

УДК 539.3

**О. Трохимчук; А. Сяський, докт. техн. наук**

*Рівненський державний гуманітарний університет*

## **ТИСК ЖОРСТКОГО ШТАМПА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ НА ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИЙ КОНТУР ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ**

*Побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта і логарифмічними ядрами в задачі про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсиленій еліптичний контур нескінченної ортотропної пластинки. Методом механічних квадратур і колокації досліджуємо вплив на напружений стан пластинки анізотропії її матеріалу, форми еліптичного отвору, величини зони контакту, жорсткості підсилювального ребра.*

**Ключові слова:** нескінченна пластинка, еліптичний отвір, зона контакту, частково підсилений контур, ортотропні матеріали, напружений стан, інтегрально-диференціальні рівняння.

**O. Trokhymchuk, A. Syasky**

## **PRESSURE OF A STIFF PUNCH WITH ANGULAR POINTS ON PARTLY STRONGER CONTOUR OF ELLIPTICAL HOLE IN AN INFINITE ORTHOTROPIC PLATE**

*The system of singular integral differential equations with Gilbert kernels and logarithmic kernels in problems of pressure of a stiff punch with angular points on partly stronger contour of elliptical hole in an infinite orthotropic plate is built. It is exploring an influence of anisotropy of plate's material, an elliptical hole's shape, an interface's size and a booster rib's stiffness on stained state of a plate by method of mechanical quadrature and collocation.*

**Key words:** an infinite plate, an elliptical hole, an interface, a partly stronger contour, orthotropic materials, a stained state, integral-differential equations.

Зростаючі вимоги до надійності й довговічності інженерних конструкцій зумовлюють необхідність розв'язання якісно нових задач контактної взаємодії масивних і тонкостінних твердих, як способу передачі, зовнішніх сил. Це, зокрема, задачі про контакт циліндричних тіл із гладкими і ребристими поверхнями, узагальнені контактні задачі при наявності за межами зони контакту підсилювальних ребер змінної жорсткості. Вони стали особливо актуальними у зв'язку із розробленням і удосконаленням нових композиційних матеріалів.

Задачі про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на контур еліптичного отвору в нескінченній ортотропній пластинці та часткове підсилення контуру отвору тонкими пружними ребрами змінної жорсткості розглянуто в [1-3].

Пропонуємо розв'язок мішаної контактної задачі про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсиленій контур еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки.

**1. Постановка задачі. Система інтегрально-диференціальних рівнянь.** Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною  $2h$  з еліптичним отвором, контур якого  $\Gamma$  має вигляд правильного  $N$ -кутника із закругленими кутами. Систему прямокутних  $(x, y)$  і полярних  $(r, \delta)$  координат у середній площині пластинки оберемо таким чином, щоб початок відліку співпадав із центром отвору, а полярна вісь – із віссю абсцис (рис.1). Припустимо, що головні напрямки ортотропії матеріалу пластинки співпадають із напрямками координатних осей.

В отвір пластинки вставлено симетричний відносно осі  $Ox$  абсолютно жорсткий штамп з кутовими точками такої ж кривини, як і контур отвору  $\Gamma$ . Вважаємо, що

гладкий контакт між пластинкою та штампом відбувається на ділянці  $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ , ( $\alpha_0^*$  – полярний кут межі зони контакту) і забезпечується силою  $P_0$ , яка діє у напрямку осі  $Ox$ . Зовнішнього навантаження на пластинку немає.

За межами зони контакту на симетричній ділянці  $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$  ( $\beta_0^* + \alpha_0^* < \pi$ ) контур отвору підсилено тонким ребром, яке будемо моделювати пружною лінією змінної жорсткості на розтяг (стиск).

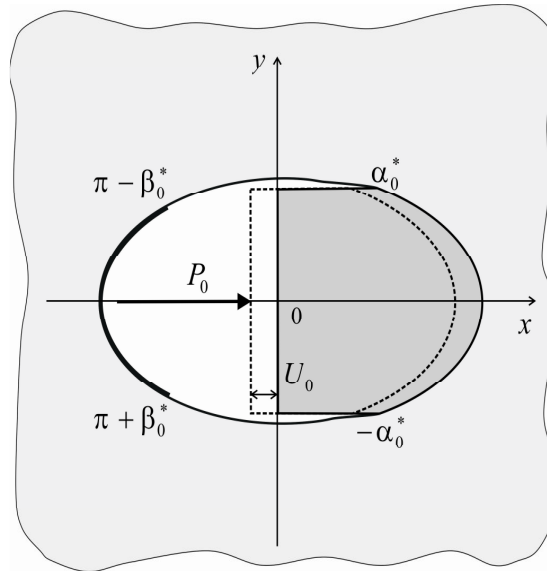


Рисунок 1 – Розрахункова схема пластинки

Розв’язок задачі полягає у визначенні контактних нормальних  $T_\rho$  і дотичних  $S_{\rho\lambda}$  зусиль під штампом та на ділянці підсилення, а також кільцевих зусиль  $T_\lambda$  на контурі отвору.

Конформне відображення зовнішності  $S^-$  одиничного кола  $\gamma$  в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область, яку займає середня площа пластинки, здійснюється за допомогою раціональної функції [4]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left( \xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right), \quad (1)$$

де  $R_0 = \frac{a+b}{2}$  – характерний розмір отвору (вважаємо, що  $R_0 = 1$ );  $\varepsilon$  – ексцентриситет еліпса;  $i = \sqrt{-1}$ .

Граничні умови в зоні контакту пластинки і штампа, якщо немає сил тертя, мають вигляд [5],

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = U_0; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \quad (2)$$

Тут

$$a(\lambda) = (1 - \varepsilon) \cdot \cos \lambda; \quad b(\lambda) = (1 + \varepsilon) \cdot \sin \lambda;$$

$[-\alpha_0; \alpha_0]$  – образ ділянки  $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$  при відображенні (1);  $U, V$  – компоненти вектора зміщення контурних точок;  $U_0$  – поступальне горизонтальне зміщення штампа.

У зоні підсилення граничні умови, згідно з [3], запишемо так:

$$T_{\rho} = \frac{E_0 F(s)}{\tilde{\rho}} \varepsilon_{\lambda}; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_{\rho}}{\partial \lambda} + \frac{6\beta(\lambda)(K(\lambda) - 2\alpha(\lambda))T_{\rho}}{\Omega^2(\lambda)}; \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \quad (3)$$

де

$$K(\lambda) = |\omega'(\sigma)|^2 = \alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda); \quad \Omega(\lambda) = -K(\lambda) + 2\alpha(\lambda);$$

$$\alpha(\lambda) = 1 - \varepsilon \cdot \cos(2\lambda); \quad \beta(\lambda) = \varepsilon \cdot \sin(2\lambda);$$

$E_x, E_y$  – модулі Юнга матеріалу пластинки в напрямках осей  $Ox, Oy$  відповідно;  $\tilde{\rho}$  – радіус кривини контуру  $\Gamma$ ;  $E_0 F(s)$  – змінна жорсткість підсилення на розтяг (стиск);  $F(s) = 2h_0 b_0(s)$ ;  $b_0(s)$  – змінна ширина ребра,  $2h_0$  – його товщина;  $s$  – дуга на контурі отвору;  $[\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$  – образ ділянки  $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$  при відображенні (1).

Відносна осьова пружна деформація  $\varepsilon_{\lambda}$  контуру  $\Gamma$  на підставі [3] визначається за формулою

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda} = \frac{1}{2E_x h K(\lambda)} & \left[ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) K(\lambda) T_{\rho}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left( R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right) T_{\rho}^0(t) dt + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left( R(\lambda, \tilde{t}) + Q(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{T}_{\rho}(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left( Q(\lambda, \tilde{t}) - R(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{t}) d\tilde{t} + \\ & \left. + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}^0 + \beta(\lambda) \tilde{V}^0 \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$T_{\rho}(\lambda) = \begin{cases} T_{\rho}^0(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{T}_{\rho}(\lambda), & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ 0, & \lambda \notin [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0(\lambda) = 0, & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda), & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ 0, & \lambda \notin [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases}$$

$$R(\lambda, t) = [\alpha(\lambda)\alpha(t)c_2 + \beta(\lambda)\beta(t)c_4 - (\beta(\lambda)\alpha(t) + \alpha(\lambda)\beta(t))c_3];$$

$$Q(\lambda, t) = [-\alpha(\lambda)\beta(t)c_2 + \beta(\lambda)\alpha(t)c_4 + (\beta(\lambda)\beta(t) - \alpha(\lambda)\alpha(t))c_3]; \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} [(1 - \beta_1 \beta_2) \cos^2 \lambda - 1]; \quad c_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} (1 - \beta_1 \beta_2) \cos \lambda \sin \lambda;$$

$$c_4 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} [(1 - \beta_1 \beta_2) \sin^2 \lambda - 1];$$

$$\tilde{\varepsilon}^0 = \frac{P_0}{2\pi} (\beta_1 \beta_2 (1 + \beta_1 + \beta_2) - \nu_x) \cos \lambda; \quad \tilde{V}^0 = -\frac{P_0}{2\pi} (\beta_1 \beta_2 (1 + \beta_1 + \beta_2) - \nu_x) \sin \lambda;$$

$e^{it}$  – точка на  $\gamma$ ;  $\tilde{t} = t - \pi$ ,  $t \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ ,  $\tilde{t} \in [-\beta_0; \beta_0]$ ;  $\beta_1, \beta_2$  – корені характеристичного рівняння [4];  $\nu_x$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямку осі  $Ox$ .

Компоненти вектора зміщення контурних точок при заданому навантаженні відповідно до [1,2] запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
 U|_{\Gamma} &= \frac{1}{2E_x h} \left[ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_0^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_0 \right]; \\
 V|_{\Gamma} &= \frac{1}{2E_x h} \left[ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_0^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \cdot \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + \frac{(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) P_0 \lambda}{2\pi} \right], \quad (6)
 \end{aligned}$$

де

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds; \quad e^{i\theta} = \sigma \cdot \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; \quad ds = \tilde{\rho} d\theta = |\omega'(\sigma)| d\lambda; \quad \sigma = e^{i\lambda};$$

$$f_j'(\lambda) = \begin{cases} f_j'(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ 0, & \lambda \notin [-\alpha_0; \alpha_0]; \end{cases} \quad f_j'(\lambda) = \begin{cases} \tilde{f}_j'(\lambda), & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ 0, & \lambda \notin [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases} \quad j = 1, 2; \quad (7)$$

$ds$  – елемент дуги;  $\theta$  – кут між нормаллю до контуру  $\Gamma$  і віссю  $Ox$ ;  $C_0$  – стала.

Підставляючи співвідношення (4) – (7) в граничні умови (2), (3), отримаємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення зусиль  $T_{\rho}^0$ ,  $\tilde{T}_{\rho}$ ,  $\tilde{S}_{\rho\lambda}$  у зоні контакту і на ділянці підсилення:

$$\begin{aligned}
 &\left[ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_0^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \cdot \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \\
 &\quad + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_0^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] - C^* = -\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \cdot \frac{(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) P_0 \lambda}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0]; \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{\rho}(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{5}{2}}(\lambda)} \cdot \frac{E_0 F(s)}{2E_x h} &\left[ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) K(\lambda) T_{\rho}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left( R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right) T_{\rho}^0(t) dt + \right. \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left( R(\lambda, \tilde{t}) + Q(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{T}_{\rho}(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left( Q(\lambda, \tilde{t}) - R(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{t}) d\tilde{t} \left. \right] = \\
 &= \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{5}{2}}(\lambda)} \cdot \frac{E_0 F(s)}{2E_x h} \cdot \frac{P_0}{2\pi} [\beta_1 \beta_2 (1 + \beta_1 + \beta_2) - \nu_x] (1 - \varepsilon) \cos \lambda;
 \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_{\rho}(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{6\beta(\lambda)(K(\lambda) - 2\alpha(\lambda))T_{\rho}(\lambda)}{\Omega^2(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0],$$

де  $C^* = 2EhU_0 - C_0$ .

Величини  $f_1', f_2', \tilde{f}_1', \tilde{f}_2'$  з контактними зусиллями  $T_{\rho}^0, \tilde{T}_{\rho}, \tilde{S}_{\rho\lambda}$  зв'язані залежностями

$$T_{\rho}^0 = \frac{a(\lambda)f_2'(\lambda) - b(\lambda)f_1'(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \frac{-a(\lambda)f_1'(\lambda) - b(\lambda)f_2'(\lambda)}{K(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0];$$

$$\tilde{T}_{\rho} = \frac{a(\lambda)\tilde{f}_2'(\lambda) - b(\lambda)\tilde{f}_1'(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \tilde{S}_{\rho\lambda} = \frac{-a(\lambda)\tilde{f}_1'(\lambda) - b(\lambda)\tilde{f}_2'(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]. \quad (9)$$

Крім системи (8) і співвідношень (9), повинні виконуватися умови рівноваги штампі і підсилення [2,3]

$$\int_{-\alpha_0^*}^{\alpha_0^*} (T_{\rho} + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = -P_0; \quad \int_{\pi - \beta_0^*}^{\pi + \beta_0^*} (T_{\rho} + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = 0, \quad (10)$$

з яких випливає

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) dt = -P_0; \quad T_{\rho}(\pi - \beta_0) = T_{\rho}(\pi + \beta_0) = 0. \quad (11)$$

Якщо величини  $T_{\rho}^0, \tilde{T}_{\rho}, \tilde{S}_{\rho\lambda}$  стануть відомі, то кільцеві зусилля  $T_{\lambda}$  на контурі отвору визначаються за формулою [3], яку можна записати у вигляді

$$T_{\lambda} = -T_{\rho} - \frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \cdot [B_1(\lambda)R_1 + B_2(\lambda)R_2] - \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \cdot [B_3(\lambda)R_3^* + B_4(\lambda)R_4^*] +$$

$$+ \frac{P_0}{2\pi\Delta_1\Delta_2} \cdot [\beta_1\beta_2(1 + \beta_1 + \beta_2) - \nu_x] \cdot [a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda] \cdot b \cdot \cos \lambda. \quad (12)$$

Тут введено такі позначення:

$$B_1(\lambda) = a^3 \sin^4 \lambda + \beta_1\beta_2 b^3 \cos^4 \lambda - ab \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda [a(1 - \beta_1 - \beta_2) - b(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2)];$$

$$B_2(\lambda) = \sin \lambda \cos \lambda [a^3 \sin^2 \lambda - \beta_1\beta_2 b^3 \cos^2 \lambda + (1 - \beta_1 - \beta_2)a^2 b \sin^2 \lambda +$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2)ab^2 \cos^2 \lambda];$$

$$B_3(\lambda) = a^3 \sin^4 \lambda + \beta_1\beta_2 b^3 \cos^4 \lambda - ab \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda [a(1 + \beta_1 + \beta_2) + b(\beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2)];$$

$$B_4(\lambda) = \sin \lambda \cos \lambda [-a^3 \sin^2 \lambda + \beta_1\beta_2 b^3 \cos^2 \lambda - (1 + \beta_1 + \beta_2)a^2 b \sin^2 \lambda +$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2)ab^2 \cos^2 \lambda]; \quad (13)$$

$$R_1 = -2T_{\rho}^*(\lambda) + \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} [T_{\rho}^*(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2}] dt; \quad R_3 = -4T_{\rho}^*(\lambda) - R_1;$$

$$R_2 = -2S_{\rho\lambda}^*(\lambda) + \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} [S_{\rho\lambda}^*(t) - T_{\rho}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2}] dt; \quad R_4 = 4S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - R_2;$$

$$R_3^* = R_3 \cos 2\lambda + R_4 \sin 2\lambda; \quad R_4^* = R_4 \cos 2\lambda - R_3 \sin 2\lambda;$$

$$T_{\rho}^*(t) = \alpha(t)T_{\rho}(t) - \beta(t)S_{\rho\lambda}(t); \quad S_{\rho\lambda}^*(t) = \alpha(t)S_{\rho\lambda}(t) + \beta(t)T_{\rho}(t).$$

Співвідношення (8), (9), (11), (12) визначають математичну модель задачі про тиск

жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений еліптичний контур нескінченної ортотропної пластинки.

Розглянемо окремі випадки досліджуваної задачі:

- при  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\frac{E_x}{E_y} = 1$  із (8), (9), (11), (12) отримуємо відповідну систему рівнянь для ізотропної пластинки з еліптичним отвором;
- якщо  $E_0 = 0$  (немає пружного підсилення), то одержана система визначає розв'язок задачі про тиск жорсткого симетричного штампа з кутовими точками на вільний еліптичний контур нескінченної ортотропної пластинки [1];
- підставивши в (8), (9), (11), (12)  $\varepsilon = 0$ , знаходимо розв'язок задачі для кругового отвору [2];
- якщо  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , то система (8), (9), (11) визначає розв'язок задачі про тиск клиноподібного штампа (зосередженої сили) на контур частково підсиленого еліптичного отвору в ортотропній пластинці;
- збільшивши зону контакту, можна визначити граничне значення кута  $\alpha_0^{2p}$ , при якому нормальні контактні напруження  $T_\rho^0$  у кутових точках дорівнюють нулю. Це означає, що при такій зоні контакту штамп з кутовими точками визначає той же напружений стан, що і гладкий штамп.

**2. Наближений розв'язок задачі.** Відшукування точного розв'язку системи (8), (9), (11) пов'язане зі значними математичними труднощами. Для наближеного її розв'язку доцільно використовувати числові методи. Оскільки нормальні контактні зусилля  $T_\rho$  на кінцях зони контакту мають кореневу особливість [1,2], а на торцях зони підсилення дорівнюють нулю [3], то дотичні зусилля  $S_{\rho\lambda}$  на торцях зони підсилення відповідно до (3) мають кореневу особливість. Це дає змогу реалізувати наближений розв'язок задачі методом механічних квадратур і колокації [1-3].

Для прикладу досліджено напружений стан на контурі еліптичного отвору ортотропної пластинки. Результати числового розрахунку величин  $\frac{T_\rho^0}{P_0}$ ,  $\frac{T_\lambda}{P_0}$ ,  $\tilde{S}_{\rho\lambda}$  при

$$\varepsilon = 0.2; \alpha_0 = \frac{\pi}{6}; \beta_0 = \frac{\pi}{3}; \frac{E_0}{E} = 5; \frac{h_0}{h} = 1; \frac{b_0}{\rho_0} = 0.05; P_0 = 1; N_0 = 33 \text{ (кількість точок колокації)}$$

наведено на рис.2. Характеристики досліджуваних матеріалів вибиралися з [6]. У наведеному прикладі анізотропія матеріалу суттєво впливає на величину контактних  $T_\rho^0$  і кільцевих зусиль  $T_\lambda$  у центрі зони контакту. Із збільшенням відношення  $\frac{E_x}{E_y}$  контактні зусилля збільшуються, а кільцеві – зменшуються. При дії

одного штампа вплив підсилювального ребра незначний і ним можна знехтувати.

Для кожного з досліджуваних матеріалів встановлено граничний кут  $\alpha_0^{2p}$ , при якому штамп із кутовими точками визначає такий же напружений стан, як і гладкий штамп відповідного розміру.

На рис.3 зображено епюри компонентів напруженого стану при тих самих, що і в попередній задачі, параметрах підсилення. Зауважимо, що в даному випадку нормальні й кільцеві зусилля в околі торців ділянки контакту обмежені, а величина зони контакту практично не залежить від анізотропії матеріалу.

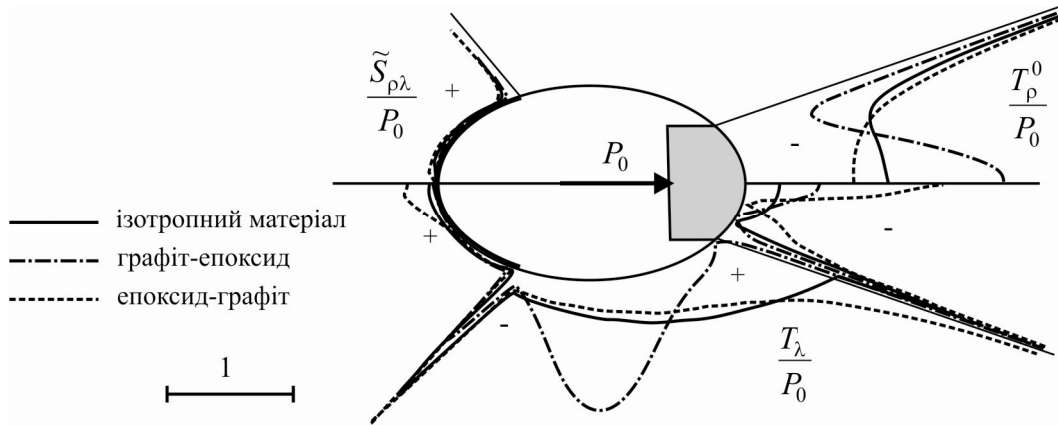


Рисунок 2 – Розподіл контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору

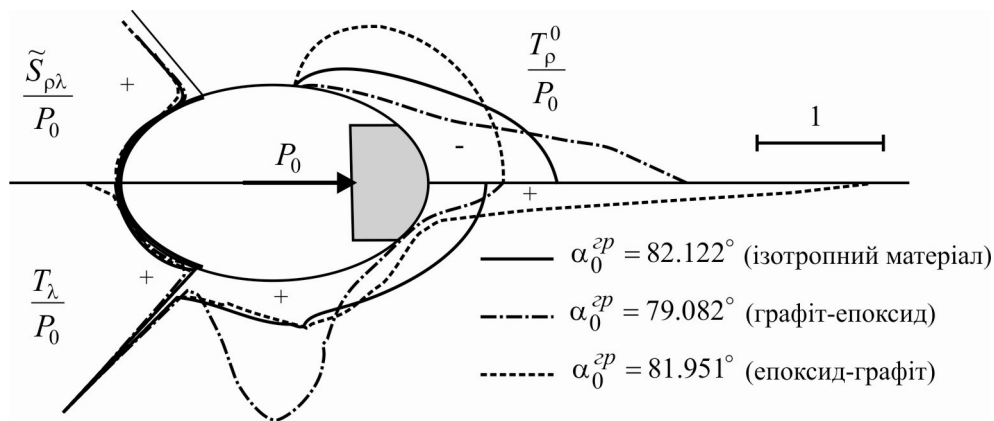


Рисунок 3 – Розподіл контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору

**Висновки.** На підставі результатів числового експерименту можна зробити такі висновки:

- вибравши матеріал пластинки, можна добитися значного зменшення зусилля  $T_{\rho}$  у центрі зони контакту;
- збільшення зони контакту до граничної дозволяє суттєво зменшити контактні зусилля у її центрі й обмежити кільцеві зусилля в околі торців.

### Література

1. Сяський А.О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір в ортотропній пластинці / А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – Рівне, 1997. – Випуск 4. – С. 153 – 156.
2. Сяський А.О. Контактна взаємодія двозв'язного жорсткого штампа з кутовими точками і кругового отвору в ортотропній пластинці / А.О. Сяський, В.А. Сяський // Фізика конденсованих високомолекулярних систем: Наукові записки Рівненського державного педагогічного інституту. – Рівне, 1998. – Вип. 4. – С. 99 – 101.
3. Сяський А. Контактна взаємодія розіркнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник ТДТУ. – Тернопіль, 2004. – Т. 9, № 3. – С. 17 – 24.
4. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки / Лехницький С.Г. – М.:Гостехиздат, 1957. – 464с.
5. Сяський А.О. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Волинський математичний вісник. – Рівне, 2001. – Вип. 8. – С. 93 – 97.
6. Subrata Saha. Concentrated Forces in semiinfinite anisotropic media/ Saha Subrata, Knerjce Subrata, Chang Ehi //J. Compos. Mater. , 1972. – Т.6, № 3. – Р. 403 – 408.

Одержано 22.06.2009 р.