = 6; \\ x + 5y - 2z = -8; \\ -x - 3y + 6z = 2. \end{cases}$
29	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 7x + 3y + 2z = 10; \\ 2x + 5y + z = -5; \\ -2x + 3y + 7z = -3. \end{cases}$
30	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 8x + y - z = 4; \\ x + 9y - 5z = -27; \\ 2x - y + 7z = 18. \end{cases}$
31	Жордана-Гауса, ітерації	$\begin{cases} 3x + z = 7; \\ x + 6y + 3z = 9; \\ x - y + 4z = -7. \end{cases}$
32	Гауса, Зейделя	$\begin{cases} 9x + 3z = 4; \\ -3x + 7y - 3z = -5; \\ 2x + y + 6z = -9. \end{cases}$

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

### Розв'язування трансцендентних рівнянь

Метою даної роботи є набуття навиків при розв'язуванні трансцендентних рівнянь різними методами (половинного ділення, хорд, простих ітерацій, Ньютона, січних).

#### Теоретичні відомості

При розробленні математичних моделей систем і апаратів радіотехніки (медтехніки) трапляються випадки, коли математичною моделлю є трансцендентна функція (до трансцендентних функцій відносяться всі не алгебраїчні функції: показникова  $a^x$ , логарифмічна  $\log_a x$ , тригонометричні і обернені до тригонометричних). При дослідженні такої математичної моделі виникає необхідність розв'язування трансцендентних рівнянь,

Коефіцієнти таких рівнянь, як правило, є наближеними числами, тому вимагати точного розв'язку є недоречно. Крім того, при розв'язуванні багатьох практичних задач, пов'язаних з побудовою або конструюванням апаратури, точний розв'язок не завжди є необхідним, тому велике значення мають методи наближеного визначення коренів рівняння виду  $f(x)=0$ .

#### 2.1 Графічні методи розв'язування трансцендентних рівнянь

Існує два способи розв'язуванні трансцендентних рівнянь графічним методом [1]:

1) Представити рівняння у вигляді  $f(x)=0$ , побудувати графік функції  $y=f(x)$  і визначити абсциси точок перетину графіка функції з віссю  $Ox$ .

2) Звести рівняння до вигляду  $\varphi(x)=g(x)$ . Побудувати графіки функцій  $y_1=\varphi(x)$ ,  $y_2=g(x)$  і визначити абсциси точок перетину графіків.

#### 2.2 Відділення коренів.

Графічний метод дозволяє отримати значення коренів із невисоким ступенем точності, тому ці значення доводиться уточнювати. Процес знаходження наближених значень коренів рівняння розбивається на 2 етапи [1]:

- відділення коренів,
- уточнення коренів до заданого ступеня точності.

Корінь  $\xi$  рівняння  $f(x)=0$  вважається відділеним на відрізьку  $[a,b]$ , якщо на цьому відрізьку він один. Відділити корені – означає розбити всю область допустимих значень на відрізьки, в кожному з яких є по одному кореню. Відділення коренів можна виконати двома способами: графічним і аналітичним.

Графічний метод відділення коренів аналогічний до графічного методу розв'язування рівнянь, коли корінь знаходимо як перетин графіків, а а межі проміжку, у який він потрапляє беремо наближено.

Аналітичний метод відділення коренів.

**Теорема 1.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a,b]$  і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, то всередині відрізку  $[a,b]$  існує хоча б один корінь рівняння  $f(x)=0$ .

**Теорема 2.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна й монотонна на відрізку  $[a,b]$  і приймає на його кінцях значення різних знаків, то всередині відрізку є корінь рівняння  $f(x)=0$  і він єдиний.

**Теорема 3.** Якщо функція неперервна на відрізку  $[a,b]$  і приймає на кінцях відрізку значення різних знаків, а похідна  $f'(x)$  зберігає постійне значення всередині відрізку, то на цьому відрізку існує корінь рівняння  $f(x)=0$  і він єдиний.

**Порядок дій при відділенні кореня аналітичним методом**

1. Знайти і дослідити першу похідну  $f'(x)$ :

а) якщо  $f'(x)>0$ , то функція зростає;

б) якщо  $f'(x)<0$  – функція спадає;

в) якщо  $f''(x)>0$  – функція опукла вниз;

г) якщо  $f''(x)=0$  – функція змінює опуклість;

д) якщо  $f''(x)<0$  функція опукла вгору.

2. Визначити максимуми і мінімуми значень функції на відрізку  $[a,b]$ :

а) визначити критичні точки функції якщо  $f'(x)=0$ ,  $f'(x)=\infty$  – критична точка (умова: сама функція зберігає неперервність);

б) обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях  $[a,b]$ .

3. Визначити інтервали, де функція приймає значення протилежних знаків, тобто відділити корені функції.

## 2.3 Уточнення коренів

Під уточненням коренів розумітимемо доведення кореня, одержаного на етапі відділення, до необхідної точності. Розглядатимемо тільки ті методи [1], які неважко реалізувати засобами обчислювальної техніки.

### 2.3.1 Метод половинного ділення

Будемо вважати, що відділений корінь міститься на відрізку  $[a,b]$ , тобто  $a \leq \xi \leq b$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Необхідно уточнити цей корінь з точністю до  $\varepsilon$ .

Виберемо на відрізку  $[a,b]$  точку  $c_1 = \frac{a+b}{2}$  (див. рис. 2.1). Якщо  $f(c_1) = 0$ , то точка  $c_1$  є коренем рівняння. Якщо  $f(c_1) \neq 0$ , то з отриманих відрізків вибираємо той, на кінцях якого функція набирає значень протилежних за знаком. У нашому випадку  $f(a) \cdot f(c_1) > 0$ ,



$f(c_1) \cdot f(b) < 0$ . Позначимо  $c_1 = a_1, b = b_1$  і розглянемо відрізок  $[a_1, b_1]$ , який знову ділимо навпіл точкою  $c_2$ . Міркуючи аналогічно до попереднього, відрізок  $[a_1, b_1]$  теж ділимо навпіл, вибираючи з одержаних той, на кінцях якого функція набирає значень протилежних за знаком.

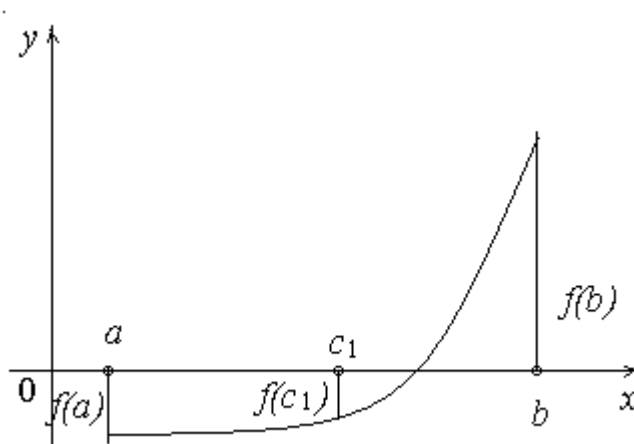


Рис. 2.1

Процес поділу відрізка навпіл проводимо до тих пір, поки не виконається одна з умов:

$f(c_i) = 0$ , тобто точка поділу відрізка є коренем рівняння, що буває досить рідко;

$b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n} \leq \varepsilon$ , тобто довжина  $n$ -го відрізка стає меншою, ніж

задана точність, тоді приймаємо, що  $\xi = c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$  є коренем рівняння.

Точність методу не перевищує  $\frac{(b-a)}{2^{n+1}}$ .

### 2.3.2 Метод хорд

Ідея методу хорд полягає в тому, що на досить малому проміжку  $[a, b]$  дугу кривої замінюємо хордою, яка її стягує. За наближене значення кореня приймаємо точку перетину цієї хорди з віссю  $Ox$ .

Щодо вибору кінців новоутворених відрізків, міркуємо так само, як і в методі половинного ділення. Відмінність полягає в тому, що точкою поділу відрізка є не середня точка, а точка перетину хорди, яка стягує криву на заданому відрізку, з віссю  $Ox$ . Координату  $x$  цієї точки шукатимемо з рівняння

хорди:  $\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$  при  $y = 0$ .

1. Задати інтервал, який містить єдиний розв'язок  $[x_0 \text{ і } x_1]$ ,  $i=0, j=0$ .

$$2. c_i = \frac{x_{j+1} - x_j}{f(x_{j+1}) - f(x_j)} \cdot f(x_j) + x_j.$$

3. Якщо  $f(c_i) = 0$ , то кінець.

4. Інакше, якщо  $f(c_i) \cdot f(x_j) > 0$ , то  $x_j = c_i$ , інакше  $x_{j+1} = c_i$ .

5. Якщо  $|x_{j+1} - x_j| > \varepsilon$ , то  $i=i+1, j=j+1$ , перехід на п.2, інакше – кінець.

(Формулу для отримання  $c$  можна отримати з подібності двох трикутників

$$c = x_0 - f(x_0) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

### Метод ітерацій

Рівняння записати у вигляді  $f(x) = 0$ . Домножимо обидві частини на  $b$ , додавши справа і зліва  $x$ , отримаємо:

$$bf(x) + x = x$$

$$x = \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = bf(x) + x$$

Нове наближення кореня на кожному кроці ітерації шукаємо за формулою:  $x_k = \varphi(x_{k-1})$

Ітераційний процес повторюємо поки  $(x_k - x_{k-1}) > \varepsilon$ .

1. Задати  $x_0, k = 0$ ;

2.  $k = k + 1$ ;

3.  $x_k = \varphi(x_{k-1})$ .

4. Якщо  $(x_k - x_{k-1}) > \varepsilon$ , перехід на п.2, інакше – кінець..

### Метод Ньютона (метод дотичних)

1. Задати  $x_0, k = 0$ .

2.  $k = k + 1$ ;

$$3. x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

4. Якщо  $(x_k - x_{k-1}) > \varepsilon$ , перехід на п.2, інакше – кінець.

На кожному кроці ітерації проводимо дотичну в точці попереднього наближення кореня. Координата точки перетину дотичної і осі  $Ox$  вважається новим наближенням кореня.

Метод Ньютона має квадратичну збіжність.

Недоліком його є локальна збіжність, метод збігається лише в деякому околі істинного кореня.

Для практичної реалізації алгоритму необхідно оцінити  $\Delta x$  на двох послідовних кроках. Якщо  $\Delta x$  зростає, то це означає, що метод розбіжний і алгоритм необхідно зупинити.

**Метод січних** є модифікацією методу Ньютона, в якому похідну функції замінено її різницеvim аналогом  $f'(x) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}$ :

1. Задати  $x_{-1}, x_0, k = 0$ .
2.  $k = k + 1$ ;
3.  $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1} - x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$ .
4. Якщо  $(x_k - x_{k-1}) > \varepsilon$ , перехід на п.2, інакше – кінець.

Перевагою є майже квадратична збіжність, а недоліком – обмежена область збіжності методу. Значення  $x_{-1}$  на практиці отримують додаванням певного зміщення відносно  $x_0$ .

### Завдання

Відділити корінь рівняння (згідно варіанту), та уточнити його вказаним методом.

Варіант	Метод	Рівняння
1	Половинного ділення	$2^x - 5x - 3 = 0$
2	Хорд	$x^2 \cdot \lg(x+1) = 1$
3	Простих ітерацій	$x - \cos(x) = 0$
4	Ньютона	$2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$
5	Січних	$x^2 - 20\sin(x) = 0$
6	Половинного ділення	$3^x + 4x - 5 = 0$
7	Хорд	$x \cdot \ln(x+4) = 4$
8	Простих ітерацій	$2x - 1 + \sin(x) = 0$
9	Ньютона	$x + \lg(x) = 0; [0;0.5]$
10	Січних	$(x-2)^2 + 10\cos(x) = 0$

Навести приклад процесу, для опису якого можна використати задану математичну модель. Змоделювати процес у системі MATLAB. Дати інтерпретацію результатів моделювання. Навести приклади використання заданої математичної моделі при розробленні радіоелектронних апаратів.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3

### Мінімізація функцій

Метою даної роботи є набуття навиків мінімізувати функції, що є моделями явищ у радіотехніці, використовуючи методи Фібоначі, золотого перерізу, покоординатного спуску, найшвидшого спуску, ділення кроку.

### Теоретичні відомості

Задачу мінімізації функції, як правило, розбивають на дві підзадачі:

1. локалізації мінімуму – знаходження інтервалу в якому існує єдиний мінімум;
2. уточнення мінімуму функціях.

Для знаходження максимуму функції досить змінити її знак і знайти мінімум отриманої функції.

Якщо функція задана аналітично і вона неперервна, то для знаходження мінімуму досить знайти нуль похідної заданої функції і перевірити значення другої похідної справа і зліва від отриманого розв'язку. Якщо похідні більші нуля, то мінімум, якщо менші нуля, то максимум, а якщо одна похідна більша, а друга менша нуля (добуток менший нуля), то – перегин.

#### Метод Фібоначі

Алгоритм пошуку:

Задають початковий інтервал  $[a;b]$

Вибирають точку  $x_2$  за формулою:  $x_2 = \frac{f_i b + f_{i+1} a}{f_{i+1} + f_i}$ ;

Виведення:

$$\frac{b - x_2}{x_2 - a} = \frac{f_{i+1}}{f_i};$$
$$f_i \cdot b - x_2 f_i = (x_2 - a) f_{i+1};$$
$$x_2 (f_{i+1} + f_i) = f_i b + f_{i+1} a.$$

Вибираємо точку  $x'_2$  симетричну  $x_2$  відносно середини  $[a;b]$ .

Якщо  $x_2 < x'_2$  і  $f(x_2) > f(x'_2)$ , то  $a = x_2$  інакше  $b = x'_2$ ;

$i = i + 1$ ;

Якщо  $|b - a| > \varepsilon$ , то перехід на пункт 2, інакше вихід.

**Метод золотого перерізу** подібний до методу Фібоначі, тільки при знаходженні точки  $x_2$  відрізок  $[a;b]$  ділять у сталому відношенні  $\frac{b-x_2}{x_2-a} = 0,618034$ .

Алгоритм:

Задають початковий інтервал  $[a;b]$ ;

Знаходять  $x_2$  за формулою:  $x_2 = \frac{1+0,618034}{b+0,618034a}$ ;

Знаходять  $x'_2$  симетрично  $x_2$  відносно середини  $[a;b]$ ;

Якщо  $x_2 < x'_2$  і  $f(x_2) > f(x'_2)$ , то  $a = x_2$ , інакше  $b = x'_2$ ;

Якщо  $|b-a| > \varepsilon$ , то пункт 2, інакше вихід.

Для мінімізації функцій багатьох змінних використовують методи, які базуються на виборі напрямку, вздовж якого шукають мінімум функцій та уточненні мінімуму на цьому напрямку методом золотого перерізу. Найпростішим з таких методів є :

### **Метод покоординатного спуску**

Алгоритм:

Задана функція  $f(x_1, x_2)$  і область  $x_1[x'_1, x''_1]$ ,  $x_2[x'_2, x''_2]$ , в якій існує єдиний мінімум.

Фіксуємо значення змінної  $c_2$ :  $c_2 = \frac{x''_2 - x'_2}{2}$ ;

Методом золотого перерізу знаходимо мінімум функції  $f(x_1, c_1)$  на інтервалі  $x_1 \in [x'_1, x''_1]$ ;

$c_1 = \min f(x_1, c_1)$ ;

Знаходимо мінімум  $c_2 = \min f(c_1, x_2)$ ,  $x_2 \in [x'_2, x''_2]$ ;

Якщо  $|c_{1i} - c_{1i-1}| < \varepsilon$  і  $|c_{2i} - c_{2i-1}| < \varepsilon$ , то вихід, інакше пункт 2.

Інакшим варіантом вибору напрямку мінімізації є мінімізація функції вздовж вектора антиградієнта:

$$-\text{grad}f(x_1, x_2) = \left[ -\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}; -\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right].$$

### **Метод найкорішого спуску:**

Вибираємо точку початку наближення  $(x_1^0, x_2^0)$ ;

Знаходимо вектор антиградієнта;

Методом золотого перерізу знаходимо  $a$ , яке забезпечує мінімум функції в напрямку градієнту:

$$a = \min f \left( x_1^0 - \frac{a \partial f(x_1^0)}{\partial x_1}; x_2^0 - \frac{a \partial f(x_2^0)}{\partial x_2} \right);$$

$x_1^0 = a$ ;  $x_2^0 = a$  – координати другої точки;

Якщо відстань між точками  $\|x_i^0 - x_{i-1}^0\| > \varepsilon$ , то перехід на пункт 2, інакше вихід.

**Метод ділення кроку** аналогічний до методу найшвидшого спуску, тільки для мінімізації функції в площині перерізу градієнту не використовується метод золотого перерізу, а здійснюється крок заданої довжини.

Якщо при цьому функція зменшується, то переносимо  $x_0$  в отриману точку, інакше з точки  $x_0$  здійснюємо крок половинної довжини і т.д.

Процес зупиняють, коли довжина кроку менша заданої точності.

### Завдання

Локалізувати та уточнити мінімум функції на заданому інтервалі заданим методом.

Варіант	Метод	Функція	Інтервал
1	Фібоначі	$-\sin(x - 0.5)$	$x \in [0; \pi]$
2	Золотого перерізу	$(x - 2)^2 + 3(x - 2) + 7$	$x \in [1; 5]$
3	Покоординатного спуску	$-\sin(x_1 - 0.5) \cdot \sin(x_2 - 0.3) + 2$	$x_1 \in [0; \pi]$ $x_2 \in [0; \pi]$
4	Найскорішого спуску	$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 3$	$x_1 \in [0; 5]$ $x_2 \in [0; 5]$
5	Ділення кроку	$(x_1 - 3)^2 \cdot x_2 + 5$	$x_1 \in [-1; 4]$ $x_2 \in [-1; 4]$
6	Фібоначі	$x + \frac{1}{x}$	$x \in [0; 4]$
7	Золотого перерізу	$\frac{x}{2} + \cos(x + 0.6)$	$x \in [0; \pi]$
8	Покоординатного спуску	$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 + 2$	$x_1 \in [-3; 3]$ $x_2 \in [-3; 3]$
9	Найскорішого спуску	$-\cos(x_1 - 0.4) \cos(x_2 - 0.6) - 2$	$x_1 \in [0; \pi]$ $x_2 \in [0; \pi]$
10	Ділення кроку	$x_1^3 + \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2 - 4$	$x_1 \in [-1; 4]$ $x_2 \in [-1; 4]$

Навести приклад процесу, для опису якого можна використати задану математичну модель. Змоделювати процес в системі MATLAB. Дати інтерпретацію результатів моделювання. Навести приклади використання заданої математичної моделі при розробці радіоелектронних апаратів.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4

### Підбір емпіричних формул як математичних моделей експериментально отриманих даних

Метою даної роботи є ознайомлення з основними методами підбору емпіричних формул для випадків, коли при результати дослідження деякого явища подані у вигляді таблиці. Скласти програму для наближення заданої дискретної функції заданим методом.

### Теоретичні відомості

#### 1 Метод геометричного наближення

Найпростішою формулою, якою можна описати експериментально отримані дані є формула  $y = kx + b$ . Для визначення коефіцієнтів  $k$  і  $b$  можна використати метод геометричного наближення або метод найменших квадратів.

Будуємо експериментально отримані точки.

Проводимо довільну пряму, так щоб вона усереднювала ці точки. Беремо довільні дві точки, які лежать на цій прямій. Знаючи координати цих точок, записуємо для них рівняння прямої виду  $y = kx + b$ , що проходить через ці точки.

#### 2 Метод найменших квадратів

Суть методу полягає в тому, що за міру похибки при описуванні експериментальних даних функцією  $f(x) = y = kx + b$  беремо суму мір відхилень для всіх дослідів

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - kx_i - b)^2$$

Припустимо, що  $b$  відоме:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2 \sum_{i=1}^n (f(x_i) - kx_i - b)(-x_i) = 0$$

Припустимо, що  $k$  відоме:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (f(x_i) - kx_i - b) = 0$$

$$f(x_i) = y_i$$

Прирівнюємо похідні до нуля і з одержаної системи визначаємо значення  $k$  і  $b$ .

$$\begin{cases} -\sum y_i x_i + k \sum x_i^2 + b \sum x_i = 0 \\ \sum y_i - k \sum x_i - b \cdot n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum y_i x_i = k \sum x_i^2 + b \sum x_i \\ \sum y_i = k \sum x_i + b \cdot n \end{cases}$$

Одержані значення підставляємо у формулу:

$$y = kx + b$$

### Завдання

Користуючись методом геометричного наближення та середніх квадратів побудувати апроксимуючу функцію (згідно варіанту завдань).

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	$f$	$f$	$f$	$F$	$f$	$f$	$f$	$f$	$f$	$f$
0	1	0	2	2,5	0	1	6	4	2	5
2	2	1	1	4	1,5	0,5	5	3,5	0,5	5,5
4	4	3	0,5	2	2,5	1,5	3	3	1	4
6	3,5	5	1	1,5	1	2,5	1,5	2	3	2
8	2,5	6	1,5	2,5	0,5	1	1	1	4,5	0,5
10	1,5	6,5	2	4	1,5	0	2	0,5	4	1

Навести приклад процесу, для опису якого можна використати задану математичну модель. Навести приклади використання заданої математичної моделі при розробці радіоелектронних апаратів.



## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

### Побудова математичних моделей за експериментальними даними (інтерполяція).

Метою даної роботи є набуття навиків побудови математичних моделей медтехніки за експериментальними даними методом інтерполяції поліномом Лагранжа.

#### Теоретичні відомості

##### Метод інтерполяції поліномом Лагранжа

Поліном Лагранжа: 
$$P_n(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^n f(x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Приклад 1. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції:

x	1	2	3	5
y	1	5	14	81

Відповідно поліном Лагранжа матиме вигляд:

$$L_{3n} = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)}$$

Відкриваємо дужки та зводимо до спільного знаменника:

$$L_{3n} = \frac{(x^2 - 5x + 6)(x-5)}{-8} + \frac{(x^2 - 4x + 3)(5x - 25)}{3} + \frac{(x^2 - 3x + 2)(7x - 35)}{-2} + \frac{(x^2 - 3x + 2)(81x - 243)}{24} = \frac{36x^3 - 136x^2 + 290x - 336}{24} = \frac{9x^3 - 34x^2 + 72,5x - 84}{6}$$

Приклад 2. Функція задана таблично. Знайти значення функції, коли відомо, що  $x=4$ .

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	1186

$$L_3(4) = -1 \cdot \frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3 \cdot \frac{4(4-2)(4-6)}{1(1-2)(1-6)} + 3 \cdot \frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1186 \cdot \frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 225$$

Для полегшення обчислень складають допоміжні таблиці:

$x-x_0$	$x_0-x_1$	$x_0-x_2$	.....	$x_0-x_n$	$k_0$
$x_1-x_0$	$x-x_1$	$x_1-x_2$	.....	$x_1-x_n$	$k_1$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$x_n-x_0$	$x_n-x_1$	$x_n-x_2$	.....	$x-x_n$	$k_n$

Тоді  $k_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$ .

Введемо позначення добутку діагональних елементів:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x_i - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Побудуємо таблицю:

4	-1	-2	-6	-18
1	3	-1	-5	15
2	-1	2	-4	-16
6	5	4	-2	-240

Приклад 3. З якою точністю можна обчислити  $\sqrt{117}$  за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа для функції  $y = \sqrt{x}$ . Вибравши вузли інтерполяції  $x_0 = 100$ ,  $x_1 = 121$ ,  $x_2 = 144$ .

Будемо брати похідні від функції  $y = \sqrt{x}$  і підставляти значення.

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}; \quad y'' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}; \quad y''' = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}};$$

обмежимося трьома похідними – оскільки 3 вузли інтерполяції.

$$M_3 = \max |y'''| = \frac{3}{8\sqrt{100^5}}, \quad 100 \leq x \leq 144.$$

$$\text{Звідси отримаємо: } |R| \leq \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \approx 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

Недолік – складність алгоритму і необхідність його повного виконання для кожного значення  $x$ .

### Завдання

1. Пояснити алгоритм наближення заданої дискретної функції заданим методом. Метод наближення значення дискретної функції та аргумент точки, в

якій треба знайти значення інтерполяційної (апроксимуючої) функції вибрати згідно варіанту завдань.

x	f	f	F
0	1	0	2
2	2	1	1
3,5	4	3	0,5
7	3,5	5	1
9	2,5	6	1,5
10	1,5	6,5	2
№ варіанту	1, 3, 5, 7, 9	2, 4, 6, 8, 10	11, 12, 13, 14, 15

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

### Побудова математичних моделей за експериментальними даними (інтерполяція).

Метою даної роботи є набуття навиків побудови математичних моделей медтехніки за експериментальними даними методом інтерполяції поліномом Ньютона

### Теоретичні відомості

#### Метод інтерполяції поліномом Ньютона

Розглянемо випадок, коли вузли інтерполяції є рівновіддаленими, тобто  $x_i - x_{i-1} = h$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Введемо поняття скінченної різниці:

1-го порядку  $\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ ,

2-го порядку

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}, \dots$$

n-го порядку

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0, \Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1, \dots, \Delta^n y_{n-1} = \Delta^{n-1} y_n - \Delta^{n-1} y_{n-1},$$

Поліном Ньютона матиме вигляд

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

.

Коефіцієнти  $a_i$  будемо визначати з умови  $N(x_i) = f(x_i) = y_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Так, при  $x = x_0$  :  $N(x_0) = a_0 = y_0$ ;

при  $x = x_1$  :  $N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$ ;  $a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$ ;

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h};$$

$$\text{при } x = x_2 : N(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\text{або } a_0 + a_1 \cdot 2h + a_2 \cdot 2h \cdot h = y_2,$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1 \cdot 2h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 2h}{2h^2} = \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2h^2} =$$

$$\frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

При підстановці отриманих значень, поліном набуде вигляду:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Це інтерполяційний поліном Ньютона, що використовується для відшукування значень функції в точках  $x^*$ , близьких до початку таблиці. Аналогічно, будуючи поліном у вигляді

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_{n-2})$$

можна отримати інтерполяційний поліном Ньютона для знаходження значень функції на кінці проміжку  $[x_0, x_n]$ :

$$N(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)$$

Приклад. Задано таблицю значень функції  $y = \ln(x + 1)$ , що описує перебіг хімічної реакції.

$i$	$x_i$	$y_i$
0	1,3	0,8330
1	1,5	0,9163
2	1,7	0,9933
3	1,9	1,0647

Побудувати многочлен Ньютона.

Складемо таблицю скінчених різниць

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1,3	0,8330			
1	1,5	0,9163	0,0833		
2	1,7	0,9933	0,0770	-0,0063	
3	1,9	1,0647	0,0714	-0,0056	0,0007

$$h = 0,2$$

$$N(x) = 0,8330 + \frac{0,0833}{0,2}(x-1,3) - \frac{0,0063}{0,08}(x-1,3)(x-1,5) + \frac{0,0007}{0,048}(x-1,3)(x-1,5)(x-1,7)$$

Недолік – погана придатність при великій кількості точок

### Завдання

1. Пояснити алгоритм наближення заданої дискретної функції заданим методом. Метод наближення значення дискретної функції та аргумент точки, в якій треба знайти значення інтерполяційної (апроксимуючої) функції вибрати згідно варіанту завдань.

<b>x</b>	<b>f</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
0	1	0	2
2	2	1	1
3,5	4	3	0,5
7	3,5	5	1
9	2,5	6	1,5
10	1,5	6,5	2
№ варіанту	1, 3, 5, 7, 9	2, 4, 6, 8, 10	11, 12, 13, 14, 15

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

### Побудова математичних моделей за експериментальними даними (інтерполяція).

Метою даної роботи є набуття навиків побудови математичних моделей медтехніки за експериментальними даними методом інтерполяції кубічними сплайнами

### Теоретичні відомості

#### Метод інтерполяції кубічними сплайнами

Сплайн 3-го порядку на кожному з відрізків  $[x_i, x_{i+1}]$  можна подати у вигляді

$$P(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} y_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h^2} m_i + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h^2} m_{i+1}$$

де нахили  $m_i$  обчислюються за формулами:

$$m_0 = \frac{1}{2h}(4y_1 - y_2 - 3y_0); \quad m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (i = \overline{1, N-1});$$

$$m_N = \frac{3y_N + y_{N-2} - 4y_{N-1}}{2h}$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний кубічний сплайн для функції  $y = f(x)$ . Знайти наближене значення функції в точці  $x = -0,57$

i	0	1	2	3	4
$x_i$	-1,34	-0,84	-0,34	0,16	0,66
$y_i$	3,7524	5,2118	3,1729	1,9118	0,6375

$$h = 0,5; \quad N = 4$$

$$m_0 = \frac{1}{2 \cdot 0,5}(4 \cdot 5,2118 - 3,1729 - 3 \cdot 3,7524) = 6,4171;$$

$$m_1 = \frac{3,1729 - 3,7524}{2 \cdot 0,5} = -0,5795; \quad m_2 = \frac{1,9118 - 5,2118}{2 \cdot 0,5} = -3,3;$$

$$m_3 = \frac{0,6375 - 3,1729}{2 \cdot 0,5} = -2,5354; \quad m_4 = \frac{3 \cdot 0,6375 + 3,1729 - 4 \cdot 1,9118}{2 \cdot 0,5} = -2,5618$$

1)  $x \in [-1,34; -0,84], \quad i = 0.$

$$S_3(x) = -6,9966x^2 - 12,3338x - 0,2117.$$

2)  $x \in [-0,84; -0,34], \quad i = 1.$

$$S_3(x) = 17,1044x^3 + 27,5543x^2 + 9,5050x + 3,8915.$$

3)  $x \in [-0,34; 0,16], \quad i = 2.$

$$S_3(x) = 3,164x^3 - 0,0897x^2 - 2,2638x + 2,2893.$$

4)  $x \in [0,16; 0,66]$ ,  $i = 3$ .

$$S_3(x) = -0,0263x^2 - 2,327x + 2,3169.$$

За умовою  $x = -0,57$ ,  $x \in [-0,84; -0,34]$ ,  $i = 1$ .

Маючи вираз полінома на цьому проміжку, можемо обчислити значення функції в заданій точці, підставивши значення аргументу у вираз для полінома:

$$S_3(x) = 17,1044(-0,57)^3 + 27,5543(-0,57)^2 + 9,5050(-0,57) + 3,8915 = 4,2584$$

### Завдання

1. Пояснити алгоритм наближення заданої дискретної функції заданим методом. Метод наближення значення дискретної функції та аргумент точки, в якій треба знайти значення інтерполяційної (апроксимуючої) функції вибрати згідно варіанту завдань.

x	f	f	f
0	1	0	2
2	2	1	1
3,5	4	3	0,5
7	3,5	5	1
9	2,5	6	1,5
10	1,5	6,5	2
№ варіанту	1, 3, 5, 7, 9	2, 4, 6, 8, 10	11, 12, 13, 14, 15

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8

### Спектральні моделі в медтехніці

Метою даної роботи є ознайомлення з основними методами побудови спектральних моделей при розробці медтехніки.

### Теоретичні відомості

При розробці медтехніки майже завжди виникає необхідність мати відомості про сигнал, який даний апарат чи система оброблятиме. Перетворення Фур'є дає можливість виявити частоти наявні в деякому змінному в часі сигналі, що надходить від біооб'єкта, при дослідженні коливань, що відбуваються дуже швидко, так що їх не можна зобразити графічно або складно дослідити їх часові зміни. У цьому випадку доцільно

проводити гармонічний аналіз сигналу і розглядати його в частотній області. Маючи спектр сигналу можна отримати його зображення в часовій області.

### 1 Ряд Фур'є

В основі перетворення Фур'є лежить розклад функції в тригонометричний ряд. Рядом Фур'є для деякої функції  $f(x)$  в інтервалі  $[-l, l]$  називають тригонометричний ряд виду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^K b_k \sin k\omega_0 t, \quad (1)$$

якщо його коефіцієнти обчислено за формулами Фур'є:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Найпростіші достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є сформульовано в теоремі Діріхле.

Якщо в інтервалі  $[-l, l]$  функція має скінченне число точок розриву першого роду (або є неперервною) і скінченне число точок екстремуму (або їх може не бути), то її ряд Фур'є збігається причому:

а) в точках неперервності функції  $f(t)$  він збігається до цієї ж функції,  $S(t) = f(t)$ ;

б) в кожній точці розриву функції – до півсуми односторонніх границь функції зліва і справа,

$$S(t_k) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow t_k - 0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_k + 0} f(t) \right];$$

в) в обох граничних точках інтервалу – до півсуми односторонніх границь функції при прямуванні  $t$  до цих точок зсередини інтервалу,

$$S(-l) = S(l) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow -l + 0} f(t) + \lim_{t \rightarrow l - 0} f(t) \right].$$

Для парної функції всі коефіцієнти  $b_k = 0$  і відповідний ряд Фур'є не містить синусів

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K a_k \cos \frac{k\pi t}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt.$$



Для непарної функції всі коефіцієнти  $a_k = 0$  і відповідний ряд Фур'є не містить косинусів

$$f(t) = \sum_{k=1}^K b_k \sin \frac{k\pi t}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

Функцію  $f(t)$ , задану на інтервалі  $[0, l]$ , можна довільним чином продовжити на сусідній інтервал  $[-l, 0)$  і тому її можна зображати різними рядами Фур'є. Це стосується сигналу неперервного в часі.

За допомогою формул Ейлера отримують комплексну форму ряду Фур'є

$$f(t) = \sum_{-K}^K c_k e^{jk\omega t}, \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad |c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

За допомогою перетворення Фур'є обмеженої в часі функції  $f(t)$  можна визначити спектр  $F(j\omega)$  і навпаки – через обернене перетворення Фур'є - із спектральної функції отримати функцію залежності від часу:

$$F(j\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t};$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

## 2 Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) та його застосування до моделювання медтехніки

На практиці, як правило, сигнал дискретизують і мають справу лише з масивами відліків  $y_n$ , відібраних в моменти часу  $t_n = nT_\delta$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  які необхідно опрацювати. Нехай при цьому відомим є період основної гармоніки і кругова частота  $\omega_0$ . Незалежною змінною тепер є час  $t$ . Позначимо період дискретизації  $T_\delta$ . Тоді загальний час спостереження  $T = NT_\delta$ .

Для отримання алгоритму обчислення дискретного перетворення необхідно замінити:

$$t \text{ через } nT_\delta; \quad f(t) \text{ через } f(nT_\delta); \quad e^{-j\omega t} \text{ через } e^{-j\omega nT_\delta}.$$

В результаті отримаємо:

$$F(j\omega) = T_\delta \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_\delta) e^{-j\omega nT_\delta} = T_\delta F_d(j\omega);$$

Домноження на величину інтервалу дискретизації не входить в позначення ДПФ, проте на практиці його треба виконувати, щоб величина і розмірність ДПФ відповідали величині і розмірності перетворення Фур'є.

Тобто:

$$F_d(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_\delta) e^{-j\omega nT_\delta} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_\delta) \cos \omega nT_\delta - j \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_\delta) \sin \omega nT_\delta ;$$

Є ряд властивостей, спільних для перетворення Фур'є неперервних та дискретних сигналів, а саме:

а) якщо функція, що залежить від часу, парна, то і спектральна функція теж парна і дійсна;

б) якщо функція, що залежить від часу, непарна, то і спектральна функція теж непарна і уявна;

в)  $F(j\omega)$  і  $F(-j\omega)$  та  $F_d(j\omega)$  і  $F_d(-j\omega)$  комплексно-спряжені.

Проте ДПФ має деякі особливості. Зокрема, спектр повторюється періодично через  $2\frac{\pi}{T_\delta}$ . З цієї періодичності можна встановити вимоги до

частоти відбору відліків – частоти дискретизації, які формулюються у вигляді теореми дискретизації, відомої ще під назвою теореми Котельникова:  $f_\delta > 2f_c$ , де  $f_c$  - найвища частота сигналу (частота Найквіста), причому  $F(j\omega) = 0$  при  $\omega \geq 2\pi f_c$ .

Наприклад, необхідно розкласти в ряд Фур'є функцію  $f(t) = \frac{t}{2}$  на інтервалі  $(0, 2\pi)$ .

Розв'язування.

На даному інтервалі функція ні парна, ні непарна, тому обчислення проводимо за загальними формулами

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l y \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l y \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Довжина інтервалу в цих формулах  $[-l, l]$  тобто  $2l$  і з другого боку  $(0, 2\pi)$ - $2\pi$ . Отже,  $l=\pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cos nx dx = \left. \begin{array}{l} x = U \\ dx = dU \\ \cos nx dx = dV \\ \frac{1}{n} \sin nx = V \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{n} 2\pi \sin 2n\pi - \frac{1}{n} 0 \sin(-n0) \right) - \frac{1}{n} \left( -\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{n^2} (\cos 2n\pi - \cos 0) = \frac{1}{2\pi n^2} (\cos 2n\pi - 1)$$

Для  $a_0$  маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cos 0 \cdot x dx = \frac{x^2}{4\pi} \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{n}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Розкласти в ряд Фур'є

$$y = \begin{cases} 6 & \text{при } 0 < x < 2 \\ 3x & \text{при } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Довжина всього інтервалу  $2e$  і  $4$  тобто  $e = 2$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 y \cos \frac{nx\pi}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 6 \cos \frac{nx\pi}{2} dx + \int_2^4 3x \cos \frac{nx\pi}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{12}{n\pi} \sin \frac{nx\pi}{2} \Big|_0^2 + 3 \left( \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{nx\pi}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{nx\pi}{2} \right) \Big|_2^4 \right] =$$

$$= \frac{6}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \quad n \neq 0$$

При парному  $n$   $\cos n\pi = 1$ ;  $a_n = 0$ ;

при непарному  $n \quad \cos n\pi = -1; a_n = \frac{12}{n^2 \pi^2}$

При  $n = 0$  в загальній формулі одержимо

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 y dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 6 dx + \int_2^4 3x dx \right) = \frac{1}{2} \left( 6x \Big|_0^2 + \frac{3x^2}{2} \Big|_2^4 \right) = 15$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 y \sin \frac{nx\pi}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 6 \sin \frac{nx\pi}{2} dx + \int_2^4 3x \sin \frac{nx\pi}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{12}{n\pi} \cos \frac{nx\pi}{2} \Big|_0^2 + 3 \left( \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{nx\pi}{2} - \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{nx\pi}{2} \right) \Big|_2^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12(1 - \cos n\pi) + 3(4 \cos n\pi - 8)] = -\frac{6}{n\pi}$$

$$y = \frac{15}{12} + \frac{12}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \dots \right)$$

3. Розкласти в ряд Фур'є функцію  $y = e^{-x}$  на проміжку  $(-\pi, \pi)$

Використаємо комплексну форму ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx.$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-in x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{-(1+in)\pi} - e^{-(1+in)(-\pi)}}{2\pi(1+in)}$$

### Завдання

Розкласти в ряд Фур'є функції на заданих проміжках:

- $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi.$
- $f(x) = e^x, -2 < x < 2.$
- $f(x) = x, -\pi \leq x \leq 0.$
- $f(x) = 2x, 0 \leq x \leq \pi.$

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №9

### Числове інтегрування

Метою роботи є авчитися застосувати методи числового інтегрування до дослідження математичних моделей медтехніки.

#### Теоретичні відомості

##### 1 Метод прямокутників

Розрахункова формула  $S = \int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$

$h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$  - кількість точок розбиття  $[a,b]$ . Похибка методу

$$R \leq \frac{h}{2}(b-a) \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

Приклад. Обчислити  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

I	$x_i$	$x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$	$\frac{\ln x_i^*}{x_i^*}$
0	1,00		
1	1,05	1,025	0,0241
2	1,10	1,075	0,0673
3	1,15	1,125	0,1047
4	1,20	1,175	0,1372
5	1,25	1,225	0,1657
6	1,30	1,275	0,1905
7	1,35	1,325	0,2124
8	1,40	1,375	0,2316
9	1,45	1,425	0,2485
10	1,50	1,475	0,2635
11	1,55	1,525	0,2767
12	1,60	1,575	0,2884
13	1,65	1,625	0,2988
14	1,70	1,675	0,3079
15	1,75	1,725	0,3161
16	1,80	1,775	0,3233
17	1,85	1,825	0,3296
18	1,90	1,875	0,3353
19	1,95	1,925	0,3402
20	2,00	1,975	0,3446
			$\Sigma = 4,8064$

Отже,  $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \approx 0,05 \cdot 4,8064 = 0,24032$ .

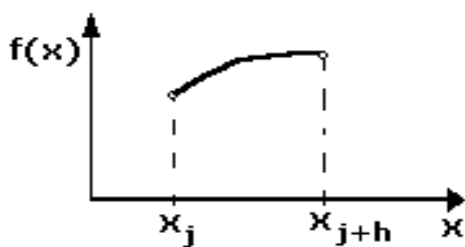
Обчислимо похибку:  $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

На проміжку  $[1,2]$   $\max_{[1,2]} f'(x) = 1$  ( $f'(1) = 1$ ,  $f'(2) = 0$ ), тому

$$R \leq \frac{0,05}{2} (2 - 1) \cdot 1 = 0,025. \quad (I_1 = 0,24032 \pm 0,025).$$

## 2 Метод трапецій

В цьому випадку підінтегральну функцію замінюють на відріжку  $[x_j; x_j+h]$  поліномом першого степеня  $P_i(x)$ . Така апроксимація неоднозначна і одним із можливих способів є проведення прямої через кінці заданого інтервалу. У цьому випадку площа поверхні трапеції – це інтеграл:



$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

похибка

$$R \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

де  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$  - кількість точок розбиття  $[a,b]$ ,  $y_i = \frac{\ln x_i}{x_i}$

i	$x_i$	$y_i$	i	$x_i$	$y_i$
0	1,00	0	11	1,55	0,2827
1	1,05	0,0465	12	1,60	0,2938
2	1,10	0,0866	13	1,65	0,3035
3	1,15	0,1215	14	1,70	0,3121
4	1,20	0,1519	15	1,75	0,3198
5	1,25	0,1785	16	1,80	0,3265
6	1,30	0,2018	17	1,85	0,3325
7	1,35	0,2223	18	1,90	0,3378
8	1,40	0,2403	19	1,95	0,3425
9	1,45	0,2563	20	2,00	0,3466
10	1,50	0,2703			

$$I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \approx 0,05 \cdot \left( \frac{0 + 0,3466}{2} + 4,6272 \right) = 0,240025$$

Похибка  $f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ ,  $f''(1) = -3$ ,  $f''(2) = -0,2$ ,

$\max_{[1,2]} |f''(x)| = 3$ , тому  $R \leq \frac{(0,05)^2}{12} (2-1) \cdot 3 = 0,000625 \approx 0,0006$ .

( $I_2 = 0,24032 \pm 0,0006$ ). Уточнена формула  $I = \frac{2I_1 + I_2}{3} \approx 0,24025$

### 3 Метод Сімпсона

Розрахункова формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})]$$

$h = \frac{b-a}{n}$ ,  $2k = n$  - кількість точок розбиття  $[a, b]$ .

Похибка методу  $R \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|$

Приклад.

Обчислити  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ ,  $n = 20$ ,  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $h = 0,05$

i	$x_i$	$y_i$	i	$x_i$	$y_i$
0	0	1,0000	11	0,55	1,3532
1	0,05	1,0025	12	0,60	1,4333
2	0,10	1,0101	13	0,65	1,5258
3	0,15	1,0228	14	0,70	1,6323
4	0,20	1,0408	15	0,75	1,7551
5	0,25	1,0645	16	0,80	1,8965
6	0,30	1,0942	17	0,85	2,0596
7	0,35	1,1303	18	0,90	2,2479
8	0,40	1,1735	19	0,95	2,4658
9	0,45	1,2245	20	1,00	2,7183
10	0,50	1,2840			

$I_1 \approx \frac{0,05}{3} [1 + 2,7183 + 4 \cdot (1,0025 + 1,0228 + 1,0645 + \dots + 2,4658) + 2 \cdot (1,0101 + 1,0408 + 1,0942 + \dots + 2,2479)] = 1,462665$

Для оцінки похибки знайдемо  $f^{IV}(x)$ :

$$f(x) = e^{x^2}; \quad f'(x) = 2xe^{x^2}; \quad f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1);$$

$$f^{IV}(x) = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3).$$

$$\max_{[1,2]} |f^{IV}(x)| = 206,6, \text{ тому } R \leq \frac{(0,05)^4}{180} (1-0) \cdot 206,6 \approx 0,000007.$$

Отже,  $I_1 = 1,462665 \pm 0,000007$ .

Якщо  $f^{IV}(x)$  складно, то використовують інший спосіб, збільшивши крок вдвічі, знову обчислюють значення інтеграла, тобто  $n = 10$ ,  $h = 0,1$ .

i	$x_i$	$y_i$
0	0	1,0000
1	0,1	1,0101
2	0,2	1,0408
3	0,3	1,0942
4	0,4	1,1735
5	0,5	1,2840
6	0,6	1,4333
7	0,7	1,6323
8	0,8	1,8965
9	0,9	2,2479
10	1,00	2,7183

Тоді за формулою Сімпсона:

$$I_2 \approx \frac{0,1}{3} [1 + 2,7183 + 4 \cdot (1,0101 + 1,0942 + 1,2840 + 1,6323 + 2,2479) + 2 \cdot (1,0408 + 1,1735 + 1,4333 + 1,8965)] = 1,462683.$$

У цьому випадку похибку обчислення  $I_1$  можна отримати за формулою

$$\delta \approx \frac{I_2 - I_1}{15} = 0,0000012.$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = 0,000001.$$

### Завдання

Обчислити інтеграл різними методами і порівняти результати, обчислити похибки методів

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$	2. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$	3. $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$	4. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$
5. $\int_1^4 \frac{1+x^2}{x} dx$	6. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$	7. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$	8. $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$
9. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$	10. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$	11. $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx$	12. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{5+x}} dx$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	14. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+2x}}$	15. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1}$	16. $\int_4^9 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$



17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$	18. $\int_0^{\pi} x \cos x dx$	19. $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$	20. $\int_1^6 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$
21. $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{5+2x}}$	22. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}$	23. $\int_2^6 \frac{x dx}{2-\sqrt{1+2x}}$	24. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$
25. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+4x+5}$	26. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1}$	27. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+x}$	28. $\int_0^5 \sqrt{(1+x^2)^3} dx$

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №10

### Застосування чисельних методів до дослідження моделей, заданих диференціальним рівнянням.

Метою роботи є набуття навиків застосування чисельних методів до дослідження моделей, заданих диференціальним рівнянням.

### Теоретичні відомості

#### 1 Метод Ейлера

Диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  визначає на площині так зване поле напрямів [1], тобто в кожній точці площини, де існує функція  $f(x, y)$  визначає напрям інтегральної кривої рівняння, яка проходить через цю точку. Припустимо, що треба розв'язати задачу Коші, тобто знайти розв'язок диференціального рівняння виду:  $y' = f(x, y)$  при заданій початковій умові

$y(x_0) = y_0$ . Розділимо відрізок  $[x_0, X]$  на  $n$  рівних частин і нехай  $\frac{X - x_0}{n} = h$  ( $X = x_0 + n \cdot h$ ,  $h$  – крок виміру аргументу).

Припустимо, що в середині елементарного проміжка від  $x_0$  до  $x_0 + h$  функція  $y'$  зберігає постійне значення  $f(x_0, y_0)$ . Тоді маємо  $y_1 - y_0 \approx h \cdot f(x_0, y_0)$ , де  $y_1$  – значення шуканої функції, відповідне значенню  $x_1 = x_0 + h$ . Звідси отримуємо  $y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ . Повторюючи цю операцію, отримаємо послідовні значення функції:

$$\begin{aligned}
 y_2 &\approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1), \\
 y_3 &\approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2), \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_{k+1} &\approx y_k + h \cdot f(x_k, y_k).
 \end{aligned}$$

Таким чином, ми зможемо приблизно побудувати інтегральну криву в вигляді ламаної з вершинами  $M_k(x_k, y_k)$ , де

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

Цей метод називається *методом ламаних Ейлера*, або просто *методом Ейлера*.

Приклад:

Знайти, використовуючи метод Ейлера, значення функції  $y$ , яка визначається диференціальним рівнянням  $y' = \frac{y-x}{y+x}$ , при початкових умовах

$y(0) = 1$ , приймаючи  $h = 0,1$ . Обмежитися знаходженням перших чотирьох значень  $y$ .

Розв'язання: При  $h = 0,1$  послідовні значення аргументу будуть:  $x_0 = 0, x_1 = 0,1, x_2 = 0,2, x_3 = 0,3, \dots$

Вирахуємо відповідні значення шуканої функції:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 1,1,$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot \frac{1,1-0,1}{1,1+0,1} = 1,183,$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1,183 + 0,1 \cdot \frac{1,183-0,2}{1,183+0,2} = 1,254,$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1,254 + 0,1 \cdot \frac{1,254-0,3}{1,254+0,3} = 1,315,$$

## 2 Метод Рунге-Куты

Нехай функція  $y$  визначена диференціальним рівнянням  $y' = f(x, y)$  з початковими умовами  $y(x_0) = y_0$ . При числовому інтегруванні такого рівняння

вважаємо, що  $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ , де  $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$ ,

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \quad k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

Приклад.

Знайти значення функції  $y$  визначеної диференціальним рівнянням  $y' = 2(x^2 + y)$  при початкових умовах  $y(0) = 1$ , приймаючи  $h = 0,1$  на проміжку  $[0; 0,06]$ .

$$f(x, y) = 2(x^2 + y); \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

$$1. \quad k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0;1) = 0,2;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot f\left(0,05; 1 + \frac{0,2}{2}\right) = 0,1 \cdot f(0,05; 1,1) = 0,2205$$

;

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot f(0,05; 1,11025) = 0,22255;$$

$$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,22255) = 0,24651$$

$$\text{Тоді } \Delta y_0 = 0,2221; \quad y_1 \approx y_0 + \Delta y_0 = 1,22210; \quad y(0,1) = 1,22210.$$

$$2. \quad k_1^{(1)} = 0,24642; \quad k_2^{(1)} = 0,273562; \quad k_3^{(1)} = 0,276276; \quad k_4^{(1)} = 0,307675;$$

$$\text{Тоді } \Delta y_1 = 0,2756; \quad y_2 \approx y_1 + \Delta y_1 = 1,4977; \quad y(0,2) = 1,4977.$$

$$3. \quad k_1^{(2)} = 0,307546; \quad k_2^{(2)} = 0,3428; \quad k_3^{(2)} = 0,346326; \quad k_4^{(2)} = 0,386811;$$

$$\text{Тоді } \Delta y_2 = 0,345435; \quad y_3 \approx y_2 + \Delta y_2 = 1,84317; \quad y(0,3) = 1,84317.$$

$$4. \quad k_1^{(3)} = 0,386634; \quad k_2^{(3)} = 0,4318; \quad k_3^{(3)} = 0,43631; \quad k_4^{(3)} = 0,4879;$$

$$\text{Тоді } \Delta y_3 = 0,43513; \quad y_4 \approx y_3 + \Delta y_3 = 2,2783; \quad y(0,4) = 2,2783.$$

Щоб оцінити точність отриманого розв'язку  $y_4$  використаємо формулу

$$R = \frac{|y_h - y_{2h}|}{15},$$

збільшивши крок вдвічі отримаємо  $y_4$  за два кроки ( $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0,2, x_1 = 0,2, x_2 = 0,4$ ).

$$1. \quad k_1^{(0)} = 0,4; \quad k_2^{(0)} = 0,484; \quad k_3^{(0)} = 0,5006; \quad k_4^{(0)} = 0,61632;$$

$$\text{Тоді } \Delta y_0 = 0,49765; \quad y_1 \approx y_0 + \Delta y_0 = 1,49765 \quad \text{в точці } x_1 = 0,2;$$

$$2. \quad k_1^{(1)} = 0,61506; \quad k_2^{(1)} = 0,758072; \quad k_3^{(1)} = 0,786674; \quad k_4^{(1)} = 0,97773;$$

$$\text{Тоді } \Delta y_1 = 0,78038; \quad y_2 = 2,27803 \quad \text{в точці } x_2 = 0,4.$$

$$R = \frac{|2,27830 - 2,27803|}{15} = 0,000018 < 0,00002; \quad y(0,4) = 2,2783$$

### Завдання

1. Використовуючи метод Ейлера знайти чотири значення функції, заданої диференціальним рівнянням:

а)  $y' = x + y$  при початкових умовах  $y(0) = 1$ , поклавши  $h = 0,1$ ;

б)  $y' = 1 + x + y^2$  при початкових умовах  $y(0) = 1$ , поклавши  $h = 0,1$ ;

в)  $y' = x^2 + y^2$  при початкових умовах  $y(0) = 0$ , поклавши  $h = 0,1$ ;

г)  $y' = y^2 + \frac{y}{x}$  при початкових умовах  $y(2) = 4$ , поклавши  $h = 0,1$ ;

2. Використовуючи метод Рунге-Куты знайти чотири значення функції, заданої диференціальним рівнянням і оцінити точність методу:

а)  $y' = y - \frac{2x}{y}$  при початкових умовах  $y(0) = 1$ , поклавши  $h = 0,2$ , на проміжку  $[0, 1]$ ;

б)  $x^2 y' - xy = 1$  при початкових умовах  $y(1) = 0$ , поклавши  $h = 0,2$ , на проміжку  $[1, 2]$ ;

в)  $4y' = x^2 + 4y^2$  при початкових умовах  $y(0) = 1$ , поклавши  $h = 0,1$ , на проміжку  $[0, 1]$ ;

г)  $y' = 0,5y + \frac{x}{y}$  при початкових умовах  $y(0) = 1$ , поклавши  $h = 0,1$ , на проміжку  $[0, 1]$ .

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №11

### Дослідження явища теплопередачі методом Фур'є

Для того, щоб дослідити поведінку моделі у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних застосуємо метод Фур'є.

Цей метод дуже зручний для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних, в яких невідомою є функція від 2-х змінних. Тоді частковий розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку двох функцій:

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Нехай треба розв'язати рівняння, що описує процес поширення тепла у однорідному стержні скінченної довжини:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3)$$

для стержня скінченної довжини  $l$  для граничних умов:

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, u(x, 0) = \varphi(x)$$

Користуючись методом Фур'є покладемо

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (4)$$

Звідси:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X(x) \cdot T'(t); \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

звідси одержимо: 
$$T' X = a^2 X'' \cdot T$$

Розділимо змінні і отримаємо рівняння:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X};$$

Ліва частина рівняння залежить тільки від  $T$ , права тільки від  $X$ , а така рівність можлива в тому випадку коли обидві частини рівняння дорівнюють постійній величині. Позначимо цю величину  $-\lambda = \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$  ( $\lambda > 0$ ), тоді наше рівняння розкладеться на два рівняння:

$$T' = -\lambda \cdot a^2 T, \quad X'' = -\lambda \cdot X.$$

Для заданої задачі розв'язок буде мати вигляд:

$$\begin{cases} X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x \\ T(t) = C e^{-\sqrt{\lambda} a^2 t} \end{cases},$$

$$u(x, t) = e^{-\sqrt{\lambda} a^2 t} (a \cos \sqrt{\lambda} x + \beta \sin \sqrt{\lambda} x)$$

де  $a = AC$ ,  $\beta = BC$  – довільні сталі.

Зауваження. Якщо б замість  $-\lambda$  взяти  $\lambda = k^2$ , то рівняння:  $X'' + \lambda x = 0$  набуло б вигляду  $X'' - k^2 x = 0$  і його розв'язком був би вираз  $x = A e^{kx} + B e^{-kx}$ . У такому вигляді  $X(x)$  не задовольняє початковим умовам (при жодному значенні  $x$  не дорівнює нулю).

Визначимо невідомі сталі використовуючи початкові умови (4):

$x = 0, \quad u = 0$  (перша умова),  $x = l, \quad u = 0$  (друга умова)

тоді

$$a \cos 0 + \beta \sin 0 = 0 \quad \text{і} \quad a \cos \sqrt{\lambda} l + \beta \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

звідки  $a = 0, \quad \beta \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ , константа  $\beta \neq 0$ , отже  $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ ,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad l \neq 0.$$

Кожному значенню  $\lambda(n)$  відповідає частковий розв'язок

$$u_n = \beta_n e^{-\frac{a n \pi t}{l}} \sin \frac{n^2 \pi^2}{l^2} x,$$

сума яких  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  дає повний розв'язок.

Використовуючи третю умову:  $u = \varphi(t), \quad t = 0$ , отримаємо вираз для визначення  $\beta_n$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n^2 \pi^2}{l^2} x \quad (3)$$

Ця рівність є розкладом в інтервалі  $(0, l)$  функції  $\varphi(x)$  в неповний ряд Фур'є, що містить тільки синуси, тобто

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n^2 \pi^2}{l^2} x \, dx$$

Таким чином сума ряду (3) є частковим розв'язком заданого рівняння, який задовольняє граничним умовам.

### Завдання

1. Використовуючи метод Фур'є знайти розв'язки диференціальних рівнянь:

а)  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$  (Рівняння гіперболічного типу)

б)  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  (Рівняння еліптичного виду)

2. Для опису яких процесів при моделюванні медтехніки застосовують ці рівняння?

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №12

### Розв'язування задачі Коші для рівнянь коливань струни методом Д'Аламбера

Метою даної роботи є набуття навиків застосування методу Д'Аламбера при дослідженні математичних моделей коливальних процесів.

#### Теоретичні відомості

### Розв'язування задачі Коші для рівнянь коливань струни методом Д'Аламбера

Розв'язування більшості крайових задач пов'язане з математичними труднощами, тому основними методами є наближені методи. Одним з точних методів є метод характеристик описаний Д'Алабером у XVIII ст. [1].

Розглянемо рівняння коливання струни:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

з початковими умовами:

$$1) \quad U(x,t)|_{t=+0} = \varphi(x); \quad 2) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=+0} = \psi(x).$$

Проведемо в рівнянні (1) заміну  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$ . Додавши почленно і віднявши почленно ці рівності, отримаємо:

$$x = \frac{1}{2a} \cdot (\xi + \eta); \quad t = \frac{1}{2a} \cdot (\xi - \eta).$$

Тепер від рівняння з похідними по  $t$  і  $x$  перейдемо до рівняння з похідними по  $\eta$  і  $\xi$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{звідки, враховуючи} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

отримаємо:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Знайдемо другу похідну і врахуємо  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right) \cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) \cdot 1 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Аналогічно знайдемо

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{звідки, враховуючи} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = a,$$

отримаємо:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -a \frac{\partial U}{\partial \xi} + a \frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Тоді  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(-a \frac{\partial U}{\partial \xi} + a \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)}{\partial t} &= \frac{\partial\left(-a \frac{\partial U}{\partial \xi} + a \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial\left(-a \frac{\partial U}{\partial \xi} + a \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= \left(-a \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right) \cdot (-a) + \left(-a \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) \cdot a; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Підставимо  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$  і  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  в рівняння (1):

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) = a^4 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right),$$

прирівнявши отримаємо:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right)$$



$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right); \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right);$$

$$-2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 2a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \right).$$

Остання рівність можлива лише при

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Отже,  $\frac{\partial U}{\partial \xi}$  залежить тільки від  $\xi$ , а для  $\frac{\partial U}{\partial \eta}$  залежить тільки від  $\eta$ .

Отже загальний розв'язок  $U(\xi, \eta)$  можна зобразити у вигляді двох функцій:

$$U(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta)$$

$U(x, t) = F_1(x - at) + F_2(x + at)$  – це рівняння називають розв'язком Д'Аламбера.

Виразимо  $F_1$  і  $F_2$  враховуючи початкові умови.

$$\varphi(x) = F_1(x) + F_2(x) = U(x, t)|_{t=0} \quad (2)$$

Звідси:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x - at)}{\partial t} + \frac{\partial F_2(x + at)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x - at)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1(x - at)}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial F_2(x + at)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(x + at)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x - at)}{\partial x} \cdot (-a) + \frac{\partial F_2(x + at)}{\partial x} \cdot a.$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = (-a) \cdot \frac{dF_1(x)}{dx} + a \cdot \frac{dF_2(x)}{dx} = \psi(x) \quad (3)$$

При  $t=0$  функція залежить тільки від  $x$ , тому замість частинних похідних пишемо звичайні. Тобто функції  $F_1$  і  $F_2$  задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{dF_1(x)}{dx} - \frac{dF_2(x)}{dx} = -\frac{\psi(x)}{a}.$$

Проінтегрувавши в межах від 0 до  $x$  отримаємо:

$$F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + C, \text{ прийmemo } C=0, \text{ оскільки рiвностi (2) i}$$

(3) виконуються при будь-якому значенні  $C$ . Тоді, враховуючи (2)

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x), \quad F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz,$$

звідси

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz$$

Підставивши ці значення у вираз розв'язку Д'Аламбера, одержимо:

$$U(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} \psi(z) dz - \int_0^{x-at} \psi(z) dz \right],$$

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Таку модель використовують тоді, коли цікавляться рухом віддалених ділянок струни протягом малих проміжків часу порівняно з часом поширення сигналу від одного кінця струни до іншого.

Фізичний зміст явища, описаного даною моделлю:

Перш за все розв'язок задачі є сумою двох функцій і можна записати:

$$U(x,t) = \varphi_1(x-at) + \varphi_2(x+at)$$

Нехай  $\varphi_2(x+at) = 0$ , тоді зміщення в точці  $x$  в момент часу  $t$  дорівнює:

$$U_1(x,t) = \varphi_1(x-at).$$

Покажемо, що таке ж зміщення спостерігатиметься і в точці з координатою  $x + \Delta x$  через проміжок часу  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$ . Розглянемо аргумент

функції  $\varphi_1$  в момент часу  $t + \Delta t$ ,

$$x + \Delta x - a \cdot (t + \Delta t) = x + \Delta x - a \cdot t - a \cdot \Delta t = x - at + a \cdot \Delta t - a \cdot \Delta t = x - at$$

.

Видно, що аргумент функції залишається незмінним, тобто це означає, що відбувається зміщення вздовж осі струни із швидкістю  $a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Цей процес є хвилею. Таким чином, якщо на ділянці струни відбувається зміщення, що задовольняє співвідношення  $U(x,0) = \varphi(x)$ , то через час  $t$  це зміщення рухатиметься вздовж осі струни із швидкістю  $a$  не змінюючи своєї форми. Тому говорять про поширення прямої плоскої хвилі зміщення у додатному напрямі осі  $OX$ .

Аналогічно можна показати, що функція  $\varphi_2(x+at) = 0$  описує поширення хвилі у зворотному (від'ємному) напрямі.

Приклади.

Дослідити математичні моделі хвильових процесів заданих рівняннями

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо } u|_{t=0} = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

*Розв'язок.*

Оскільки  $a = 1$ ,  $\psi(x) = 0$ , то

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}, \text{ де } \varphi(x) = x^2.$$

$$\text{Отже, } u = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} = x^2 + t^2.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо } u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x.$$

*Розв'язок.*

Оскільки  $a = 2$ ,  $\psi(x) = x$ ,  $\varphi(x) = 0$ , то

$$u = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} z dz = \frac{1}{8} z^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8} [(x+2t)^2 - (x-2t)^2] = xt.$$

3. Знайти форму струни, заданої рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо } t = \frac{\pi}{2a}, \quad u \Big|_{t=0} = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1.$$

Розв'язок.

Маємо

$$u = \frac{\sin(x-at) + \sin(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} dz = \sin x \cos at + \frac{1}{2a} z \Big|_{x-at}^{x+at} = \\ = \sin x \cos at + t.$$

Підставивши замість  $t$  його значення, одержимо  $u = \frac{\pi}{2a}$ , тобто струна паралельна осі абсцис.

### Завдання

Дослідити математичні моделі хвильових процесів заданих рівняннями

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо } u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -x.$$

Відповідь  $u = x(1-t)$ .

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо } u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos x.$$

Відповідь  $u = \frac{\cos x \cdot \sin at}{a}$ .

6. Знайти форму струни, заданої рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо } t = \pi, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos x.$$

## Практичне заняття № 13

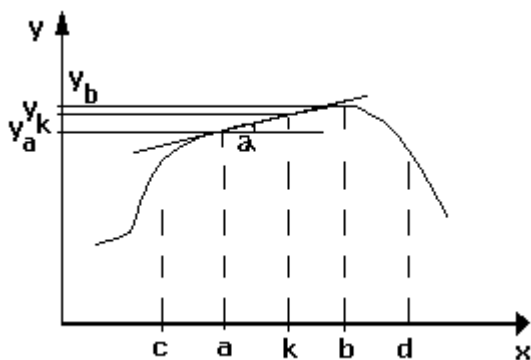
### Метод скінчених різниць

Метод скінчених різниць ефективно застосовується для розв'язування граничних задач математики, фізики, особливого поширення цей метод набув із розвитком комп'ютерної техніки.

Розглянемо цей метод на прикладі розв'язування граничних задач в одновимірній області [1].

Виразимо похідну функції  $y = f(x)$  у вигляді лінійної комбінації значень цієї функції в певних точках деякого проміжку зміни її незалежних змінних. Це можна зробити кількома способами:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_k = \begin{cases} \frac{y_k - y_a}{h_{ak}} & (1) \\ \frac{y_b - y_a}{h_{ak} + h_{kb}} & (2), \\ \frac{y_b - y_k}{h_{kb}} & (3) \end{cases} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_b - y_a}{h_{ak} + h_{kb}}.$$



(1) і (3) – ліва і права односторонні скінчені різниці;

(2) – центральна скінчена різниця.

Якщо вважати, що крок однаковий то:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_k = \frac{y_b - y_a}{2h}$$

Другу похідну в центральній і скінчених різницях можна наближено записати так:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_k = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_k = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a}{2h} = \frac{\frac{y_d - y_k}{2h} - \frac{y_k - y_c}{2h}}{2h} = \frac{y_d - 2y_k + y_c}{4h^2}$$

При розв'язуванні граничних задач застосовують формули для другої похідної на основі виразів для односторонніх скінчених різниць.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_k = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b - \left(\frac{dy}{dx}\right)_k}{h} = \frac{\frac{y_b - y_k}{h} - \frac{y_k - y_a}{h}}{h} = \frac{y_b - 2y_k + y_a}{h^2}$$

Розв'язування крайової задачі зводиться до обчислення значень функції у вибраних вузлах і розв'язування відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклад. Розв'язати методом скінчених різниць граничну задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 13x^3 + 1$$

на відрізку  $[0,4]$  при граничних умовах  $x=0; y=1$  і  $x=4; y=65$ .

*Розв'язання.*

Ділимо відрізок на чотири рівних частини довжиною  $h=1$ . Одержуємо точки  $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ .



Тоді граничні умови матимуть вигляд  $x_0=0; y_0=1$  і  $x_4=4; y_4=65$ .

Запишемо задане рівняння в скінчених різницях для внутрішніх вузлів 1,2,3.

$$2 \cdot 1^2 \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1^2} + y_1 = 13 \cdot 1^3 + 1$$

і, звівши подібні та підставивши відомі значення функції, отримаємо

$$2y_2 - 4y_1 + 2y_0 + y_1 = 14$$

$$3y_1 - 2y_2 = -12$$

Аналогічно запишемо рівняння для  $x=2$  і  $x=3$ .

$$x=2 \rightarrow 8y_1 - 15y_2 + 8y_3 = 105$$

$$x=3 \rightarrow 18y_2 - 35y_3 = -818, \text{ а при } x=4 \rightarrow y=65.$$

Маючи систему з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь можемо знайти значення функції:  $y(x)$  у вузлах  $y_0=1, y_1=2, y_2=9, y_3=28, y_4=65$ .

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №14

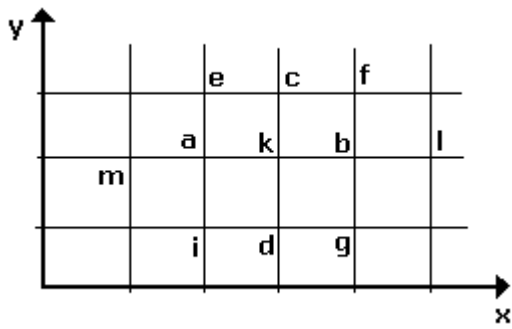
### Метод сіток

Суть методу скінчених різниць зберігається і при розв'язуванні задач для багатовимірних областей. У двовимірній області вибирають вузли, які після з'єднання їх між собою відрізками прямих, утворюють сітку. Тому метод скінчених різниць для двовимірних задач називають методом сіток.

Найчастіше застосовують сітки із прямокутними або квадратними комірками.

Запишемо вирази для похідних функції двох змінних в скінчених різницях для сітки з квадратною коміркою і кроком  $h$ .

Для вузла  $k$ :



$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_k = \frac{U_c - U_d}{2h}; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k = \frac{U_b - U_a}{2h};$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_k = \frac{U_c - 2U_k + U_d}{h^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_k = \frac{U_b - 2U_k + U_a}{h^2}.$$

**Рисунок 7**

Вираз для змішаної похідної матиме вигляд:

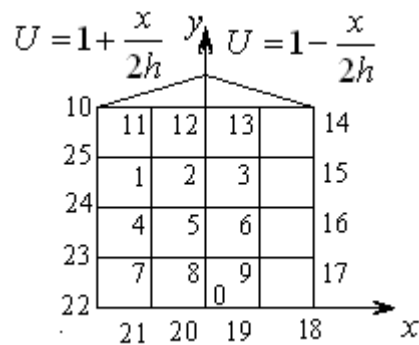
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_k = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_a}{2h} = \frac{U_f - U_g - U_e + U_i}{4h^2}$$

Застосуємо цей метод до розв'язування рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_b - 2u_k + u_a}{h^2} + \frac{u_c - 2u_k + u_d}{h^2} = \frac{u_b + u_a + u_c + u_d - 4u_k}{h^2}.$$

Таким чином рівняння Лапласа у формі методу сіток набуває виду:

$$u_b + u_a + u_c + u_d - 4u_k = 0$$



**Рисунок 8**

Визначимо функцію  $u(x, y)$ , яка задовольняє рівняння Лапласа в квадраті  $(-2h \leq x \leq 2h; 0 \leq y \leq 4h)$  і умовам на межі

$$x = \pm 2h : u = 0;$$

$$y = 0 : u = 0;$$

$$y = 4h; -2h \leq x \leq 0 : u = 1 + \frac{x}{2h};$$

$$y = 4h; 0 \leq x \leq 2h : u = 1 - \frac{x}{2h}$$

Система рівнянь Лапласа для внутрішніх вузлів 1-9 (див. рис.8) запишеться у вигляді:

$$u_2 + u_{25} + u_{11} + u_4 - 4u_1 = 0;$$

$$u_3 + u_1 + u_{12} + u_5 - 4u_2 = 0;$$

$$u_{15} + u_2 + u_{13} + u_6 - 4u_3 = 0;$$

$$u_5 + u_{24} + u_1 + u_7 - 4u_4 = 0;$$

$$u_6 + u_4 + u_2 + u_8 - 4u_5 = 0;$$

$$u_{16} + u_5 + u_3 + u_9 - 4u_7 = 0;$$

$$u_9 + u_7 + u_5 + u_{20} - 4u_8 = 0;$$

$$u_{17} + u_8 + u_6 + u_{19} - 4u_9 = 0.$$

Підставимо в рівняння цієї системи значення функції у вузлах на межі, задані умовами:

$$u_{11} = u_{13} = 0,5; u_{12} = 1; u_{15} = u_{16} = u_{17} = u_{19} = u_{20} = u_{21} = u_{23} = u_{24} = u_{25} = 0.$$

Врахуємо також, що в силу симетричності відносно осі Оу справедливі рівності  $u_3 = u_1; u_6 = u_4; u_9 = u_7$  і рівняння, записані для вузлів 3, 6, 9, виражають співвідношення, які повністю співпадають із співвідношеннями для вузлів 1, 4, 7. Тому одну з цих груп не будемо розглядати (а саме для вузлів 3, 6, 9). Остаточно отримаємо систему рівнянь

$$4u_1 - u_2 - u_4 - 0,5 = 0;$$

$$2u_1 - 4u_2 + u_5 + 1 = 0;$$

$$u_1 - 4u_4 + u_5 + u_7 = 0;$$

$$u_2 + 2u_4 - 4u_5 + u_8 = 0;$$

$$u_4 - 4u_7 + u_8 = 0;$$

$$u_5 + 2u_7 - 4u_8 = 0.$$

Розв'язком системи є значення  $u_1 = 0,26340; u_2 = 0,42855; u_4 = 0,12501; u_5 = 0,1875; u_7 = 0,04911; u_8 = 0,07144.$



Отриманий розв'язок може моделювати характер розподілу температури у вибраних точках пластинки, на межі якої розподіл температури виражений граничними умовами.

### **Завдання**

Застосувати метод сіток до відомих рівнянь в частинних похідних. Пояснити отримані результати. Моделями яких явищ в біотехніці є вказані рівняння.

**Тестові завдання з дисципліни „Математичне та комп’ютерне моделювання медтехніки”**

<b>1 ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ МЕДТЕХНІКИ</b>		
1	Які основні види моделювання	а) повне, неповне, часткове
		б) фізичне, математичне, аналогове
		в) структурне, цифрове, графічне
2	Що Ви розумієте під фізичною моделлю	а) Модель, в якій змінюються тільки фізичні параметри
		б) модель, що описує рух фізичних тіл
		в) модель, яка зберігає природу явища, але в інших кількісних співвідношеннях
3	Що Ви розумієте під аналоговою моделлю	а) модель, що описує структуру системи, в яку входять аналогові пристрої
		б) модель, яка використовує аналогію між величинами, що описуються однаковими виразами в різних явищах
		в) модель відповідного аналогового пристрою
<b>ВРАХУВАННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ БОООБ’ЄКТІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ МЕДТЕХНІКИ</b>		
4	Нехай порогове енергетичне співвідношення для нервової тканини має вигляд $E_n = \int_0^{\tau} \frac{(V - V_n)^2}{R} dt$ Отримайте вираз для постійної збуджуючої напруги $E_n$	а) $E_n = \frac{(V - V_n)^2}{R}$
		б) $E_n = \frac{(V - V_n)^2}{R} \tau$
		в) $E_n = \frac{(V - V_n)}{R}$
5.	Для опису залежності тривалості життя піддослідних тварин від дози канцерогену використано залежність $T^n d = C,$ де $T$ – математичне сподівання середньої тривалості життя 50% експериментальних тварин; $d$ – величина дози канцерогену; $n, C$ – константи. Як змінюватиметься $T$ при $d \rightarrow \infty$	а) $T \rightarrow \infty$
		б) $T \rightarrow 0$
		в) $T \rightarrow \ln C$

6.	<p>Для опису залежності тривалості життя піддослідних тварин від дози канцерогену використано залежність</p> $T^n d = C,$ <p>де <math>T</math> – математичне сподівання середньої тривалості життя 50% експериментальних тварин;  <math>d</math> – величина дози канцерогену;  <math>n, C</math> – константи.  Як змінюватиметься <math>T</math> при <math>d \rightarrow 0</math></p>	a) $T \rightarrow \infty$
		б) $T \rightarrow 0$
		в) $T \rightarrow \ln C$
7.	<p>Математична модель проходження струму малої тривалості через нервову тканину має вигляд</p> $m \frac{\partial c}{\partial t} = vi$ <p>де <math>m</math> – кількість речовини, що переноситься струмом;  <math>i</math> – сила струму;  <math>v</math> – деяка стала; <math>c</math> – концентрація іонів;  <math>t</math> – час;</p> <p>(у рівнянні беремо <math>\frac{\partial}{\partial t}</math>, а не <math>\frac{d}{dt}</math>, оскільки концентрація <math>c</math> залежить ще і від товщини нервової тканини <math>x</math>).  Розв'язавши диференціальне рівняння, отримати вираз, що описує концентрацію іонів <math>c</math> всередині нервової тканини.</p>	a) $c = c_0 - \frac{vi}{m}t$
		б) $c = \frac{vi}{m}t$
		в) $c = c_0 + \frac{vi}{m}t^2$

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ДЕТЕРМІНОВАНИХ МОДЕЛЕЙ МЕДТЕХНІКИ		
8	Для чого у біотехніці можна використовувати моделі у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь	а) Для опису процесів у коливальному контурі
		б) Для розробки і дослідження електричних схем
		в) Для розробки структури біотехнічної системи
9.	Які методи призначені для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	а) Гауса, Зейделя
		б) золотого перерізу, січних
		в) Коші, Даламбера
10	Які методи призначені для отримання точного розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь	а) Зейделя, простих ітерацій
		б) Коші, Даламбера
		в) Гауса, Жордана-Гауса
11	Які методи призначені для отримання наближеного розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь	а) Зейделя, простих ітерацій
		б) Коші, Даламбера
		в) Гауса, Жордана-Гауса
12	Який з цих виразів визначає умову збіжності ітераційного процесу.	а) $ a  = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n  a_{ij}  \geq 1$
		б) $ a  = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n  a_{ij} ^2 \leq 1$
		в) $ a  = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n  a_{ij} ^2} < 1$
13.	Яке з цих рівнянь є трансцендентним	а) $y = ax^3 + \sqrt{x}$
		б) $y = ax^2 + bx + c$
		в) $y = \lg x + \sin^2 x$
14.	Який з цих методів призначений для розв'язування трансцендентних рівнянь	а) Метод золотого перерізу
		б) Метод простих ітерацій
		в) Метод Фібоначчі
15.	Який з цих методів призначений для мінімізації функцій	а) Метод Лагранжа
		б) Метод золотого перерізу
		в) Метод половинного ділення

16.	Побудувати математичну модель для експериментальних даних методом найменших квадратів $x = \{0; 2; 6; 8\}$ $y = \{1; 2; 4; 1\}$	а) $y = 0,1x - 1,6$
		б) $y = 0,1x + 1,6$
		в) $y = 0,1x + 16$
17.	Який інтерполяційний поліном не можна застосовувати, якщо вузли інтерполяції не рівновіддалені	а) Канонічний
		б) Сплайни
		в) Ньютона
18.	Який інтерполяційний поліном забезпечує гладкість апроксимуючої кривої	а) Канонічний
		б) Сплайни
		в) Ньютона
19.	Побудувати математичну модель у вигляді полінома Лагранжа для експериментальних даних $x = \{1; 3; 4\}$ $y = \{3; 5; 7\}$	а) $L = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{6}x + 5$
		б) $L = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 3$
		в) $L = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{6}x + 3$
20.	Знайти значення функції $x = \{1; 3; 4\}$ $y = \{3; 5; 7\}$ в точці $x=2$ між вузлами за допомогою полінома Лагранжа	а) 11,67
		б) 9,81
		в) -12,36
21	Який з цих виразів застосовують для обчислення коефіцієнтів розкладу непарних функцій в ряд Фур'є	а) $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$
		б) $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$
		в) $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \sin nx dx$
22	Обчисліть коефіцієнт $a_0$ розкладу функції в ряд Фур'є	а) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$
		б) $-\frac{3}{\pi n^2} [1 - (-1)^n]$

	$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$	в) $\frac{3}{4}\pi$
23	Обчисліть коефіцієнт $an$ розкладу функції в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$	а) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$
		б) $-\frac{3}{\pi n^2} [1 - (-1)^n]$
		в) $\frac{3}{4}\pi$
24	Обчисліть коефіцієнт $bn$ розкладу функції в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$	а) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$
		б) $-\frac{3}{\pi n^2} [1 - (-1)^n]$
		в) $\frac{3}{4}\pi$
25	Який з цих виразів призначено для обчислення інтегралу методом прямокутників	а) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \sum_0^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right)$
		б) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$
		в) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$
26	Який з цих виразів призначено для обчислення інтегралу методом трапецій	а) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \sum_0^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right)$
		б) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$
		в) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$
27	Який з цих виразів призначено для обчислення інтегралу методом	а) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \sum_0^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right)$

	Сімпсона	$\text{б) } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$
		$\text{в) } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$
<b>МЕТОДИ ПОБУДОВИ ВИПАДКОВИХ МОДЕЛЕЙ МЕДТЕХНІКИ</b>		
28	Як ієрархічно за обсягом (та яке має ширший зміст) розмістити такі поняття : (1) періодично-корельований процес, (2) періодичний процес, (3) майже періодичний процес	а) 1, 2, 3
		б) 2, 3, 1
		в) 3, 1, 2
29	Випадковий процес є періодично корельованим процесом, якщо	його математичне сподівання та дисперсія є періодичними
		б) його математичне сподівання та кореляційна функція є періодичними
		всі його імовірнісні характеристики є періодичними
30	Фільтровий метод аналізу ПКВП ґрунтується на	виділенні вирізок із гармонічного зображення ПКВП фільтрами, смуги пропускання яких не перевищують базової частоти.
		виділенні стаціонарних вирізок із гармонічного зображення ПКВП фільтрами, смуги пропускання яких перевищують базову частоту
		в) виділенні стаціонарних вирізок із гармонічного зображення ПКВП фільтрами, смуги пропускання яких не перевищують базової частоти $\Lambda = \frac{2\pi}{T}$

31	Когерентний метод аналізу ПКВП ґрунтується на	формування послідовностей нестационарного випадкового процесу відліками, взятими через період корельованості сигналу
		формування послідовностей стаціонарного випадкового процесу, модель якого ПКВП, відліками, взятими через період корельованості сигналу
		в) формування стаціонарних послідовностей нестационарного випадкового процесу, модель якого ПКВП, відліками, взятими через період корельованості сигналу
32	Випадковий процес називають стаціонарним в широкому сенсі, якщо:	будь-яка його n-вимірна густина імовірності інваріантна відносно часового зсуву
		б) статистичні характеристики якого не залежать від часу
		всі характеристики якого мають постійні значення
33	Випадковий процес називають стаціонарним у вузькому сенсі, якщо	а) будь-яка його n-вимірна густина імовірності інваріантна відносно часового зсуву
		статистичні характеристики якого не залежать від часу
		всі характеристики якого мають постійні значення
<b>ОГЛЯД ЗАГАЛЬНИХ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ КВАНТОВО-МЕХАНІЧНИХ МОДЕЛЕЙ</b>		
34	Який з цих виразів описує стан електрона в потенціальній ямі	а) $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$
		б) $\Psi_n(x) = \sin^2 \frac{\pi n}{l} x$
		в) $\Psi_n(x) = \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{\pi n}{l} x dx$
35	Що описує хвильова функція	а) рух квантово-механічної системи
		б) умову перебування квантово-механічної системи в околі точки з координатами $q$
		в) стан квантово-механічної системи



36	Яких значень може набувати вираз $ \Psi(q) ^2 dq$	>1
		б) $\leq 1$
		>2
37	Що описує рівняння Шредінгера	а) рух квантово-механічної системи
		б) умову перебування квантово-механічної системи в околі точки з координатами $q$
		в) стан квантово-механічної системи
38	Чи існує взаємозв'язок між рівнянням Шредінгера і хвильовою функцією.	а) не існує
		б) існує, але тільки за певних умов
		в) хвильова функція є розв'язком рівняння Шредінгера
39	Хвильова функція має вигляд $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ . Використовуючи граничні умови $\psi(0) = 0$ ; $\psi(l) = 0$ , визначити коефіцієнт $C_2$ .	$C=1$
		$C=0$
		$C=1/2$
40	Хвильова функція має вигляд $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ . Використовуючи граничні умови $\psi(0) = 0$ ; $\psi(l) = 0$ , визначити можливі значення хвильового вектора $k$ , при яких існують ненульові розв'язки.	а) $k = \pi n / l$
		$k=0$
		$k = 2\pi n / l$
<b>МОДЕЛЮВАННЯ БІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ</b>		
41	Як називають задачу (пов'язану із розробкою біотехнічної системи), для якої невідомою є величина на виході системи	синтез
		б) аналіз
		вимірювання
42	Як називають задачу (пов'язану із розробкою біотехнічної системи), для якої невідомою є структура системи	а) синтез
		аналіз
		вимірювання

43	Як називають задачу (пов'язану із розробкою біотехнічної системи), для якої невідомою є величина на вході системи	синтез
		аналіз
		в) вимірювання
44	Що розуміють під неформальним описом системи	а) всю сукупність відомостей про систему, що є достатнім для встановлення передбачуваного або фактичного алгоритму її роботи
		всю сукупність відомостей про дані, які оброблятиме система.
		всю сукупність відомостей про систему.
45	Що розуміють під параметрами системи	а) постійні або змінні в часі величини, що характеризують стан системи у даний момент часу, задають її властивості та характеристики
		фазові змінні, що утворюють вектор вхідних впливів
		внутрішні фазові змінні, що утворюють вектор станів системи