

О. Трохимчук; А. Сяський, докт. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет

ТИСК СИСТЕМИ ДВОХ ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ НА ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИЙ КОНТУР ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Резюме. Побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для задачі про тиск системи двох жорстких штампів з кутовими точками на частково підсилений еліптичний контур нескінченної ортотропної пластинки. Методом механічних квадратур і колокації досліджено вплив на напружений стан пластинки анізотропії її матеріалу, форми еліптичного отвору та жорсткості підсилювальних ребер.

Ключові слова: нескінченна пластинка, еліптичний отвір, штамп з кутовими точками, зона контакту, частково підсилений контур, ортотропні матеріали, напружений стан, інтегрально-диференціальні рівняння.

O. Trokhymchuk, A. Syasky

PRESSURE OF A SYSTEM OF TWO PUNCHES WITH ANGULAR POINTS ON A PARTLY STRONGER CONTOUR OF AN ELLIPTICAL HOLE OF AN ORTHOTROPIC PLATE

The summary. The system of singular integral differential equations with Gilbert kernels and logarithmic kernels in problems of pressure of a system of two stiff punches with angular points on a partly stronger contour of elliptical hole in an infinite orthotropic plate is built. It is exploring an influence of anisotropy of the plate's material, the hole's shape and the booster rib's stiffness on the plate's strained state by the method of mechanical quadrature and collocation.

Key words: an infinite orthotropic plate, a elliptical hole, a punch with angular points, an interface's size, a partly stronger contour, a orthotropic materials, strained state, integral differential equations.

Проблема контактної взаємодії пластинчастих тіл, послаблених гладкими циліндричними порожнинами (отворами), і абсолютно жорстких ребристих штампів особливо актуальна у зв'язку з використанням в інженерній практиці сучасних композиційних матеріалів.

Задачі про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на контур колового і еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки розглянуто в [1,2], де встановлено, що за межами зони контакту пластинки і штампів на контурі отвору виникає висока концентрація кільцевих напружень. Для її зменшення окремі ділянки контуру підсилюють тонкими пружними ребрами змінної жорсткості [3].

Запропоновано розв'язок мішаної контактної задачі про тиск системи двох штампів з кутовими точками на частково підсилений (за межами зон контакту) контур еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки. Аналогічні задачі для ізотропної пластинки з криволінійним отвором та ортотропної пластинки з еліптичним отвором і одного штампа з кутовими точками розглянуто в [4,5].

1. Постановка задачі. Система інтегрально-диференціальних рівнянь. Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат у середній площині пластинки оберемо таким чином, щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь з віссю абсцис (рис.1). Припустимо, що головні напрямки ортотропії матеріалу пластинки співпадають з напрямками координатних осей.

В отвір пластинки вставлено два симетричні абсолютно жорсткі штампи з кутовими точками такої ж кривини, як і контур отвору Γ . Вважаємо, що на ділянках

$[-\alpha_0^*; \alpha_0^*] \cup [\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ (α_0^* , β_0^* – полярні кути) здійснюється гладкий контакт між пластинкою та штампами. Він забезпечується силами P_0 , які прикладено до кожного

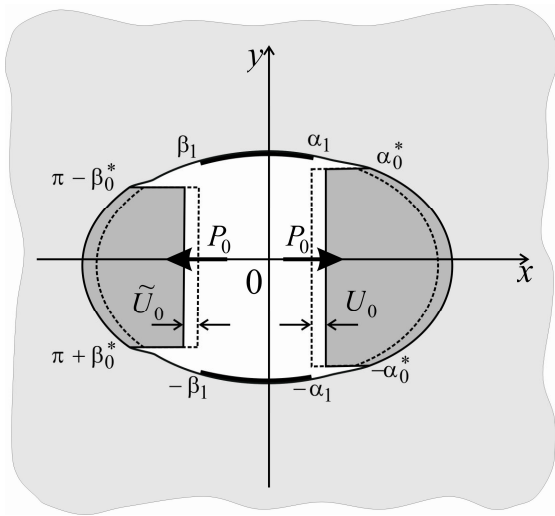


Рисунок 1 – Розрахункова схема пластинки

штампа вздовж осі симетрії отвору. Зовнішнього навантаження на пластинку немає.

За межами зон контакту дві симетричні ділянки контуру $[\alpha_1^*; \beta_1^*]$ та $[-\beta_1^*; -\alpha_1^*]$ підсилено тонкими ребрами, які будемо моделювати пружними лініями змінної жорсткості на розтяг (стиск) [3,4].

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних нормальних T_ρ і дотичних $S_{\rho\lambda}$ зусиль під штампами та на ділянках підсилення, а також кільцевих зусиль T_λ на контурі отвору.

Конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площа пластинки, здійснюється за допомогою раціональної функції [6]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right), \quad (1)$$

де $R_0 = \frac{a+b}{2}$ – характерний розмір отвору (вважаємо, що $R_0 = 1$); ε – ексцентриситет еліпса; (ρ, λ) – полярні координати точок у площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$.

Якщо немає сил тертя, граничні умови в зонах контакту пластинки і штампів, згідно з [1,2], мають вигляд

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = U_0^0; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0], \quad (2)$$

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = -\tilde{U}_0; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0].$$

Тут

$$a(\lambda) = (1 - \varepsilon) \cdot \cos \lambda; \quad b(\lambda) = (1 + \varepsilon) \cdot \sin \lambda;$$

$[-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ – образи ділянок $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*] \cup [\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ при відображенні (1); U, V – компоненти вектора зміщення контурних точок; U_0^0, \tilde{U}_0 – поступальні горизонтальні зміщення штампів.

На ділянках підсилення граничні умови запишемо у вигляді [3-5]

$$T_\rho = \frac{E_0 F(s)}{\tilde{\rho}} \varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_\rho}{\partial \lambda} + \frac{6\beta(\lambda)(K(\lambda) + 2\alpha(\lambda))T_\rho}{\Omega^2(\lambda)}, \quad (3)$$

$$\lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1],$$

де $\sigma = e^{i\lambda}$; $\omega'(\sigma) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda)$; $K(\lambda) = |\omega'(\sigma)|^2 = \alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)$; $\alpha(\lambda) = 1 - \varepsilon \cdot \cos(2\lambda)$; $\beta(\lambda) = \varepsilon \cdot \sin(2\lambda)$; $\Omega(\lambda) = -K(\lambda) + 2\alpha(\lambda)$; E_x, E_y – модулі Юнга матеріалу пластинки в напрямках осей Ox, Oy відповідно; $\tilde{\rho}$ – радіус кривини контуру Γ ; $E_0 F(s)$ – змінна жорсткість підсилення на розтяг (стиск); $F(s) = 2h_0 b_0(s)$; $b_0(s)$ – змінна ширина ребра,

$2h_0$ – його товщина; s – дуга на контурі отвору; $[\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]$ – образи ділянок $[\alpha_1^*; \beta_1^*] \cup [-\beta_1^*; -\alpha_1^*]$ при відображенні (1).

Відносно осову пружну деформацію ε_λ контуру Γ відповідно до [3] визначимо за формулою

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda = \frac{1}{2E_x h K(\lambda)} & \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) K(\lambda) T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(R(\lambda, \bar{t}) + R(\lambda, -\bar{t}) + Q(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - \bar{t}}{2} + Q(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(Q(\lambda, \bar{t}) - Q(\lambda, -\bar{t}) - R(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - \bar{t}}{2} + R(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left(R(\lambda, \tilde{t} + \pi) - Q(\lambda, \tilde{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут введено позначення

$$T_\rho(\lambda) = \begin{cases} T_\rho^0(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{T}_\rho(\lambda), & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ \bar{T}_\rho(\lambda), & \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0(\lambda) = 0, & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda), & \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]; \end{cases} \quad (5)$$

$$R(\lambda, t) = [\alpha(\lambda)\alpha(t)c_2 + \beta(\lambda)\beta(t)c_4 - (\beta(\lambda)\alpha(t) + \alpha(\lambda)\beta(t))c_3];$$

$$Q(\lambda, t) = [-\alpha(\lambda)\beta(t)c_2 + \beta(\lambda)\alpha(t)c_4 + (\beta(\lambda)\beta(t) - \alpha(\lambda)\alpha(t))c_3];$$

$t = t, t \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad t = \tilde{t} + \pi, t \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \tilde{t} \in [-\beta_0; \beta_0]; \quad t = \bar{t}, \bar{t} \in [\alpha_1; \beta_1]; e^{it}$ – точка на γ ; β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [5]; ν_x – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямку осі Ox . Позначення для c_2, c_3, c_4 наведено в [6].

Проекції вектора зміщення контурних точок на координатні осі при заданому навантаженні можна записати у вигляді [1,2]

$$\begin{aligned} U|_\Gamma = \frac{1}{2E_x h} & \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_0^\lambda f_1'(t) dt + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\ & + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \\ & \left. + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_1 \right]; \quad (6) \\ V|_\Gamma = \frac{1}{2E_x h} & \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_0^\lambda f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \right. \\ & - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_1'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_1'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \\ & \left. - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right], \quad \lambda \in [-\pi; \pi]. \end{aligned}$$

У співвідношеннях (6) використано залежності $\bar{f}'_1(-t) = -\bar{f}'_1(t)$; $\bar{f}'_2(-t) = \bar{f}'_2(t)$ і введено позначення

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds; \quad e^{i\theta} = e^{i\lambda} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; \quad ds = \tilde{\rho} d\theta = |\omega'(\sigma)| d\lambda; \quad f'_j(\lambda) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda \notin [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \quad f'_j(\lambda) = f'_j(\lambda), \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0];$$

$$f'_j(\lambda) = \tilde{f}'_j(\lambda), \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \quad f'_j(\lambda) = \bar{f}'_j(\lambda), \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1], \quad j = 1, 2;$$

$$\lambda = \tilde{\lambda}, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad \lambda = \tilde{\lambda} + \pi, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]; \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} \in [\alpha_1; \beta_1]; \quad ds$$

– елемент дуги; θ – кут між нормаллю до контуру Γ і віссю Ox ; $\tilde{\rho}$ – радіус кривини контуру Γ ; C_1 – стала, яка визначає зміщення контуру Γ як жорсткого цілого.

Величини f'_j , \tilde{f}'_j , \bar{f}'_j з контактними зусиллями T_ρ^0 , $S_{\rho\lambda}^0$, \tilde{T}_ρ , $\tilde{S}_{\rho\lambda}$, \bar{T}_ρ , $\bar{S}_{\rho\lambda}$ пов'язані залежностями

$$f'_1(\lambda) = b(\lambda)T_\rho^0(\lambda) + a(\lambda)S_{\rho\lambda}^0(\lambda); \quad f'_2(\lambda) = a(\lambda)T_\rho^0(\lambda) - b(\lambda)S_{\rho\lambda}^0(\lambda), \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad (8)$$

$$\tilde{f}'_1(\lambda) = b(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda) + a(\lambda)\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda); \quad \tilde{f}'_2(\lambda) = a(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda) - b(\lambda)\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda), \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0];$$

$$\bar{f}'_1(\lambda) = b(\lambda)\bar{T}_\rho(\lambda) + a(\lambda)\bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda); \quad \bar{f}'_2(\lambda) = a(\lambda)\bar{T}_\rho(\lambda) - b(\lambda)\bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda), \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1].$$

Підставивши співвідношення (4) – (8) у граничні умови (2), (3), одержимо систему інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення зусиль T_ρ^0 , \tilde{T}_ρ , \bar{T}_ρ , $\bar{S}_{\rho\lambda}$ у зонах контакту та на ділянках підсилення

$$\left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_0^\lambda f'_1(t) dt + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_0^\lambda f'_2(t) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] = C^0;$$

$$f'_1(\lambda) = b(\lambda)T_\rho^0(\lambda); \quad f'_2(\lambda) = a(\lambda)T_\rho^0(\lambda), \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0];$$

$$\left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_0^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} \right| dt + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_0^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) d\tilde{t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} \right| dt - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] = \tilde{C};$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_1(\lambda) &= b(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda); \quad \tilde{f}'_2(\lambda) = a(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda), \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0], \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ \bar{T}_\rho(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda)}{K^2(\lambda)} \cdot \frac{E_0 F(s)}{2E_x h} &\left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) K(\lambda) T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right. \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(R(\lambda, \bar{t}) + R(\lambda, -\bar{t}) + Q(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - \bar{t}}{2} + Q(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(Q(\lambda, \bar{t}) - Q(\lambda, -\bar{t}) - R(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - \bar{t}}{2} + R(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \\ &\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left(R(\lambda, \tilde{t} + \pi) - Q(\lambda, \tilde{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] = 0; \\ \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial \bar{T}_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{6\beta(\lambda)(K(\lambda) + 2\alpha(\lambda))\bar{T}_\rho(\lambda)}{\Omega^2(\lambda)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\bar{f}'_1(\lambda) = b(\lambda)\bar{T}_\rho(\lambda) + a(\lambda)\bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda); \quad \bar{f}'_2(\lambda) = a(\lambda)\bar{T}_\rho(\lambda) - b(\lambda)\bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda), \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1],$$

де $C^0 = 2EhU_0^0 - C_1$; $\tilde{C} = -2Eh\tilde{U}_0 - C_1$.

Крім системи (9), мають виконуватися умови рівноваги кожного із штампів та підсилень як жорстких цілих [1-3], які можна перетворити до вигляду

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) dt = -P_0; \quad \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(t) dt = P_0; \quad \bar{T}_\rho(\alpha_1) = \bar{T}_\rho(\beta_1) = 0; \quad \bar{T}_\rho(\alpha_1) = \bar{T}_\rho(\beta_1) = 0. \quad (10)$$

Ці умови служать для визначення сталих C^0 , \tilde{C} та встановлення структури нормальних зусиль на торцях зон підсилення.

Якщо величини T_ρ^0 , \tilde{T}_ρ , \bar{T}_ρ , $\bar{S}_{\rho\lambda}$ стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ на контурі отвору визначаємо за формулою [3,5], яку можна записати у вигляді

$$T_\lambda = -T_\rho - \frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} [B_1(\lambda)R_1 + B_2(\lambda)R_2] - \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} [B_3(\lambda)R_3^* + B_4(\lambda)R_4^*]. \quad (11)$$

Позначення для $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$, $B_3(\lambda)$, $B_4(\lambda)$, R_1 , R_2 , R_3^* , R_4^* , Δ_1 , Δ_2 наведено в [5].

Співвідношення (9) – (11) визначають математичну модель контактної задачі для системи двох жорстких штампів з кутовими точками та ортотропної пластинки з частково підсиленням еліптичним отвором.

Розглянемо окремі випадки досліджуваної задачі:

- при $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $E_x/E_y = 1$ із (9) – (11) одержуємо відповідну систему рівнянь для ізотропної пластинки з еліптичним отвором;
- якщо $E_0 = 0$ (немає пружного підсилення), то одержана система визначає розв'язок задачі про силову контактну взаємодію двох центральносиметричних штампів з кутовими точками і контуру вільного еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки;
- підставивши в (9) – (11) $\varepsilon = 0$, знаходимо розв'язок задачі для колового отвору;
- при $\alpha_0 \rightarrow 0$ або $\beta_0 \rightarrow 0$ штамп з кутовими точками вироджується у клиноподібний і спричиняє на контур таку ж дію, як і зосереджена сила P_0 . У випадку $\alpha_0 \rightarrow 0$, $\beta_0 \rightarrow 0$ система (9) – (11) визначає розв'язок задачі про тиск системи двох

протилежних зосереджених сил (клиноподібних штампів) на контур частково підсиленого еліптичного отвору в ортотропній пластинці.

2. Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (9), (10) знайти не вдається. Для наближеного її розв'язку будемо використовувати числові методи. Оскільки характеристичні частини системи (9), (10) співпадають з відповідними характеристичними частинами систем, які визначають розв'язок контактної задачі без підсилення [1] і задачі про часткове підсилення контуру отвору [3], то наближений розв'язок задачі можна реалізувати модифікованим методом Мультиппа-Каландія [4,5].

Для прикладу досліджено напружений стан на контурі еліптичного отвору ($N = 2, \varepsilon = \pm 0.2$) ортотропної пластинки залежно від анізотропії матеріалу і відносної жорсткості підсилювальних ребер змінної жорсткості із згладженими торцями при таких фізико-геометричних параметрах задачі: $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/4$; $\alpha_1 = \pi/4$; $\beta_1 = 3\pi/4$; $h_0/h = 1$; $b_0/\rho_0 = 0.05$. Ширину підсилювального ребра вибирали у вигляді

$$b_0(\lambda) = \frac{b_0}{2} \begin{cases} 2, & \text{при } \lambda \in [\alpha'_1; \beta'_1]; \\ 1 + \sin \pi \left[\left(\lambda - \frac{\alpha'_1 + \alpha_1}{2} \right) / (\alpha'_1 - \alpha_1) \right], & \text{при } \lambda \in [\alpha_1; \alpha'_1]; \\ 1 + \sin \pi \left[\left(\lambda - \frac{\beta'_1 + \beta_1}{2} \right) / (\beta'_1 - \beta_1) \right], & \text{при } \lambda \in [\beta'_1; \beta_1], \end{cases} \quad (12)$$

де $[\alpha_1; \alpha'_1]$ і $[\beta'_1; \beta_1]$ – ділянки змінної ширини підсилення ($\beta'_1 = 2\pi/3$; $\alpha'_1 = \pi/3$).

На рис.2,3 зображено епюри розподілу контактних зусиль $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ під штампами та на ділянках підсилення і кільцевих зусиль T_λ на контурі отвору. У круглих дужках біля кожного із компонентів напруженого стану вказано значення відносної жорсткості $E_0/\sqrt{E_x E_y}$ підсилювальних ребер.

Характеристики ортотропних матеріалів, для яких проводили дослідження та лінії, які відповідають цим матеріалам на рисунках, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Характеристики досліджуваних матеріалів та відповідні їм на рисунках лінії

матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	E_x/E_y	лінії
ізотропний матеріал	1	1	0.300	1	суцільні
графіт-епоксид	6.9992	0.7144	0.250	25	пунктирні
епоксид-графіт	0.1430	1.4010	0.010	1/25	штрихові

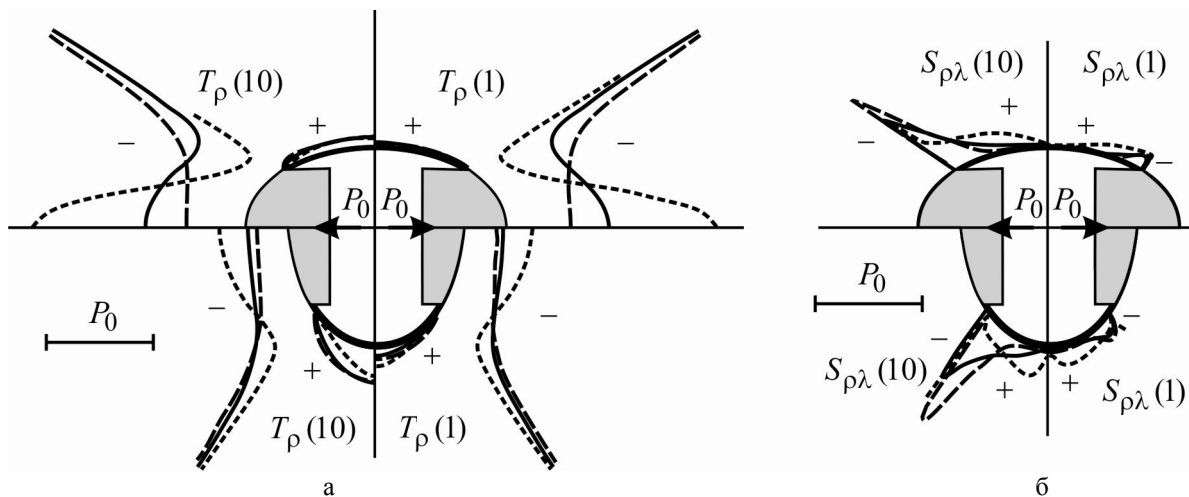


Рисунок 2 – Розподіл нормальних T_ρ (а) та дотичних $S_{\rho\lambda}$ (б) зусиль на контурі отвору

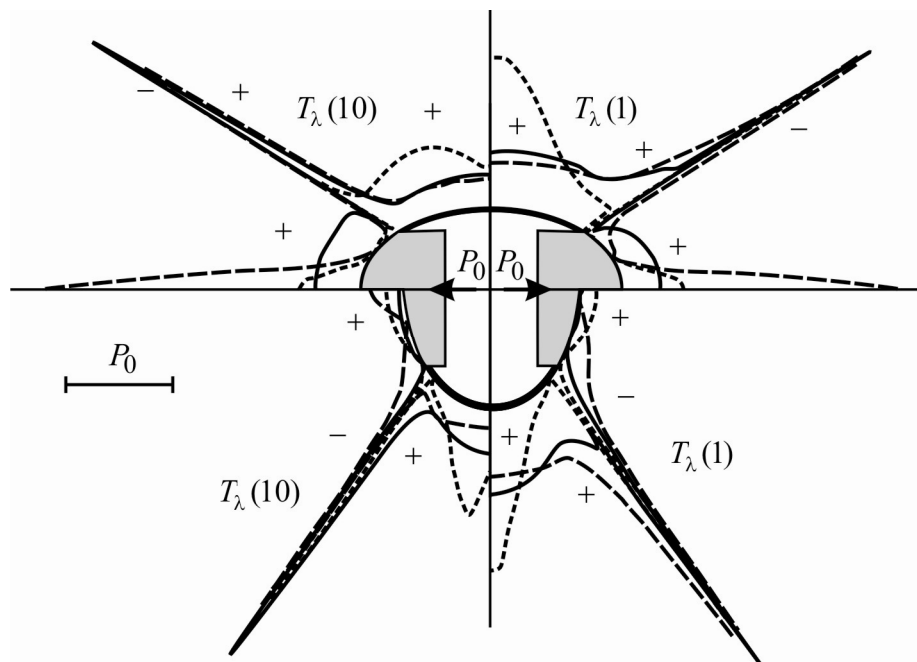


Рисунок 3 – Розподіл кільцевих зусиль T_λ на контурі отвору

Проаналізувавши результати числового експерименту, можна зробити такі **ВИСНОВКИ.**

У випадку, коли зона контакту має найбільшу кривину, а зона підсилення – найменшу, ортотропія матеріалу суттєво впливає на розподіл напружень по контуру отвору. Так, при збільшенні E_x/E_y нормальні зусилля у центрі зони контакту збільшуються, а кільцеві зусилля – зменшуються. У центрі зони підсилення кільцеві зусилля зменшуються при збільшенні E_x/E_y та відносної жорсткості підсилення. Контактні зусилля у зоні підсилення зростають при збільшенні відносної жорсткості, однак їх вклад до сумарних напружень незначний.

Якщо зона контакту має найменшу кривину, а зона підсилення – найбільшу, то відбувається значне зменшення компонент напруженого стану. При цьому вплив ортотропії і жорсткості підсилення проявляється менше.

Література

1. Сяський А.О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір в ортотропній пластинці / А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – Рівне, 1997. – Випуск 4. – С. 153 – 156.
2. Сяський А.О. Контактна взаємодія двозв'язного жорсткого штампа з кутовими точками і кругового отвору в ортотропній пластинці / А.О. Сяський, В.А. Сяський // Фізика конденсованих високомолекулярних систем: Наукові записки Рівненського державного педагогічного інституту. – Рівне, 1998. – Вип. 4. – С. 99 – 101.
3. Сяський А. Контактна взаємодія розіМКнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2004. – Т. 9, № 3. – С. 17 – 24.
4. Трохимчук О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2009. – Т. 14, № 2. – С. 30 – 36.
5. Трохимчук О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений контур еліптичного отвору в нескінченній ортотропній пластинці / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2009. – Т. 14, № 3. – С. 12 – 18.
6. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки / Лехницький С.Г. – М.:Гостехиздат, 1957. – 464 с.