Ленюк М. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора фур'є–(конторовича-лєбєдєва)–ейлера на сегменті полярної осі / М. Ленюк, М. Шелестовська // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 3. — С. 141-150. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 517.443

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], канд. техн. наук

[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут";
[2]Тернопільський національний економічний університет

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є–(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)–ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами даного гібридного диференціального оператора методом порівняння розв'язку крайової задачі на сегменті полярної осі з двома точками спряження для сепаратної системи з диференціальних рівнянь Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва та Ейлера для модифікованих функцій, побудованого, з одного боку, безпосередньо методом функцій Коші, а з іншого –- методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є – (Конторовича-Лєбєдєва) – Ейлера.

***Ключові слова:** функціональні ряди, власні елементи, гібридний диференціальний оператор, інтегральні перетворення.*

M. Lenyuk, M. Shelestovska

SUMMARISING OF FUNCTIONAL SETS ACCORDING TO OWN ELEMENTS OF THE FURIER–(KONTOROVYCH–LEBEDEV)–EILER ON THE POLAR AXIS SEGMENT

Polyparametric family of the functional sets has been summarized according to the own elements of the given hybrid differential operator using the method of comparison solution of the boundary problem on the polar axis segment with two junction points for the separate system of the Furier, Kontorovych–Lebedev and Eiler for the modificated functions, built, on one side, on the Caushier function method itself, and, on the other, by the definite hybrid integral transformation of the Furier– (Kontorovych–Lebedev) – Eiler type.

***Key words:** functional sets, own elements, hybrid differential operator, integral transformation.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, перебувають у короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їхніх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика свідчить, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, зображають як поліпараметричний функціональний ряд, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї функціональних рядів і присвячена дана робота.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва та Ейлера для модифікованих функцій

$$(d^2/dr^2 - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r), r \in (R_0, R_1),$$

$$(B_{\alpha_1}-q_2^2)u_2(r)=-g_2(r),\ r\in(R_1,R_2),\qquad(1)$$
$$(B^*_{\alpha_2}-q_3^2)u_3(r)=-g_3(r),\ r\in(R_2,R_3),\ R_3<\infty$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,\ \left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)u_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R\qquad(2)$$

та умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^k d/dr+\beta_{j1}^k d/dr)u_k(r)-(\alpha_{j2}^k d/dr+\beta_{j2}^k d/dr)u_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk};\, j,k=1,2.\qquad(3)$$

У рівностях (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $L_1=d^2/dr^2$ [1], Конторовича-Лєбєдєва $B_{\alpha_1}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_1^2-\lambda^2r^2$ [2] та Ейлера $B^*_{\alpha_2}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_2^2$ [1].

Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j>0$, $2\alpha_j+1>0$, $\alpha_{jm}^k\ge0$, $\beta_{jm}^k\ge0$, $c_{1k}c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $\beta_{11}^0\ge0$, $\alpha_{11}^0\le0$, $\left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\ne0$, $\alpha_{22}^3+\beta_{22}^3\ne0$, $\lambda\in(0,\infty)$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2-q_1^2)v=0$ утворюють функції $v_1=chq_1r$ та $v_2=shq_1r$[1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_1}-q_2^2)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $v_1=I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)$ та $v_2=K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)$[2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2}-q_3^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_2-q_3}$ та $v_2=r^{-\alpha_2+q_3}$ [1].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом функцій Коші [1, 3]:

$$u_1(r)=A_1\mathrm{chq}_1r+B_1\mathrm{shq}_1r+\int_{R_0}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)d\rho,$$

$$u_2(r)=A_2I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)+B_2k_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)+\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2^*(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$

$$u_2(r)=A_3r^{-\alpha_2-q_3}+B_3r^{-\alpha_2+q_3}+\int_{R_2}^{R_3}E_3(r,\rho)g_3^*(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho.\qquad(4)$$

Тут $g_m^*(\rho)=\rho^{-2}g_m(\rho)$, $E_j(r,\rho)$ - функції Коші [1, 3]:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0}-E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0}=0,$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0}-\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)},$$

де $\varphi_1(r)=1,\varphi_2(r)=r^{-(2\alpha_1+1)},\varphi_3(r)=r^{-(2\alpha_2+1)}$.

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_1=C_1chq_1r+D_1shq_1r, & R_0<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{E}_1=C_2chq_2r+D_2shq_2r, & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases}\qquad(5)$$

Властивості (5) дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1) chq_1\rho + (D_2 - D_1) shq_1\rho = 0,$$
$$(C_2 - C_1) shq_1\rho + (D_2 - D_1) chq_1\rho = -q_1^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -q_1^{-1} shq_1\rho, D_2 - D_1 = -q_1^{-1} chq_1\rho. \tag{6}$$

Доповнимо рівності (6) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)\bar{E}_1\Big|_{r=R_0} = 0: \\ &\left(\alpha_{11}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)\overset{+}{E}_1\Big|_{r=R_1} = 0: \end{aligned} \quad \begin{cases} V_{11}^{01}(q_1R_0)C_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)D_1 = 0, \\ V_{11}^{11}(q_1R_1)C_2 + V_{11}^{12}(q_1R_1)D_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Із алгебраїчної системи (6), (7) знаходимо,що

$$C_1 = -\frac{V_{11}^{02}(q_1R_0)}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho); \quad D_1 = \frac{V_{11}^{01}(q_1R_0)}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho).$$

Цим функція Коші $E_1(r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має таку структуру:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}\begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho), \ R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1r), \ R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{8}$$

У рівностях (7), (8) прийняті позначення:

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m) = \alpha_{jk}^m q_s chq_sR_m + \beta_{jk}^m shq_sR_m,$$
$$\Delta_{j1}(q_1R_0, q_1R_1) = V_{11}^{01}(q_1R_0)V_{j1}^{12}(q_1R_1) - V_{11}^{02}(q_1R_0)V_{j1}^{11}(q_1R_1), j = 1{,}2;$$
$$\Phi_{j1}^m(q_1R_m, q_1r) = V_{j1}^{m2}(q_1R_m)chq_1r - V_{j1}^{m1}(q_1R_m)shq_1r, m = 0.1; j = 1{,}2.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2 = \begin{cases} \bar{E}_2 = C_1 I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r) + D_1 K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r), \quad R_1 < r < \rho < R_2, \\ \overset{+}{E}_2 = C_2 I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r) + D_2 K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r), \ R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2 - C_1) I_{q_2,\alpha_1}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K_{q_2,\alpha_1}(\lambda\rho) = 0,$$
$$(C_2 - C_1) I'_{q_2,\alpha_1}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K'_{q_2,\alpha_1}(\lambda\rho) = -\frac{1}{\lambda\rho^{2\alpha_1+1}}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -\lambda^{2\alpha_1} K_{q_2,\alpha_1}(\lambda\rho), D_2 - D_1 = \lambda^{2\alpha_1} I_{q_2,\alpha_1}(\lambda\rho). \tag{9}$$

Доповнимо рівності (9) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_{12}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)\bar{E}_2\Big|_{r=R_1} = 0: \\ &\left(\alpha_{11}^2 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^2\right)\overset{+}{E}_2\Big|_{r=R_2} = 0: \end{aligned} \quad \begin{cases} U_{q_2,\alpha_1;12}^{11}(\lambda R_1)C_1 + U_{q_2,\alpha_1;12}^{12}(\lambda R_1)D_1 = 0, \\ U_{q_2,\alpha_1;11}^{21}(\lambda R_2)C_2 + U_{q_2,\alpha_1;11}^{22}(\lambda R_2)D_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Із алгебраїчної системи (9), (10) знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{\lambda^{2\alpha_1} U_{q_2,\alpha_1;12}^{12}(\lambda R_1)}{\Delta_{q_2\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda R_2)}\Psi_{q_2,\alpha_1;11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda\rho); \quad D_1 = \frac{\lambda^{2\alpha_1} U_{q_2,\alpha_1;12}^{11}(\lambda R_1)}{\Delta_{q_2\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda R_2)}\Psi_{q_2,\alpha_1;11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda\rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;12}(\lambda R_1,\lambda r)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_2,\lambda\rho),\ R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_2,\lambda r),\ R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{11}$$

У рівностях (10), (11) беруть участь функції:

$$U^{m1}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)=(\alpha^m_{jk}\frac{q_2-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk})I_{q_2,\alpha_1}(\lambda R_m)+\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mI_{q_2+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)=(\alpha^m_{jk}\frac{q_2-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk})K_{q_2,\alpha_1}(\lambda R_m)-\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mK_{q_2+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$\Delta_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_1,\lambda R_2)=U^{11}_{q_2,\alpha_1;j2}(\lambda R_1)U^{22}_{q_2\alpha_1;k1}(\lambda R_2)-U^{12}_{q_2,\alpha_1;j2}(\lambda R_1)U^{21}_{q_2,\alpha_1;k1}(\lambda R_2);\ j,k=1,2;$$

$$\Psi^{m*}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m,\lambda r)=U^{m1}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)-U^{m1}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r).$$

Нехай функція Коші

$$E_3(r,\rho)=\begin{cases}\bar{E}_3=C_1r^{-\alpha_2-q_3}+D_1r^{-\alpha_2+q_3},\quad R_2<r<\rho<R_3,\\ \overset{+}{E}_3=C_2r^{-\alpha_2-q_3}+D_2r^{-\alpha_2+q_3},\ R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)\rho^{-\alpha_2-q_3}+(D_2-D_1)\rho^{-\alpha_2+q_3}=0,$$

$$(C_2-C_1)(\alpha_2+q_3)\rho^{-\alpha_2-q_3}+(D_2-D_1)(\alpha_2-q_3)\rho^{-\alpha_2+q_3}=\rho^{-2\alpha_2}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$(C_2-C_1)=(2q_3)^{-1}\rho^{-\alpha_2+q_3},D_2-D_1=-(2q_3)^{-1}\rho^{-\alpha_2-q_3}. \tag{12}$$

Доповнимо рівності (12) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{aligned}&(\alpha^2_{12}\tfrac{d}{dr}+\beta^2_{12})\bar{E}_3\Big|_{r=R_2}=0: &&Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)C_1+Z^{22}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)D_1=0,\\ &(\alpha^3_{22}\tfrac{d}{dr}+\beta^3_{22})\overset{+}{E}_3\Big|_{r=R_3}=0: &&Z^{31}_{\alpha_2;22}(q_3,R_3)C_2+Z^{32}_{\alpha_2;22}(q_3,R_3)D_2=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Унаслідок співвідношень (12) алгебраїчна система (13) набуває вигляду:

$$Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)C_1+Z^{22}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)D_1=0,$$

$$Z^{31}_{\alpha_2;22}(q_3,R_3)C_1+Z^{32}_{\alpha_2;22}(q_3,R_3)D_1=\frac{1}{2q_3}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho).$$

Звідси отримуємо:

$$C_1=-\frac{Z^{22}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)}{2q_3\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho);\quad D_1=\frac{Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)}{2q_3\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho).$$

Цим функція Коші $E_3(r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho)=-\frac{1}{2q_3\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)}\begin{cases}\Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_3,r)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho),\ R_2<r<\rho<R_3,\\ \Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_3,\rho)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),\ R_2<\rho<r<R_3.\end{cases} \tag{14}$$

У рівностях (12), (14) беруть участь функції:

$$Z^{m1}_{\alpha_2;jk}(q_3,R_m)=[\beta^m_{jk}-\alpha^m_{jk}(\alpha_2+q_3)R_m^{-1}]R_m^{-\alpha_2-q_3},$$

$$Z^{m2}_{\alpha_2;jk}(q_3,R_m)=[\beta^m_{jk}-\alpha^m_{jk}(\alpha_2-q_3)R_m^{-1}]R_m^{-\alpha_2+q_3},$$

$$\Delta_{\alpha_2;j2}(q_3,R_2,R_3)=Z^{21}_{\alpha_2;j2}(q_3,R_2)Z^{32}_{\alpha_2;22}(q_3,R_3)-Z^{22}_{\alpha_2;j2}(q_3,R_2)Z^{31}_{\alpha_2;22}(q_3,R_3),$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_2;jk}(q_3,r)=Z^{m2}_{\alpha_2;jk}(q_3,R_m)r^{-\alpha_2-q_3}-Z^{m1}_{\alpha_2;jk}(q_3,R_m)r^{-\alpha_2+q_3}.$$

Повернемось до формул (4). Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_j, B_j дають алгебраїчну систему з шести рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&V_{11}^{01}(\mathrm{q}_1R_0)A_1+V_{11}^{02}(\mathrm{q}_1R_0)B_1=g_0,\\
&V_{j1}^{11}(\mathrm{q}_1R_1)A_1+V_{j1}^{12}(\mathrm{q}_1R_1)B_1-U_{q_2,\alpha_1;j2}^{11}(\lambda R_1)A_2-U_{q_2,\alpha_1;j2}^{12}(\lambda R_1)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\\
&U_{q_2,\alpha_1;j1}^{21}(\lambda R_2)A_2+U_{q_2,\alpha_1;j1}^{22}(\lambda R_2)B_2-Z_{\alpha_2;j2}^{21}(q_3,R_2)A_3-Z_{\alpha_2;j2}^{22}(q_3,R_2)B_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23},\\
&Z_{\alpha_2;22}^{31}(q_3,R_3)A_3+Z_{\alpha_2;22}^{32}(q_3,R_3)B_3=g_R.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

У системі (15) беруть участь функції

$$
G_{12}=-c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}g_1(\rho)d\rho-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{q_2,\alpha_1;11}^{2*}(\lambda R_2,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_1;,11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,
$$

$$
G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{q_2,\alpha_1;12}^{1*}(\lambda R_3,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi_{q_2,\alpha_1;22}^{3*}(q_3,\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_1;12}(q_3,R_2,R_3)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho
$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$ [4].

Введемо до розгляду функції:

$$
\begin{aligned}
&A_{\alpha_1;j}(q)=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_1;2j}(\lambda R_1,\lambda R_2)-\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_1;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2),\ j=1,2,\\
&B_{(\alpha);j}(q)=\Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3)\Delta_{q_2,\alpha_1;j1}(\lambda R_1,\lambda R_2)-\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)\Delta_{q_2,\alpha_1;j2}(\lambda R_1,\lambda R_2),\\
&\theta_{\alpha_1;1}(r,q)=-\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\Psi_{q_2,\alpha_1;22}^{1*}(\lambda R_1,\lambda r)+\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\Psi_{q_2,\alpha_1;12}^{1*}(\lambda R_1,\lambda r),\\
&\theta_{(\alpha);2}(r,q)=\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)\Psi_{q_2,\alpha_1;21}^{2*}(\lambda R_2,\lambda r)-\Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3)\Psi_{q_2,\alpha_1;11}^{2*}(\lambda R_2,\lambda r).
\end{aligned}
$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3):для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1,q_2,q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (15) [4]

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(\alpha)}&\equiv\Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3)A_{(\alpha);1}(q)-\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)A_{(\alpha);2}(q)=\\
&=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\alpha);2}(q)-\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\alpha);1}(q)\neq0\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1. Породжені крайовою умовою у точці $r=R_0$ функції Гріна:

$$
W_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\left[B_{(\alpha);2}(q)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r)-B_{(\alpha);1}(q)\Phi_{21}^1(q_1R_1,q_1r)\right],
$$

$$
W_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{c_{11}q_1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);2}(r,q);\quad W_{(\alpha);13}(r,q)=-\frac{c_{11}c_{12}q_1}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{\alpha_2;22}^{3*}(q_3,r).\tag{17}
$$

2. Породжені крайовою умовою у точці $r=R_3$ функції Гріна:

$$
\begin{aligned}
&W_{(\alpha);31}(r,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}2q_3}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r);\\
&W_{(\alpha);32}(r,q)=-\frac{c_{22}2q_3}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(r,q);\\
&W_{(\alpha);33}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\left[A_{\alpha_1;2}(q)\Psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_3,r)-A_{\alpha_1;1}(q)\Psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_3,r)\right].
\end{aligned}
\tag{18}
$$

3. Породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна:

$$
\mathcal{R}_{(\alpha);11}^1(r,q)=-\frac{B_{(\alpha);2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\,,\ \mathcal{R}_{(\alpha);21}^1(r,q)=\frac{B_{(\alpha);1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\,,
$$

$$
\mathcal{R}_{(\alpha);12}^1(r,q)=-\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\,,
$$

$$
\mathcal{R}_{(\alpha);22}^1(r,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\,,
$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);2}(r,q);\ \mathcal{R}^2_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);2}(r,q);$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{\Delta_{\alpha_2;22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(r,q);\ \mathcal{R}^2_{(\alpha);22}(r,q)=\frac{\Delta_{\alpha_2;12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(r,q); \tag{19}$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{A_{\alpha_1;2}(q)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),\ \mathcal{R}^3_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{A_{\alpha_1;1}(q)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r).$$

4. Породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$H_{(\alpha);11}(r,\rho,q)=-\frac{1}{q_1}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)W_{(\alpha);11}(\rho,q), R_0<r<\rho<R_1\\ \Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)W_{(\alpha);11}(r,q), R_0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$H_{(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)\theta_{(\alpha);2}(\rho,q),$$

$$H_{(\alpha);13}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3,\rho),$$

$$H_{(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)\theta_{(\alpha);2}(r,q), \tag{20}$$

$$H_{(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{\alpha_1;1}(r,q)\theta_{(\alpha);2}(\rho,q), R_1<r<\rho<R_2\\ \theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\theta_{(\alpha);2}(r,q), R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$H_{(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho),$$

$$H_{(\alpha);31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$H_{(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$H_{(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_3}\begin{cases}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho)W_{(\alpha);33}(r,q), R_2<r<\rho<R_3\\ \Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r)W_{(\alpha);33}(\rho,q), R_2<\rho<r<R_3\end{cases}.$$

У результаті однозначної розв’язності алгебраїчної системи (15), підставивши отримані значення A_j та B_j у формули (4), а також унаслідок низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=W_{(\alpha);1j}(r,q)g_0+\sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}^j_{(\alpha);km}(r,q)\omega_{km}+W_{(\alpha);3j}(r,q)g_R+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q)g_k(\rho)\varphi_k(\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}. \tag{21}$$

У рівності (21) беруть участь функції $\varphi_1(r)=1,\varphi_2(r)=r^{2\alpha_1-1},\varphi_3(r)=r^{2\alpha_2-1}$.

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО):

$$\mathcal{M}_{(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_1} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)B^*_{\alpha_2} \qquad (22)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

Оператор $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ самоспряжений і не має особливих точок на множині I_2 [5]. Тому його спектр дійсний і дискретний. Йому відповідає дискретна спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\alpha);k}(r,\beta), \qquad (23)$$

β-спектральний параметр (власне число ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$).

Власні елементи ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ знайдемо як ненульовий розв'язок відповідної спектральної задачі Штурма-Ліувілля: побудувати відмінний від поля розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва та Ейлера для звичайних функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta) = 0, r \in (R_0, R_1),$$
$$(B_{\alpha_1} + b_2^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_1, R_2),$$
$$(B^*_{\alpha_2} + b_3^2)V_{(\alpha);3}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_2, R_3) \qquad (24)$$

за однорідними крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0} = 0, \left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3} = 0 \qquad (25)$$

та однорідними умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)V_{(\alpha);k}(r,\beta) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j,k = 1,2, \qquad (26)$$

$b_m \equiv b_m(\beta) = (\beta^2 + k_m^2)^{1/2}, \quad k_m \geq 0, m = \overline{1,3}.$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \cos b_1 r$ та $v_2 = \sin b_1 r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_1} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = C_{\alpha_1}(\lambda r, b_2)$ та $v_2 = D_{\alpha_1}(\lambda r, b_2)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r)$ [6].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = A_1\cos b_1 r + B_1 \sin b_1 r, r \in (R_0, R_1),$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 C_{\alpha_1}(\lambda r, b_2) + B_2 D_{\alpha_1}(\lambda r, b_2), r \in (R_1, R_2),$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha_2}\cos(b_3\ln r) + B_3 r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r), r \in (R_2, R_3), \qquad (27)$$

то крайові умови (25) та умови спряження (26) для визначення величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з шести рівнянь:

$$v_{11}^{01}(b_1R_0)A_1 + v_{11}^{02}(b_1R_0)B_1 = 0,$$
$$v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1 + v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1 - X_{\alpha_1;j2}^{11}(\lambda R_1, b_2)A_2 - X_{\alpha_1;j2}^{12}(\lambda R_1, b_2)B_2 = 0, j = 1,2;$$
$$X_{\alpha_1;j1}^{21}(\lambda R_2, b_2)A_2 + X_{\alpha_1;j1}^{22}(\lambda R_2, b_2)B_2 - Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_3, R_2)A_3 - Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_3, R_2)B_3 = 0, \qquad (28)$$
$$Y_{\alpha_2;22}^{31}(b_3, R_3)A_3 + Y_{\alpha_2;22}^{32}(b_3, R_3)B_3 = 0.$$

У системі (28) беруть участь функції:

$$v_{j1}^{m1}(b_1R_m) = -\alpha_{j1}^m b_1 \sin b_1 R_m + \beta_{j1}^m \cos b_1 R_m, v_{j1}^{m2}(b_1R_m) = \alpha_{j1}^m b_1 \cos b_1 R_m + \beta_{j1}^m \sin b_1 R_m,$$

$$X^{m1}_{\alpha_1;jk}(\lambda R_m,b_2)=(\alpha^m_{jk}\, d\!\!\!/_{dr}+\beta^m_{jk})C_{\alpha_1}(\lambda r,b_2)\big|_{r=R_m},$$
$$X^{m2}_{\alpha_1;jk}(\lambda R_m,b_2)=(\alpha^m_{jk}\, d\!\!\!/_{dr}+\beta^m_{jk})D_{\alpha_1}(\lambda r,b_2)\big|_{r=R_m},$$
$$Y^{m1}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_m)=\left(\alpha^m_{j2}\, d\!\!\!/_{dr}+\beta^m_{j2}\right)r^{-\alpha_1}\cos(b_3\ln r)\big|_{r=R_m},$$
$$Y^{m2}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_m)=[(\beta^m_{j2}-\alpha_2\alpha^m_{j2}R_m^{-1})\sin(b_3\ln R_m)+b_3\alpha^m_{j2}R_m^{-1}\cos(b_3\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2}.$$

Алгебраїчна система (28) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю [4]:

$$\delta_{(\alpha)}(\beta)\equiv\delta_{11}(b_1R_0,b_1R_1)b_{(\alpha);2}(\beta)-\delta_{21}(b_1R_0,b_1R_1)b_{(\alpha);1}(\beta)=0. \tag{29}$$

У трансцендентному рівнянні (29) беруть участь функції:

$$\delta_{j1}(b_1R_0,b_1R_1)=v^{01}_{11}(b_1R_0)v^{12}_{j1}(b_1R_1)-v^{02}_{11}(b_1R_0)v^{11}_{j1}(b_1R_1),\ j=1,2;$$
$$\delta_{\alpha_1;jk}(\beta)\equiv X^{11}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1,b_2)X^{22}_{\alpha_1;k1}(\lambda R_2,b_2)-X^{12}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1,b_2)X^{21}_{\alpha_1;k1}(\lambda R_2,b_2);$$
$$\delta_{\alpha_2;j2}(\beta)\equiv Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)Y^{32}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3)-Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)Y^{31}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3);$$
$$b_{v,(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\alpha_2;22}(\beta)\delta_{\alpha_1;j1}(\beta)-\delta_{\alpha_2;12}(\beta)\delta_{\alpha_1;j2}(\beta),\ j=1,2.$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (29) утворюють дискретний спектр ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ [7].

Підставимо в алгебраїчну систему (28) $\beta=\beta_n$ й відкинемо останнє рівняння через лінійну залежність. Покладемо $A_1=A_0v^{02}_{11}(b_{1n}R_0),\ B_1=-A_0v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)$, де A_0 -підлягає визначенню. Перше рівняння у системі (28) стає тотожністю, а інші чотири утворюють дві системи по два рівняння у кожній:

$$X^{11}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1,b_{2n})A_2+X^{12}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1,b_{2n})B_2=-A_0\delta_{j1}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1),\ j=1,2, \tag{30}$$
$$Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_{3n},R_2)A_3+Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_{3n},R_2)B_3=X^{21}_{\alpha_1;j1}A_{2n}+X^{22}_{\alpha_1;j1}B_{2n},\ j=1,2. \tag{31}$$

У результаті послідовного розв’язання алгебраїчних систем (30),(31) й підставивши отримані значення A_j,B_j у рівності (27), знаходимо, що

$$\begin{aligned}
V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)&=q_{\alpha_1}(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n)[v^{02}_{11}(b_{1n}R_0)\cos b_{1n}r-v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)\sin b_{1n}r],\\
V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)&=q_{\alpha_2}(\beta_n)[\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\Psi^1_{\alpha_1;12}(\lambda r,b_{2n})-\delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\Psi^1_{\alpha_1;22}(\lambda r,b_{2n})],\\
V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)&=\omega_{(\alpha);2}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\cos(b_{3n}\ln r)-\omega_{(\alpha);1}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\sin(b_{3n}\ln r).
\end{aligned} \tag{32}$$

У рівностях (32) прийняті позначення:

$$q_{\alpha_1}(\beta_n)=\frac{c_{21}sh(\pi b_{2n})}{\pi\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}},q_{\alpha_2}(\beta_n)=\frac{c_{22}b_{3n}}{R_2^{2\alpha_2+1}},b_{jn}=(\beta_n^2+k_j^2)^{1/2},k_j^2\ge0;\ j=1,2;$$
$$a_{\alpha_1,j}(\beta_n)=\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\delta_{\alpha_1;1j}(\beta_n)-\delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\delta_{\alpha_1;2j}(\beta_n),\ j=1,2;$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta_n)=a_{\alpha_1,1}(\beta_n)Y^{2j}_{\alpha_2;22}(b_{3n},R_2)-a_{\alpha_1,2}(\beta_n)Y^{2j}_{\alpha_2;12}(b_{3n},R_2);\ j=1,2;$$
$$\Psi^1_{\alpha_1;j2}(\lambda r,b_{2n})=X^{11}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1,b_{2n})D_{\alpha_1}(\lambda r,b_{2n})-X^{12}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1,b_{2n})C_{\alpha_1}(\lambda r,b_{2n}).$$

Визначимо вагову функцію

$$\sigma(r)=\sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)\sigma_k\varphi_k(r) \tag{33}$$

і квадрат норми спектральної вектор-функції

$$\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2=\int_{R_0}^{R_3}[V_{(\alpha)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr\equiv\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}[V_{(\alpha);k}(r,\beta_n)]^2\sigma_k\varphi_k(r)dr, \tag{34}$$

$$\sigma_1=\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}}R_2^{2\alpha_2+1},\sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\sigma_3=1.$$

Згідно з роботою [7] маємо твердження: 1) система функцій $\{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на I_2 з вагою $\sigma(r)$, повна і замкнена; 2) будь-яка вектор-функція $g(r)$ із області визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ зображається за системою $\{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}. \tag{35}$$

Ряд Фур'є (35) визначає пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{R_3} g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n, \tag{36}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n V_{(\alpha)}(r,\beta_n)(\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2)^{-1}\equiv g(r). \tag{37}$$

Єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3), побудований за відомою логічною схемою [8], визначають функції:

$$\begin{aligned}u_j(r)&=\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta_n)\Big)\sigma_k g_k(\rho)\varphi_k(\rho)d\rho+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)\sigma_1 g_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)R_3^{2\alpha_2+1}g_R+\\&+\sum_{k=1}^{2}d_k\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty}Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)\Big)\omega_{2k}-\Big(\sum_{n=1}^{\infty}Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)\Big)\omega_{1k}\Big],\ j=\overline{1,3}.\end{aligned} \tag{38}$$

У рівностях (28) беруть участь величини та функції:

$$d_1=\sigma_1 c_{11}^{-1},,\ d_2=\sigma_2 R_2^{2\alpha_1+1}c_{12}^{-1},$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta_n)=(\alpha_{i2}^k \tfrac{d}{dr}+\beta_{i2}^k)V_{(\alpha);\kappa+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},i,k=1,2,$$

$$S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)=(\beta_n^2+q^2)^{-1}V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)(\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2)^{-1},\ q^2=\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}.$$

Порівнюючи розв'язки (21) та (38) унаслідок єдиності, отримуємо такі формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);k}(R_0,\beta_n)=\sigma_k^{-1}H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q),j,k=\overline{1,3}, \tag{39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha_{11}^0)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta_n)=\sigma_k^{-1}W_{(\alpha);1j}(r,q),\ j=\overline{1,3}, \tag{40}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{22}^3)^{-1}S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)=R_3^{-(2\alpha_2+1)}W_{(\alpha);3j}(r,q),\ j=\overline{1,3}, \tag{41}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)=d_k^{-1}R_{(\alpha);2k}^j(r,q),k=1,2;\ j=\overline{1,3}, \tag{42}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)S_{(\alpha);j}(r,\beta_n)=-d_k^{-1}R_{(\alpha);1k}^j(r,q),k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \tag{43}$$

Функції $H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (20), функції Гріна $R^j{}_{(\alpha);ik}(r,q)$ – формулами (19), функції Гріна $W_{(\alpha);3j}(r,q)$ – формулами (18), а функції Гріна $W_{(\alpha);1j}(r,q)$ – формулами (17).

Зауваження 1. Якщо $q^2 = q_1^2$, то $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2, k_3^2 = q_1^2 - q_3^2$. У цьому випадку $b_1 = \beta, b_2 = \sqrt{\beta^2 + q_1^2 - q_2^2}$, $b_3 = \sqrt{\beta^2 + q_1^2 - q_3^2}, \beta^2 + q^2 = \beta^2 + q_1^2$.

Зауваження 2. Якщо $q^2 = q_2^2$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 > 0, k_2^2 = 0, k_3^2 = q_2^2 - q_3^2 > 0$. У цьому випадку $b_1 = \sqrt{\beta^2 + q_2^2 - q_1^2}, b_2 = \beta, b_3 = \sqrt{\beta^2 + q_2^2 - q_3^2}, \beta^2 + q^2 = \beta^2 + q_2^2$.

Зауваження 3. Якщо $q^2 = q_3^2$, то $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 > 0, k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 > 0, k_3 = 0$. У цьому випадку $b_1 = \sqrt{\beta^2 + q_3^2 - q_1^2}, b_2 = \sqrt{\beta^2 + q_3^2 - q_2^2}, b_3 = \beta; \beta^2 + q^2 = \beta^2 + q_3^2$.

Висновок 1. Оскільки праві частини в рівностях (39)-(43) не залежать від нерівностей $q_j^2 - q_m^2 \geq 0$, то можна взяти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q_0^2 \geq 0$, звужуючи при цьому сім'ю функціональних рядів.

Підсумком викладеного вище є таке твердження.

Теорема. Якщо вектор-функція $f(r) = \{g_1^{//}; B_{\alpha_1}[g_2]; B_{\alpha_2}^*[g_3]\}$ неперервна на множині I_2, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) й умови спряження (3) та виконується умова (16) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (39)-(43) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (22).

Висновок 2. Отримані суми (39)-(43) функціональних рядів поповнюють довідкову математичну літературу. Вони можуть бути використані при обчисленні фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, що перебувають під стрибкоподібним (імпульсним) навантаженням.

Література

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / Степанов В.В. – М.: Физматгиз,1959. – 468с.
2. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Конторовича - Лєбєдєва / М.П. Ленюк, Г.І. Міхалевська. – Чернівці: Прут, 2002. – 280с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Шилов Г.Е. – М.: Наука, 1965. – 328с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / Курош А.Г. – М.: Наука, 1971. – 432с.
5. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368с.
6. Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера, Бесселя) / Нікітіна О.М. – Чернівці: Прут, 2008. – 86с.
7. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. – Чернівці: Прут, 2001. – 228с.
8. Ленюк М.П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів типу (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том VI / Ленюк М.П. – Чернівці: Прут, 2006. – 376с.

Одержано 15.06.2009 р.