

УДК 620.171.3

О. Шкодзінський, канд. техн. наук; Г. Козбур

Тернопільський державний технічний університет ім. І. Пулюя

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПРОЦЕСУ ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННОЇ ТРУБКИ В УМОВАХ СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

У роботі запропоновано методику дослідження стійкості процесу пластичного деформування тонкостінних циліндричних трубчастих зразків металевих ізотропних матеріалів, навантажених внутрішнім тиском та осьовим розтягувальним зусиллям. Отримано умови досягнення граничної рівноваги пластичного деформування. Факт найменшого рівня граничних залишкових деформацій при співвідношеннях головних напружень 2:1 та 1:2 доведено розрахунками.

Ключові слова: плоский напружений стан, максимальна залишкова пластичність, граничні напруження, в'язке руйнування, вид напруженого стану.

O. Shkodzinsky, G. Kozbur

INVESTIGATION OF PLASTIC DEFORMATION PROCESS RESISTANCE OF THIN-WALLED TUBES UNDER COMPLEX STRESSED STATE CONDITIONS

Methods of investigation of plastic deformation process resistance of thin-walled cylindrical tube samples made of metallic isotropic materials loaded by internal disk and main tension are presented in this paper. Conditions of plastic deformation limit equilibrium reaching are obtained. The fact of the lowest limit level of residual strain at 2:1 and 1:2 main stress relations is proved by calculations.

Key words: planar-stressed state, maximum residual plasticity, limit stresses, tough fracture, stressed state view.

Умовні позначення:

$\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r$ – осьове, колове та радіальне напруження;

$\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_r$ – відносні осьова, колова та радіальна деформації трубчастого зразка;

$\sigma_{екв}$ – узагальнене напруження;

$\varepsilon_{екв}$ – узагальнена деформація.

Вступ. Для забезпечення надійності роботи важконавантажених конструкційних елементів необхідно вміти визначати граничні значення напружень, що спричиняють недопустимі пластичні деформації та руйнування, з урахуванням особливостей конструкції. У зв'язку з цим вивчення механізмів деформування та руйнування разом з удосконаленням методів оцінювання граничних станів деталей з певними конструктивними особливостями є актуальним питанням механіки деформівного твердого тіла.

Експериментальне визначення граничних станів для умов складного напруженого стану доволі складно реалізувати, тому для інженерних розрахунків використовують критерії, що ґрунтуються на певних припущеннях. Існує велика кількість критеріїв міцності, досить повний огляд яких зроблено в [1, 2, 3].

Для узагальнення двох найбільш визнаних «класичних» критеріїв Мізеса та Треска, аналогічно до спроби В.Ф. Хосфорда [4], автори увели еквівалентне напруження у вигляді

$$\sigma_{екв} = \frac{p}{2} \left[\frac{|\sigma_z - \sigma_\theta|^p + |\sigma_\theta - \sigma_r|^p + |\sigma_z - \sigma_r|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

де p – безрозмірний параметр, що визначається для кожного матеріалу оптимізацією на основі припущення про концентричність поверхонь текучості при різних допусках на залишкову пластичність [5]. Умова (1) при $p=1$ зводиться до розрахункового співвідношення критерію найбільших дотичних напружень Треска, а при $p=2$ – критерію енергії формозміни Мізеса. Геометрично формула (1) інтерпретується відповідним чином, і для значень p з проміжку (1; 2) у системі напружень $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r$ отримуються граничні поверхні, розміщені між призмою Кулона та циліндром Мізеса, які найчастіше отримують при пластичному деформуванні реальних конструкційних матеріалів.

У системі координат $\sigma_{екв} : \varepsilon_{екв}$, де еквівалентні деформації визначаємо через головні деформації за формулою

$$\varepsilon_{екв} = \frac{p}{2(p+1)} \left[\frac{|\varepsilon_z - \varepsilon_\theta|^p + |\varepsilon_\theta - \varepsilon_r|^p + |\varepsilon_z - \varepsilon_r|^p}{0,5} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

отримуємо узагальнену криву деформування матеріалу. У [5] показано, що діаграма розсіювання експериментальних даних у координатах $\sigma_{екв} : \varepsilon_{екв}$ покриває меншу площу порівняно з аналогічними діаграмами, отриманими на основі загальновідомих критеріїв у координатах $\sigma_{ін} : \varepsilon_{ін}$ чи $\gamma_{max} : \tau_{max}$. Враховуючи очевидні переваги використання координат $\sigma_{екв} : \varepsilon_{екв}$ щодо точності відтворення граничних поверхонь міцності та кривих деформування, використаємо їх для розв'язання задачі про дослідження умов втрати стійкості пластичного деформування зразків ізотропних матеріалів в умовах плоского напруженого стану – на прикладі циліндричної трубки із днищами, навантаженої осьовим зусиллям N та внутрішнім тиском P , як одного із різновидів складного напруженого стану.

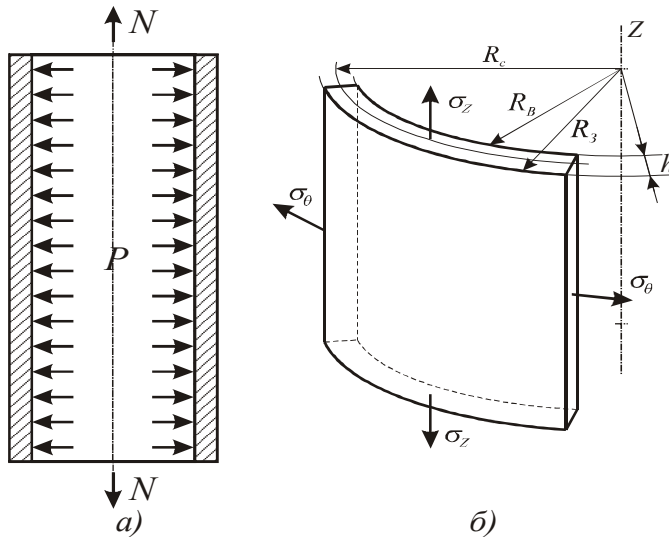


Рисунок 1 – Розрахункова схема для визначення напружень у циліндричній трубці

Постановка задачі. Нехай R_B і R_3 – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси циліндричної трубки товщиною h – рис.1, $R_3 - R_B = h$, радіус серединної поверхні трубки $R_C = \frac{R_B + R_3}{2}$.

Припустимо, що матеріал трубки ізотропний та нестисливий. Розглянемо великі деформації трубки під дією розтягувального осьового зусилля N (у напрямку осі z трубки) та внутрішнього тиску P . Деформаціями пружної ділянки знехтуємо.

У цьому разі істинні осьові та колові напруження визначимо співвідношеннями [1]

$$\sigma_z = \frac{N}{2\pi R_C (1 + \varepsilon_\theta) h (1 + \varepsilon_r)} + \frac{\left(R_C (1 + \varepsilon_\theta) - \frac{h}{2} (1 + \varepsilon_r) \right)^2 \cdot P}{2 R_C (1 + \varepsilon_\theta) h (1 + \varepsilon_r)}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{P \left(R_c (1 + \varepsilon_{\theta}) - \frac{h}{2} (1 + \varepsilon_r) \right)}{h (1 + \varepsilon_r)}. \quad (4)$$

Для даної постановки задачі радіальними напруженнями в стінці трубки нехтують: $\sigma_r = 0$. Для виведення умови втрати стійкості процесу пластичного деформування візьмемо за основу критерій максимального навантаження Дорна [6]. Дж. Дорн встановив, що при деформації труб під дією внутрішнього тиску і осьового навантаження пластичне деформування втрачає стійкість, коли тиск або осьове навантаження досягають максимуму, що пізніше підтвердили інші автори. Цей підхід, використаний авторами у [7], аналітично виражається однією з умов: $dP = 0$ чи $dN = 0$. Тобто навантаження зростає до певного значення, що відповідає втраті конструкцією несучої здатності, і після цього спадає. Це пояснюється локалізацією місця зростання деформації, і для випадку одноосного розтягу циліндричного стержня супроводжується появою “шийки”.

Розглянемо обидва випадки.

$$1) \quad dP = 0. \quad (5)$$

Із (4) виразимо P

$$P = \frac{\sigma_{\theta} h (1 + \varepsilon_r)}{R_c (1 + \varepsilon_{\theta}) - \frac{h}{2} (1 + \varepsilon_r)}. \quad (6)$$

Вважаючи початкові значення R_c і h сталими, знайшовши повний диференціал правої частини виразу (6), із (5) отримаємо

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{\sigma_{\theta}} + \frac{R_c (1 + \varepsilon_{\theta}) d\varepsilon_r}{(1 + \varepsilon_r) \left(R_c (1 + \varepsilon_{\theta}) - \frac{h}{2} (1 + \varepsilon_r) \right)} - \frac{R_c d\varepsilon_{\theta}}{R_c (1 + \varepsilon_{\theta}) - \frac{h}{2} (1 + \varepsilon_r)} = 0. \quad (7)$$

Нехай навантаження є простим, тобто $\frac{\sigma_z}{\sigma_{\theta}} = k$. Тоді для великих пластичних деформацій справедлива залежність

$$n = \frac{2k - 1}{2 - k}, \quad (8)$$

де

$$n = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{\theta}}. \quad (9)$$

Враховуючи умову нестисливості матеріалу

$$\varepsilon_z + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_r = 0, \quad (10)$$

умову (7) запишемо як диференціальне рівняння із розділеними змінними:

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{\sigma_{\theta}} = \frac{(n + 2) d\varepsilon_{\theta}}{(1 - (n + 1)\varepsilon_{\theta}) \left(1 - \frac{h}{2R_c} + \left(1 + \frac{h}{2R_c} (n + 1) \right) \varepsilon_{\theta} \right)}. \quad (11)$$

Позначимо відношення товщини трубки до середнього радіуса через μ

$$\frac{h}{R_c} = \mu. \quad (12)$$

Число μ є безрозмірним коефіцієнтом, що характеризує форму зразка. Усі можливі значення μ належать відрізку $[0; 1]$. При $\mu = 0$ зразок має форму плоскої пластинки, при $\mu = 1$ – форму суцільного циліндричного стержня. Для усіх видів криволінійних оболонок $0 < \mu < 1$.

З урахуванням позначення (12) загальний розв’язок рівняння (11) запишемо так:

$$\sigma_{\theta} = C \cdot \frac{1 - \frac{\mu}{2} + \left(1 + \frac{\mu}{2}(n+1)\right) \varepsilon_{\theta}}{1 - (n+1) \varepsilon_{\theta}}. \quad (13)$$

Для визначення невідомої постійної інтегрування C розглянемо умову втрати стійкості пластичного деформування трубки, навантаженої внутрішнім тиском P . У цьому разі $N=0$, тоді із (3) і (4) можна отримати $k = 0,5 - \frac{\mu}{4} \lambda$, $n = -\frac{\mu \lambda}{3 + \frac{\mu}{2} \lambda}$, де

$\lambda = \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_{\theta}}$. Колові напруження і деформації досягають своїх граничних значень:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^b, \quad \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^b.$$

Тоді постійну C визначимо так:

$$C = C_{\theta} = \sigma_{\theta}^b \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{\mu \lambda}{3 + \frac{\mu}{2} \lambda}\right) \varepsilon_{\theta}^b}{1 - \frac{\mu}{2} + \left(1 + \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu \lambda}{3 + \frac{\mu}{2} \lambda}\right)\right) \varepsilon_{\theta}^b}. \quad (14)$$

Враховуючи (14), отримаємо розв'язок рівняння (11):

$$\sigma_{\theta} = C_{\theta} \cdot \frac{1 - \frac{\mu}{2} + \left(1 + \frac{\mu}{2}(n+1)\right) \varepsilon_{\theta}}{1 - (n+1) \varepsilon_{\theta}}. \quad (15)$$

Умова (15) визначає значення колових напружень та колових деформацій, що відповідають моментів втрати стійкості пластичного деформування трубки від дії внутрішнього тиску P . Лінії у системі координат $\sigma_{\theta} : \varepsilon_{\theta}$, що є геометричною інтерпретацією умови (15), назвемо кривими граничних станів або граничними кривими.

$$2) \quad dN = 0. \quad (16)$$

Використаємо отриману із (3) та (4) рівність

$$N = \pi R_c h (1 + \varepsilon_r) \sigma_z \left[(1 + \varepsilon_{\theta}) \left(2 - \frac{1}{k}\right) + \frac{h}{2k R_c} (1 + \varepsilon_r) \right]. \quad (17)$$

Після знаходження повного диференціала правої частини виразу (17) із (16) отримаємо

$$\left[\frac{1 + \varepsilon_{\theta}}{1 + \varepsilon_r} \left(2 - \frac{1}{k}\right) + \frac{h}{k R_c} \right] d\varepsilon_r + \left(2 - \frac{1}{k}\right) d\varepsilon_{\theta} + \left[(1 + \varepsilon_{\theta}) \left(2 - \frac{1}{k}\right) + \frac{h(1 + \varepsilon_r)}{2k R_c} \right] \frac{d\sigma_z}{\sigma_z} = 0. \quad (18)$$

Враховавши (9), (10) і (12) та взявши до уваги той факт, що значення виразу $\frac{1 + \varepsilon_{\theta}}{1 + \varepsilon_r}$ набуває значень 1...1,2 для діапазонів значень $k = 1... \infty$ та $\varepsilon_{in} = 1...10\%$,

прямуючи до 1 при $k \rightarrow \infty$, приймемо спрощення $\frac{1 + \varepsilon_{\theta}}{1 + \varepsilon_r} \approx 1$. Отримаємо

диференціальне рівняння:

$$\frac{\frac{1}{k} - 2 - \frac{\mu}{k} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(2 - \frac{1}{k} + \frac{\mu}{2k}\right) \left(1 - \frac{n+1}{n} \varepsilon_z\right)} d\varepsilon_z + \frac{d\sigma_z}{\sigma_z} = 0. \quad (19)$$

Загальний інтеграл рівняння (19)

$$\sigma_z = C \cdot \left(1 - \frac{n+1}{n} \varepsilon_z\right)^{\frac{\frac{1}{k} - 2 - \frac{\mu}{k} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n}{2 - \frac{1}{k} + \frac{\mu}{2k} \cdot n+1}}. \quad (20)$$

Для визначення константи C використаємо умову втрати міцності трубки в умовах одновісного розтягу. У цьому випадку $P=0$, $k = \infty$, $n = -2$. Граничні значення осьових напружень і деформацій $\sigma_z = \sigma_z^b$, $\varepsilon_z = \varepsilon_z^b$, тоді

$$C = C_z = \sigma_z^b \left(1 - 0,5\varepsilon_z^b\right)^2. \quad (21)$$

Таким чином, умова втрати стійкості пластичного деформування трубки унаслідок дії осьової сили N матиме вигляд:

$$\sigma_z = C_z \cdot \left(1 - \frac{n+1}{n} \varepsilon_z\right)^{\frac{\frac{1}{k} - 2 - \frac{\mu}{k} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n}{2 - \frac{1}{k} + \frac{\mu}{2k} \cdot n+1}}. \quad (22)$$

Отож, використавши формули (1), (2) та врахувавши, як виражаються головні напруження і деформації через узагальнені координати, що показано в [8], отримаємо дві умови граничної рівноваги пластичного деформування трубки під дією осьового зусилля N та внутрішнього тиску P :

$$\sigma_{екв} = C_\theta \cdot \frac{P}{2} \left[\frac{K_p}{2}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{3p \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) [2K_p]^{\frac{1}{p}} + 2 \left(2 - k + \frac{\mu}{2}(k+1)\right) (p+1) \varepsilon_{екв}}{3p [2K_p]^{\frac{1}{p}} - 2(k+1)(p+1) \varepsilon_{екв}}, \quad (23)$$

$$\sigma_{екв} = C_z \cdot \frac{P}{2k} \left[\frac{K_p}{2}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{1 - (k+1) \frac{2(p+1)}{3p} \cdot \frac{\varepsilon_{екв}}{\left[2K_p\right]^{\frac{1}{p}}}\right\}^{\frac{(1-2k)^2 + \mu(k+1)}{\left(1 - 2k - \frac{\mu}{2}\right)(k+1)}}, \quad (24)$$

де $K_p = |k|^p + |k-1|^p + 1$.

Умова (23) є умовою втрати стійкості пластичного деформування трубки унаслідок досягнення екстремального значення (максимуму) внутрішнім тиском P , а умова (24) описує умову втрати стійкості пластичного деформування трубки унаслідок досягнення розтягувальним зусиллям N свого екстремуму. В обох випадках факторами впливу на втрату стійкості процесу пластичного деформування є, окрім основних властивостей матеріалу зразка, вид напруженого стану (коефіцієнт k) та форма зразка (у даному випадку відношення μ товщини стінки трубки до її радіуса).

Досліджувані матеріали та результати експериментів. Для аналізу умов (23), (24) опрацьовано дослідні дані, наведені в [1], з відтворення плоского напруженого стану через навантаження металевих трубок внутрішнім тиском та розтягувальним зусиллям. Для дослідження вибрали зразки із сталей марок Сталь-45, Сталь (0,37%С), 28Х3СНМФА, 10ГН2МФА та 15Х2МФА.

Діаграми деформування побудовано в системі координат $\sigma_{екв} : \varepsilon_{екв}$ [8]. У цій же системі координат побудовано сімейства ліній (23), (24) для різних значень k . Знайдено координати точок, що лежать на перетині діаграми деформування та граничних ліній.

Таким чином отримано граничні рівні напружень і деформацій, що відповідають моментам втрати стійкості пластичного деформування трубки.

На рис. 2 зображено схематизовану діаграму деформування для Сталі (0,37%С) із $\nu=1,48$, $\mu=0,024$ у системі координат $\sigma_{екв} : \varepsilon_{екв}$ (експериментальні точки апроксимувались прямою лінією) та побудовано граничні лінії, що відповідають умові (23) – рис. 2а, та відповідно умові (24) – рис. 2б для різних значень k . Отримані граничні значення залишкових деформацій – на рис.3. Як і при дослідженні пластинчастих зразків в умовах двовісного розтягу [8], найменший рівень граничних залишкових деформації отримано при співвідношеннях головних напружень 1:2 та 2:1, що пояснює одержані в роботах [1; 9] результати експериментів. Найбільшого рівня залишкові деформації досягають при трьох значеннях співвідношень головних напружень: $k = 0$, $k = \infty$ та $k \approx 0,9$.

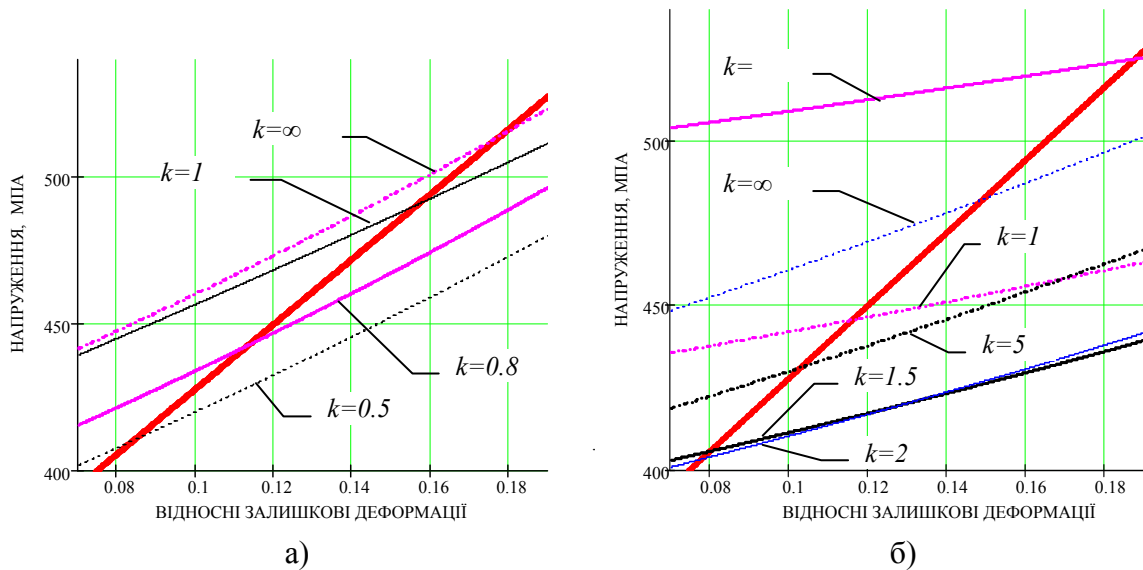


Рисунок 2 – Схематизована діаграма деформування Сталі(0,37%С) – товста лінія та граничні криві, побудовані за умовами 23 (рис.2а) та 24 (рис.2б) для різних значень k

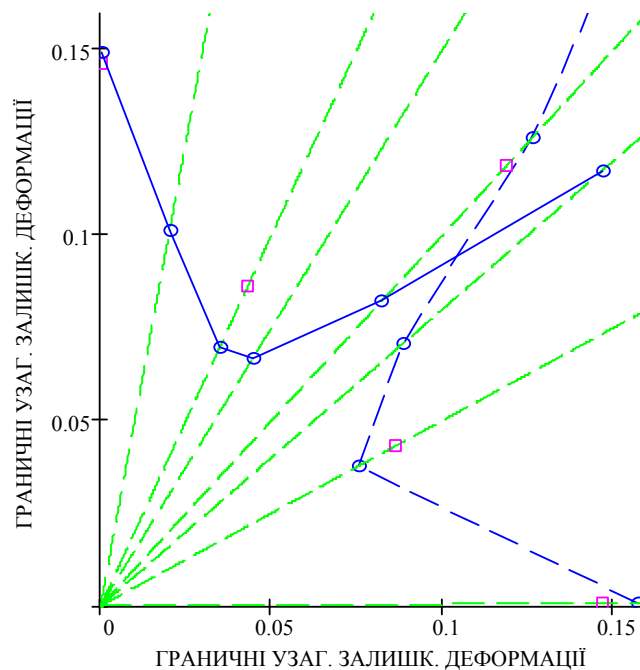


Рисунок 3 – Залежність граничних пластичних деформацій від виду напруженого стану для Сталі (0,37%С). Штрихова лінія – граничні деформації, отримані за умовою (23), суцільна лінія – граничні деформації, отримані за умовою (24), \square – експериментальні дані

На рис. 4 зображено залежність граничних напружень від виду напруженого стану з урахуванням коефіцієнта μ . Криві побудовано для значень $\mu=0,024; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 0,9$. Із зображеного на рисунку можна зробити висновок, що відношення μ товщини стінки трубки до її радіуса в умовах тонкостінності ($\mu \leq 0,1$) практично не впливає на значення максимальних напружень, що передують утворенню шийки. Для випадку товстостінної труби ($\mu > 0,1$) і діапазону співвідношень осевого та колового напружень $k=0 \div 2$ спостерігаємо збільшення розрахункового ресурсу трубки. Суттєве відхилення форми залежності розрахункових граничних напружень від виду напруженого стану для $\mu \rightarrow 0,1$ можна пояснити тим, що обрана модель не враховує впливу радіальної компоненти напружень, нехтувати якою у цьому випадку не можна [10]. Частина графіка для значень $k=2 \div \infty$ (одновісний розтяг) залишається практично незмінною.

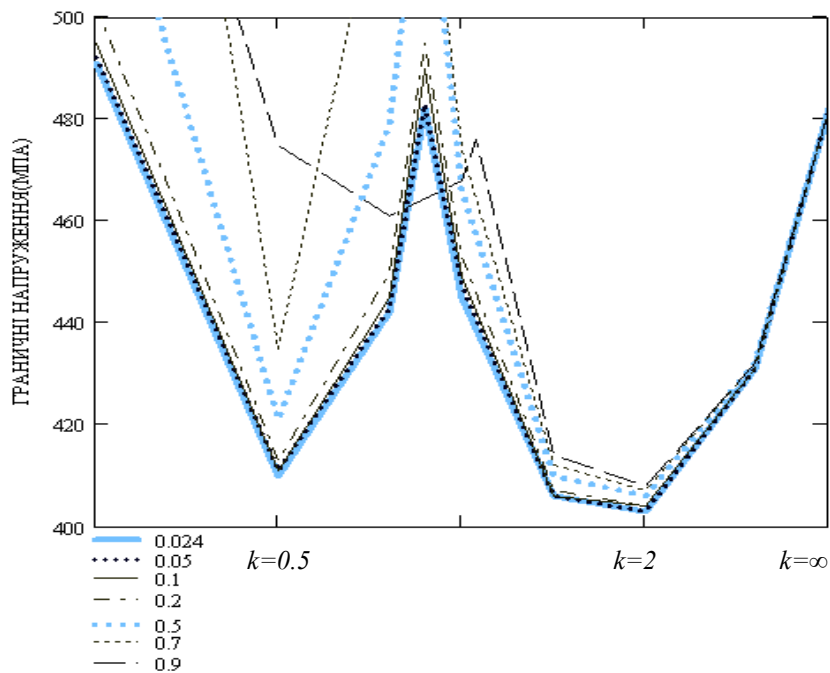


Рисунок 4 – Залежність граничних напружень від виду напруженого стану для різних значень коефіцієнта μ : 0.024, 0.05, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9

Аналіз результатів дослідження інших чотирьох марок сталей із різними значеннями параметра p показав, що якісна картина залишається аналогічною. Найбільші граничні напруження досягаються при $k=0$, $k=\infty$ та для значень k , незначно менших за одиницю, найменші напруження – при співвідношеннях головних напружень, рівних 0,5 та 2, співвідношення граничних напружень $\sigma_{(k=2)}^b / \sigma_{(k=0.5)}^b$ наведені у таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення параметра p_{onm} та міцність досліджуваних матеріалів

№з/п	Марка сталі	p_{onm}	$\sigma_{(k=2)}^b / \sigma_{(k=0.5)}^b$
1	Сталь-45	1,29	1,03
2	Сталь (0,37%С)	1,48	0,98
3	28Х3СНМФА	1,51	0,92
4	10ГН2МФА	1,63	0,89
5	15Х2МФА	1,83	0,94

Аналіз даних таблиці 1 показав, що значення співвідношення $\sigma_{(k=2)}^b / \sigma_{(k=0.5)}^b$ є

близьким до 1 і зростає при наближенні значень параметра p до своїх граничних значень, тобто при $p \rightarrow 1$ або $p \rightarrow 2$ – рисунок 5. Дослідження більшої кількості матеріалів дозволить підтвердити чи спростувати існування такої залежності.

Висновки. Розроблено методику, яка дає можливість прогнозувати поведінку тонкостінних ($\mu \leq 0,1$) циліндричних трубчастих зразків металевих ізотропних матеріалів, навантажених внутрішнім тиском та осьовим розтягувальним зусиллям, виходячи із результатів двох експериментів – навантаження внутрішнім тиском P та одновісного розтягу силою N ; отримано умови граничної рівноваги пластичного деформування (23) та (24).

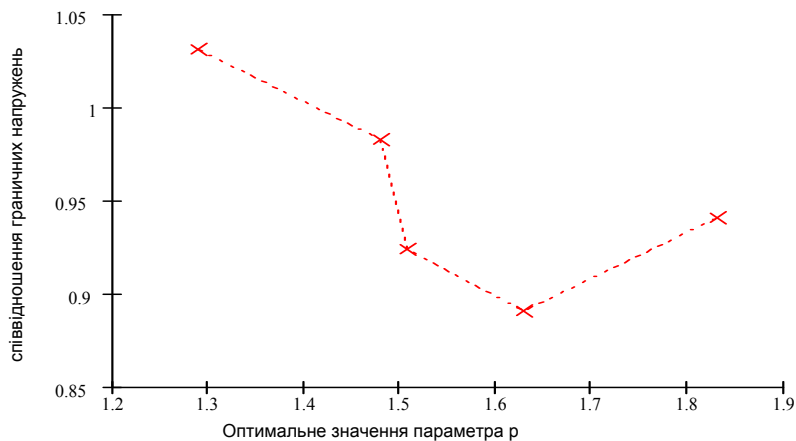


Рисунок 5 – Залежність співвідношення граничних напружень $\sigma_{(k=2)}^b / \sigma_{(k=0.5)}^b$ від константи p

Аналіз результатів дослідження показав, що рівень граничних напружень та залишкових пластичних деформацій залежить не лише від значень граничних осьових та колових напружень і деформацій, а й від виду напруженого стану (коефіцієнта k) та безрозмірної константи матеріалу p , що визначається для кожного матеріалу через оптимізацію.

Строго доведено факт зменшення ресурсу пластичності тонкостінних металевих трубок при співвідношеннях головних напружень 1:2 та 2:1, що пояснює результати експериментів, наведених в [1, 9].

Узагальнення запропонованої методики для тонкостінних оболонок різної форми дозволить застосувати її до широкого класу конструкційних елементів, що працюють в умовах складнонапруженого стану.

Література

1. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Ф.Ф. Гигиняк, В.П. Ламашевский; под ред. А.А. Лебедева. – К. : Издательский Дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.
2. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / [В.Т.Трошенко, А.А. Лебедев, В.А. Стрижало и др.] – К. : Логос, 2000. – 571 с.
3. Потапова Л.Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? / Л.Б. Потапова, В.П. Ярцев. – М. : Издательство «Машиностроение-1», 2005. – 244 с.
4. Хосферд В. Ф. Обобщенный критерий текучести для изотропного материала / В.Ф. Хосферд // ASME. Серия E, 1972. – 2. – С. 290–294.
5. Шкодзінський О.К. Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану / О.К. Шкодзінський, Г.В. Козбур, С.М. Костишин // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №1. – С. 25–30.
6. Jelinek J. Plastic Flow in Metals Research report / J. Jelinek, A. Latter, E.G. Thomsen, J.E. Dorn. – War production Board, 1945. – 210 p.
7. Каминский А.А. Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения / А.А. Каминский, В.Н. Бастун. – К. : Наук.думка, 1985. – 168 с.
8. Шкодзінський О.К. Методика дослідження стійкості процесу пластичного деформування ізотропних матеріалів для плоского напруженого стану / О.К. Шкодзінський, Г.В. Козбур // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – Т.12, №4. – С. 26–31.

9. Yoshida K. Effect of strain hardening behaviour on forming limit stresses of steel tube subjected to nonproportional loading paths / K. Yoshida, T. Kuwabara. – Int. J. Plasticity. – 2007. – Режим доступу: www.elsevier.com/locate/ijplas/
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Феодосьев В.И. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 512 с.

Одержано 20.08.2009 р.