Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / Ловейкін В.С., Ловейкін А.В., Ромасевич Ю.О. // Вісник ТДТУ. — 2010. — Том 15. — № 1. — С. 7-13. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 62-50

В. Ловейкін[1], докт. техн. наук; А. Ловейкін[2], канд. фіз.-мат. наук; Ю. Ромасевич[1]

[1]Національний університет біоресурсів і природокористування України
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРЯМИМ ВАРІАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Резюме. *Наведено методику розв'язку оптимізаційних задач руху механічних систем за допомогою прямого варіаційного методу. За допомогою запропонованого методу розв'язано задачу мінімізації квадрата динамічної складової приводного зусилля механічної системи, наведеною одномасовою моделлю. Подано графіки кінематичних функцій руху системи. Досліджено характер зміни величини функціонала (оптимізаційного критерію) при збільшенні кількості крайових умов, які ставлять для його мінімізації.*

Ключові слова: *оптимальні режими руху, прямі варіаційні методи.*

V. Loveikin, A. Loveikin, Y. Romasevich

OPTIMIZATION CONNECTING MODE MOVING THE MECHANICAL SYSTEMS BY DIRECT VARIATION METHOD

The summary. *The technique of the decision of optimizing problems of movement of mechanical systems by means of a direct variation method is resulted. By means of the offered method the problem of minimization of a square of a dynamic component of effort of a drive of the mechanical system presented by one-mass model is solved. Schedules of kinematic functions of movement of system are resulted. Character of change of size функционала (optimizing criterion) is investigated at increase in quantity of regional conditions which are put for its minimization.*

Key words: *optimum modes of movement, direct variation methods.*

Постановка проблеми

Проблеми оптимального керування рухом різних механізмів та машин (механічних систем) досить актуальні. Це зумовлено насамперед вимогами до якості та економічності процесів у сучасному виробництві. Розв'язання конкретних задач оптимізації режимів руху механічних систем дозволить більш економно та якісно керувати їхніми функціональними рухами. Крім того, оптимальні режими руху механічних систем зумовлюють підвищення надійнісних показників роботи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Для оптимізації режимів руху механічних систем використовують різні теорії оптимального керування: варіаційне числення [1], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [2], динамічне програмування [3]. Той чи інший метод використовується для оптимізації режимів руху системи за різними критеріями. Так, принципом максимуму послуговуються для отримання функції керування, яка переводить систему у новий стан за найкоротший час, при врахуванні обмежень на керування. Це задача оптимальної швидкодії. Вона характеризується релейним перемиканням керування (для механічних систем це приводне зусилля або прискорення), що може спричиняти значні динамічні навантаження у елементах механізмів. Досить часто для оптимізації керування використовують варіаційне числення, яке дає можливість отримати плавні керуючі функції, що дозволяє „пом'якшити" режим руху системи. Умовою мінімуму критерію оптимізації (функціонала) є рівняння Ейлера-Пуассона, яке часто описують нелінійним диференціальним рівнянням і яке важко (інколи неможливо) розв'язати аналітично. Тому для розв'язання таких оптимізаційних задач найчастіше використовують прямі варіаційні методи.

Мета і завдання дослідження

Мета наведеного дослідження – синтезувати оптимальні закони руху для одиничної маси (яка може бути у вигляді деякої механічної системи, у першому наближенні) за допомогою прямого методу розв'язку варіаційних задач. Для досягнення поставленої мети висуваємо такі завдання: викласти сутність запропонованого прямого варіаційного методу; розв'язати задачу оптимізації розгону одиничної маси за критерієм мінімізації квадрата динамічної складової приводного зусилля; проаналізувати отримані результати та вказати перспективи подальших досліджень.

Виклад основного матеріалу

Який би метод оптимізації ми не використовували, необхідно забезпечити мінімум (максимум) обраного критерію. Умовою екстремуму інтегрального критерію виду є

$$I=\int_{t_0}^{t_1} P_k(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\dots,x^{(k)}(t))dt, \tag{1}$$

де $x(t),\ \dot{x}(t),\dots,x^{(k)}(t)$ – узагальнені координати механічної системи та їхні похідні – включно до k-го порядку; t – час; t_0, t_1 – моменти часу початку та завершення руху системи, відповідно початковий та кінцевий; P_k – підінтегральний вираз відповідного критерію k-го порядку; рівняння Ейлера-Пуассона [4]

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{d^i}{dt^i}\frac{\partial P_k}{\partial x^i}=0\ , \tag{2}$$

з симетричними крайовими умовами: $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0,\dots,$ $\overset{(k-1)}{x}=\overset{(k-1)}{x}_0$ при $t=t_0$ та $x=x_1$, $\dot{x}=\dot{x}_1,\dots,$ $\overset{(k-1)}{x}=\overset{(k-1)}{x}_1$ при $t=t_1$. Тут x_0, $\dot{x}_0$, $\overset{(k-1)}{x}_0$ – початкові та x_1, $\dot{x}_1$, $\overset{(k-1)}{x}_1$ – кінцеві значення координат та їхніх похідних, включно до $(k-1)$-го порядку.

Таким чином, для розв'язання варіаційних задач необхідно розв'язати відповідне рівняння Ейлера-Пуассона при заданих крайових умовах. Для того, щоб знайти його розв'язок, необхідно задатись крайовими умовами (на початку та укінці руху системи).

Функціонал деякої варіаційної задачі можна розглядати як функцію нескінченної кількості змінних. Це твердження стає очевидним, якщо припустити, що допустимі функції можна розкласти у степеневі ряди, у ряди Фур'є або взагалі в деякі ряди виду:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varepsilon_n(t), \tag{3}$$

де $\varepsilon_n(t)$ – задані функції, a_n – коефіцієнти при функціях. Таким чином, для задання функції у вигляді ряду (3) достатньо задати значення усіх коефіцієнтів a_n, і значення функціонала (1) у цьому випадку визначаємо заданням нескінченної послідовності чисел: $a_0,\ a_1,\ a_2,\dots a_n,\dots,$ тобто функціонал є функцією нескінченної кількості змінних: $I=I(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\dots,x^{(n)}(t))=\varphi(a_0,\ a_1,\ a_2,\dots a_n,\dots).$

Отже, відмінність між варіаційними задачами і задачами на екстремум функцій скінченного числа змінних полягає у тому, що у варіаційному випадку доводиться досліджувати на екстремум функцію нескінченної кількості змінних.

У багатьох випадках виконати граничний перехід при $n\to\infty$ не вдається, тому, як правило, обмежуються невеликим числом $n=3,\ 4,\ 5,$ а іноді навіть $n=1$. Звичайно, чим більше n, тим краще значення функціонала наближається до екстремуму.

Л. Ейлер перший у своїх працях у царині варіаційного числення використовував метод, який тепер називають кінцево-різничним прямим методом. Цікаво відзначити, що саме за допомогою цього методу Л. Ейлер у 1744 році вивів знамените рівняння, яке є необхідною умовою екстремуму функціонала і яке носить його ім'я [1].

Викладемо сутність прямого варіаційного методу, який використаємо для оптимізації режиму руху системи на прикладі системи, що наведена рухом матеріальної точки вздовж горизонтальної прямої x за критерієм

$$I=\int_0^{t_1}F_{дин}^2dt=\int_0^{t_1}(m_n\ddot{x})^2\,dt\to\min, \qquad (4)$$

де $F_{дин}$ – динамічне зусилля, яке діє на механічну систему у вигляді одномасової моделі, протягом її розгону; m_n – приведена до поступального руху маса системи; t_1 – тривалість розгону системи. Крапка над символом, як завжди, означає диференціювання за часом.

Рівняння Ейлера-Пуассона для функціонала (4) має такий вигляд:

$$\overset{IV}{x}=0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) будемо розв'язувати при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0)=0, & \dot{x}(0)=0; \\ x(t_1)=s, & \dot{x}(t_1)=v. \end{cases} \qquad (6)$$

де v – усталена швидкість руху механічної системи (номінальна швидкість руху).

Розв'язок крайової задачі (5), (6) буде такий:

$$x=\frac{t^2}{t_1^3}(s(3t_1-2t)+t_1v(t-t_1)). \qquad (7)$$

Якщо розглядати s як параметр і знайти мінімум функціонала (4) за цим параметром, то отримаємо, що $s=\frac{vt_1}{2}$, при цьому умови (6) приймуть вигляд:

$$\begin{cases} x(0)=0, & \dot{x}(0)=0; \\ x(t_1)=\dfrac{vt_1}{2}, & \dot{x}(t_1)=v, \end{cases} \qquad (8)$$

а екстремаль (7) буде

$$x=\frac{vt^2}{2t_1}. \qquad (9)$$

Якщо з виразу (9) знайти другу похідну за часом (прискорення), то отримаємо

$$\ddot{x}=\frac{v}{t_1}=const\neq 0. \qquad (10)$$

З виразу (10): $\ddot{x}(0)\neq 0,\ \ddot{x}(t_1)\neq 0.$

Для поліпшення режиму руху бажано, щоб для функції $x(t)$, що входить у функціонал (4), окрім умов (8), виконувались ще умови

$$\begin{cases} \ddot{x}(0)=0; \\ \ddot{x}(t_1)=0. \end{cases} \qquad (11)$$

На жаль, глобальний мінімум функціонала (4) не задовольняє умови (11). Тому звузимо пошук мінімуму функціонала (4) на функції, які б задовольняли крайові умови (8) та (11).

Оскільки довільну диференційовану функцію можна наблизити многочленами, то будемо шукати функції, які задовольняють умови (8) та (11), у вигляді многочленів. Умови (8) та (11) мають шість умов. Тому многочлен повинен бути принаймні п'ятого степеня. Для знаходження ще й мінімуму функціонала (4) степінь многочлена має бути не нижчий шостого. Тому подамо функцію $x(t)$ у вигляді

$$x(t) = \varphi_5(t) + t^3(t_1 - t)^3 Q_n(t), \tag{12}$$

де $\varphi_5(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 + A_5 t^5$ – складова розв'язку, яка забезпечує задоволення неоднорідних крайових умов (для многочлена $t^3(t_1 - t)^3 Q_n(t)$ будуть виконуватись однорідні крайові умови); $Q_n(t)$ – многочлен *n*-го степеня, коефіцієнти якого вибираємо так, щоб на функціях виду (12) функціонал (4) мав мінімум.

Підставивши крайові умови (8) та (11) у вираз функції $\varphi_5(t)$, отримаємо: $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{v}{t_1^2}$, $A_4 = -\frac{v}{2t_1^3}$, $A_5 = 0$, звідки $\varphi_5(t) = \frac{v}{t_1^2}t^3 - \frac{v}{2t_1^3}t^4$. Функція (12) прийме такий вигляд:

$$x(t) = \frac{v}{t_1^2}t^3 - \frac{v}{2t_1^3}t^4 + t^3(t_1 - t)^3 Q_n(t). \tag{13}$$

Многочлен $Q_n(t)$ вибираємо у загальному вигляді:

$$Q_n(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_p t^p = \sum_{p=0}^{n} C_p t^p. \tag{14}$$

Знайдемо другу похідну виразу (13) за часом та підставимо її у вираз (4), тоді матимемо:

$$\begin{gathered} I = \int_0^{t_1} F_{дин}^2 dt = m_n^2 \int_0^{t_1} [\frac{v}{t_1} + t(t - t_1)(-6(5t^2 - 5tt_1 + t_1^2) \times \\ \times Q_n(t) + t(t - t_1)(6(-2t + t_1)\dot{Q}_n(t) + t(t_1 - t)\ddot{Q}_n(t)))]^2 dt. \end{gathered} \tag{15}$$

Отриманий вираз (15) фактично є функцією коефіцієнтів многочлена $Q_n(t)$, тобто функцією від (*n*+1) змінних $C_0, C_1, ..., C_n$:

$$I(x) = I(C_0, C_1, ..., C_p), \tag{16}$$

де $x(t)$ має вигляд (13).

Необхідною умовою мінімуму функції багатьох змінних є рівність нулеві її частинних похідних:

$$\frac{\partial I}{\partial C_p} = 0, \ p = 0, 1, ..., n. \tag{17}$$

Співвідношення (17) є системою рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $C_0, C_1, ..., C_p$. Система лінійна і матиме єдиний розв'язок, який і буде визначати мінімум функціонала (4) на функціях вигляду (13). Знайдені функції залежатимуть від степеня многочлена $Q_n(t)$, тобто від *n*.

Якщо при кожному *n* розв'язок позначити $x_n^*(t)$, то матимемо послідовність функцій вигляду (13), які при кожному *n* визначають мінімум функціонала (4). При $n \to \infty$, мабуть, $x_n^*(t) \to x^*(t)$, де x^* визначає мінімум функціонала (4) при крайових умовах (8).

Наведемо значення функціонала (4) при різних значеннях степеня *n* многочлена, який входить у вираз (13) (табл. 1).

Таблиця 1 – Значення функціонала за виразом (4) при зміні величини параметра n

Значення параметра n	Значення функціонала I
$n=0$	$I=\dfrac{15m_n^2v^2}{14t_1}$
$n=2$	$I=\dfrac{28m_n^2v^2}{27t_1}$
$n=4$	$I=\dfrac{45m_n^2v^2}{44t_1}$
$n=6$	$I=\dfrac{66m_n^2v^2}{65t_1}$
$n=8$	$I=\dfrac{91m_n^2v^2}{90t_1}$
$n=10$	$I=\dfrac{120m_n^2v^2}{119t_1}$
$n=12$	$I=\dfrac{153m_n^2v^2}{152t_1}$

Для даних, наведених у табл. 1, побудуємо графік (рис. 1), який показує збіжність значення функціонала до деякої величини. Ця величина дорівнює глобальному мінімуму функціонала (4), який він набуває на функції за виразом (9). Графік, зображений на рис. 1, побудований при таких параметрах: $m_n = 100\,кг,\ v = 1\,м/с,\ t_1 = 1\,с$.

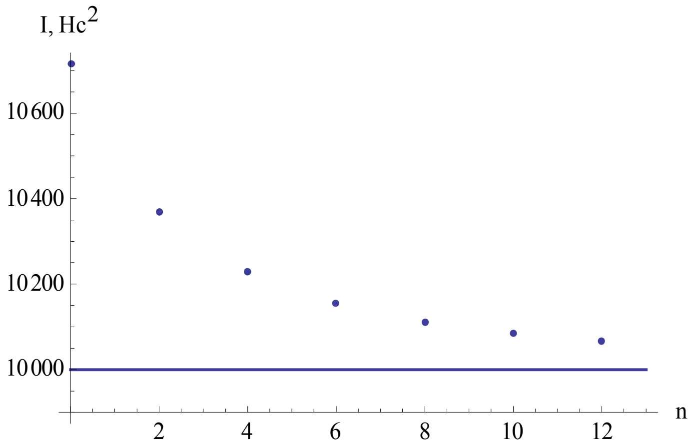


Рисунок 1 – Графік залежності значень функціонала (4) від кількості членів многочлена $Q_n(t)$ (від величини параметра n)

З рис. 1 бачимо, що при збільшенні кількості членів многочлена $Q_n(t)$ інтеграл зменшується. При $n=12$ значення функціонала більше від значення його абсолютного мінімуму лише на 0,66%, що цілком достатньо для інженерних розрахунків.

Мінімізуємо функціонал (4). Для цього використаємо функцію (13) при $n=0$. Ця функція матиме такий вигляд:

$$x = A_0 t^3 (t-t_1)^3 - \frac{t^3(t-2t_1)v}{2t_1^3}. \qquad (18)$$

Візьмемо другу похідну виразу (18) за часом, тоді отримаємо:

$$\ddot{x} = \frac{-6t(t-t_1)(A_0 t_1^3 (5t^2 - 5tt_1 + t_1^2) + v)}{t_1^3}. \qquad (19)$$

Знайдемо вираз функціонала (4) з урахуванням виразу (19):

$$I = \frac{2m_n^2 (A_0^2 t_1^{10} - 3A_0 t_1^5 v + 21v^2)}{35t_1}. \qquad (20)$$

Для мінімізації функціонала (20) необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = 0. \qquad (21)$$

Розв'язок цього рівняння $A_0 = \frac{3v}{2t_1^5}$. Підставивши цей розв'язок у вираз (18), отримаємо наближений розв'язок варіаційної задачі (4):

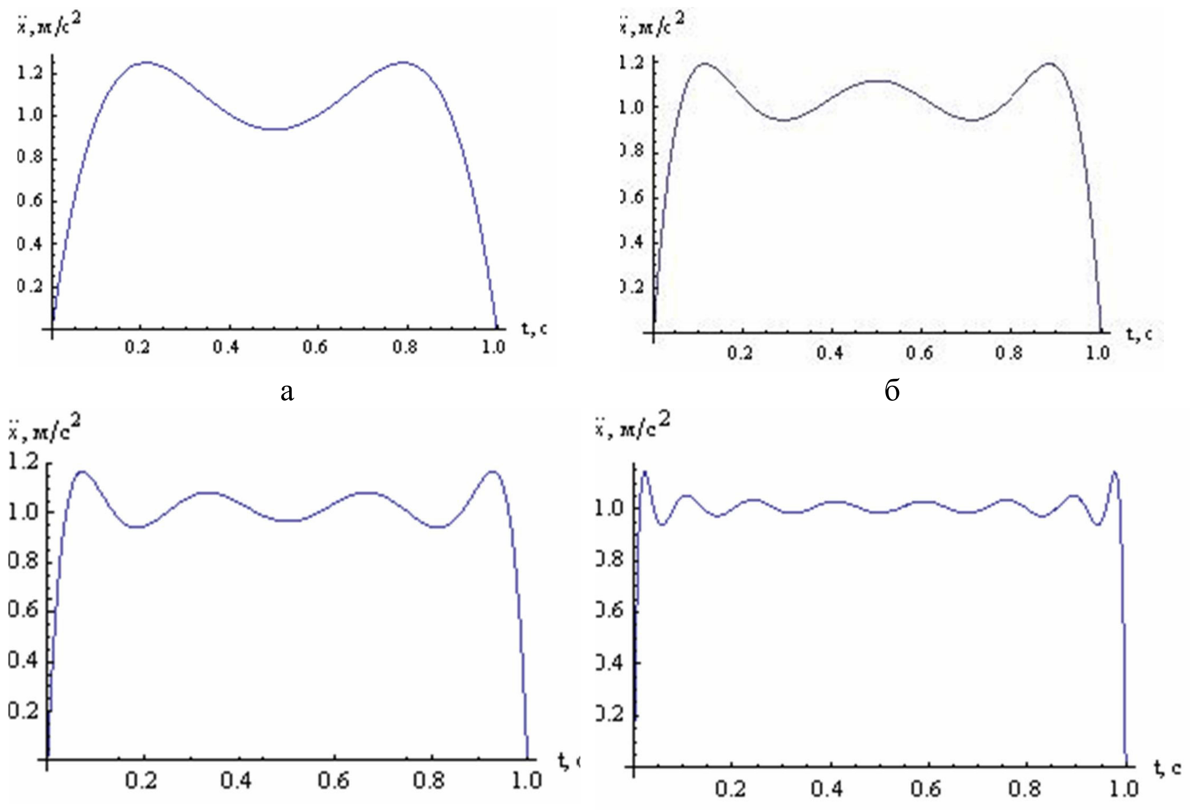
$$x = \frac{t^3(-3t^3 + 9t^2 t_1 - 10tt_1^2 + 5t_1^3)v}{2t_1^5}. \qquad (22)$$

Збільшуючи кількість членів многочлена $Q_n(t)$, аналогічно можна отримати функції, які краще наближаються до екстремалі, на якій функціонал набуває глобального мінімуму, при цьому наближені розв'язки варіаційної задачі відповідатимуть додатковим крайовим умовам (11), що поліпшує динаміку руху системи.

Важливим завданням, яке виникає при оптимізації режимів руху механічної системи, є реалізація отриманих оптимальних законів руху на практиці. Саме тут проявляються недоліки й переваги методу. Для їх виявлення побудуємо графіки прискорень механічної системи, які відповідають функціям (13), у яких змінюється степінь многочлена n (рис. 2). Наведені графіки побудовано при таких параметрах: $t_1 = 1c$, $v = 1 м/c$.

Аналізуючи отримані графіки, можемо зробити кілька висновків про характер зміни прискорення системи. Усі графіки, зображені на рис. 2, змінюються плавно. Збільшення кількості членів многочлена $Q(t)$ дозволяє отримати функції прискорення, максимальні значення яких будуть дещо меншими, ніж при використанні меншої кількості членів (при менших значеннях n). Крім того, при збільшенні n функція прискорення має тенденцію крутішої зміни біля країв інтервалу руху системи. Також збільшується коливний характер прискорення посередині інтервалу руху, що є небажаним.

Практична реалізація таких законів не пов'язана зі значними динамічними зусиллями, які виникають у механізмах. Крім того, реалізувати наведені функції можна, використавши частотне керування приводним механізмом [5] механічної системи.



а б

в г

Рисунок 2 – Графіки функцій прискорень механічної системи, які відповідають функції (13) при степеню многочлена $Q_n(t)$ $n=0$ - (а), $n=2$ - (б), $n=4$ - (б), $n=12$ - (г)

На основі проведених досліджень можна зробити такі **висновки**:

– запропоновано прямий метод розв’язку варіаційних задач, який зводиться до використання певним чином сформованої „опорної” функції та мінімізації функціонала за допомогою параметрів, які входять у сформовану функцію, причому використання великої кількості членів многочлена, який входить в „опорну” функцію, дозволяє наблизити значення функціонала до його абсолютного мінімуму;

– отримані функції прискорення механічної системи, при реалізації їх на практиці, дають змогу значно знизити динамічні навантаження у механізмах системи, при цьому мінімізується приводне зусилля, яке діє на неї у період розгону;

– запропонований прямий варіаційний метод можна використовувати для екстремізації критеріїв (інтегральних та термінальних) руху механічних систем.

Література

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Петров Ю.П. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
2. Математическая теория оптимальних процессов / [Понтрягин Л.С., Болтнянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.]. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование / Беллман Р. [под. ред. Воробьева Н.Н.] – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л. Э. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
5. Терехов В.М. Системы управления электроприводов / В.М. Терехов, О.И. Осипов; под ред. Терехова В.М. – Саратов: Изд. центр „Академия”, 2005. – 300 с.

Одержано 19.02.2010 р.