

**А. Власюк<sup>1</sup>, докт. техн. наук; Т. Цветкова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем'янчука,

<sup>2</sup>Національний університет водного господарства та природокористування

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ СОЛЕПЕРЕНОСУ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНОСІ В НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНОМУ ҐРУНТОВОМУ МАСИВІ ЗА НАЯВНОСТІ РУХОМОЇ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ**

**Резюме.** Здійснено математичне моделювання процесу солепереносу при сумісній фільтрації підземних вод та вологопереносі в насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі. Розглянуто задачу безнапірної стаціонарної фільтрації сольових розчинів за наявності рухомої вільної поверхні ґрунтових вод, яка задана на межі областей повного та неповного насичення. Вважається, що сольові розчини знаходяться у ґрунтового середовища з поверхні області неповного насичення і вимиваються через дренаж (осушувальний режим). На основі побудованої математичної моделі даної крайової задачі проведено дослідження процесу солепереносу до дренажу в області повного насичення та процесу вологопереносу з урахуванням солепереносу в області неповного насичення ґрунту; досліджено протікання даних процесів сумісно для обох областей водонасичення. Чисельні розв'язки відповідних крайових задач знайдено методом скінченних різниць із використанням чисельних конформних відображень. На основі програмної реалізації задачі проведено чисельні експерименти та здійснено їх аналіз.

**Ключові слова:** крайова задача, повне та неповне насичення ґрунту, вільна поверхня, солеперенос, вологоперенос, концентрація, напір, різницева схема, конформне відображення.

**A. Vlasyuk, T. Tsvetkova**

## **MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS OF SALT TRANSFER UNDER FILTRATION AND MOISTURE TRANSFER IN SATURATED AND NON-SATURATED SOIL MASS WITH AVAILABLE MOBILE FREE SURFACE**

**Summary.** The mathematical modelling of the process of salt transfer under joint filtration of ground waters and moisture transfer in saturated-non-saturated soil medium has been carried out.

The problem of the free flow stationary filtration of salt solutions under the available mobile free surface of ground waters which is set at the boundary of areas of complete and incomplete saturation has been considered. It is believed that salt solutions enter soil medium from the surface of incomplete saturation and are washed out via drain, i.e. the problem of salt transfer is considered in the case of drainage regime.

On the basis of the built mathematical model of this boundary problem the research of the process of salt transfer to the drain in the area of complete saturation and of the process of moisture transfer taking into account salt transfer in the area of incomplete soil saturation has been conducted.

The comprehensive study of the process of salt transfer in areas of complete and incomplete saturation is carried out. For this purpose these areas of water saturation are considered as one entity with common unknown boundary which is in the process of problem solution. It makes possible to find the interconnection between investigated processes and to carry out their prediction in the area of saturated-non-saturated soil medium.

On the basis of the comprehensive solution of the problem the change of free surface under the influence of processes studied has been established. Numerical solutions of relevant boundary problems are determined by the method of finite differences using numerical conformal mapping. On the basis of programmed implementation of the problem the construction of the conformal mapping in areas of filtration flow, moisture flow and conformal differential network of the area of saturated-non-saturated soil medium has been done; there have been received numerical results and graphical representation of the distribution of the field of piezometric pressure heads, of moisture pressure heads and of concentration of salts in areas of complete and incomplete saturation and also of the distribution of the field of salt solutions concentration in saturated-non-saturated soil mass.

A number of numerical experiments has been conducted which gave the possibility to carry out the analysis of results obtained with different initial data of the problem and to research in detail the nature of the

action of the process of salt transfer under filtration and of moisture transfer in saturated-non-saturated soil medium.

**Key words:** boundary problem, complete and incomplete saturation of soil, free surface, salt transfer, moisture transfer, concentration, pressure head, differential scheme, conformal mapping.

**Умовні позначення:**

$c_1(x, y, t)$ ,  $c_2(x, y, t)$  – масова концентрація розчиненої речовини в рідкій фазі;

$D(c_1)$ ,  $D(c_2)$  – коефіцієнти конвективної дифузії в зонах повного та неповного насичення;

$C^*$  – концентрація граничного насичення;

$v_x^1$ ,  $v_y^1$ ,  $v_x^2$ ,  $v_y^2$  – компоненти швидкості фільтрації та вологопереносу відповідно;

$\gamma$  – коефіцієнт масообміну;

$\sigma$  – пористість ґрунту;

$\mu(h)$  – вологоємність ненасиченого ґрунту;

$K(h)$  – коефіцієнт водопроникності;

$h_1$ ,  $h_2$  – напори рідини та води відповідно;

$k(c, h)$  – коефіцієнт фільтрації, що визначається;

$k_1(c)$  – коефіцієнт фільтрації сольового розчину в зоні повного насичення;

$f(\omega)$  – функція джерела;

$M$  – модуль області;

$\xi, \eta$  – криволінійні координати, до яких здійснюється перетворення вихідної крайової задачі.

**Постановка проблеми.** В останні роки відбулися значні зміни водного режиму як унаслідок дії багаторічних циклічних природно-кліматичних чинників, так і в результаті впливу несприятливих техногенних умов. Перш за все, ці зміни торкнулися гідродинамічного, фізико-хімічного, біохімічного і теплового режимів поверхневих і підземних вод, що у ряді випадків призводить до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів: підтоплення територій, промислових об'єктів, с/г земель, забруднення ґрунтових вод і засолення родючих ґрунтів, а також обвальні процеси, що провоковані надмірним зволоженням і підтопленням ділянок схилів.

Для запобігання кризових ситуацій важливої уваги заслуговують питання дослідження процесів солепереносу при фільтрації підземних вод, що описують поширення забруднення, засолення родючих ґрунтів, та вологопереносу – дослідження динаміки переміщення води в ненасичених ґрунтах. Встановлення напорів води в ґрунтах є важливою проблемою при встановленні кількості водних ресурсів у засушливих регіонах та проектуванні дренажних і зрошувальних систем.

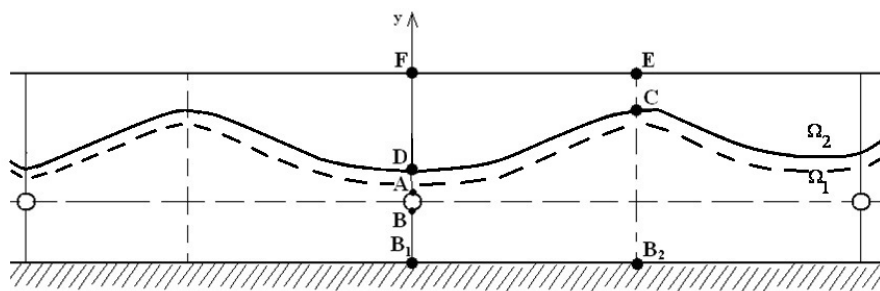
Математичне моделювання цих складних фізичних процесів відкриває можливість проведення чисельних експериментів для розроблення нових технічних рішень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Математичним і комп'ютерним моделюванням описаних вище проблем займалися багато вчених. Зокрема, теорія фільтрації і масопереносу в насичених ґрунтах добре розроблена в роботах М.М. Веригіна, І.В. Сергієнка, В.С. Дейнеки, В.В. Скопечького, І.І. Ляшко, В.І. Лаврика, А.П. Власюка, А.Я. Бомби, Савули Я.Г. та ін. [1–4]. Питання дослідження вологопереносу в ґрунтах закладені в роботах С.Ф. Авер'янова, А. Дарсі, Річардса, О.Я. Олійника, В.Л. Полякова, М.М. Рекса, П.І. Ковальчука та ін.

У названих вище роботах розглядалися процеси вологопереносу та солепереносу окремо в областях повного та неповного насичення відповідно, проведено дослідження вологопереносу без урахування солепереносу в даних областях водонасичення.

**Метою роботи** є дослідження процесу солепереносу при сумісній фільтрації та вологопереносі в областях повного та неповного насичення, які розділені рухомою вільною поверхнею.

**Постановка задачі.** Розглядається задача плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу за наявності рухомої вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод (рис.1).



**Рисунок 1.** Фільтрація сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу

**Figure 1.** Filtration of salt solution to horizontal systematic drainage

У результаті цього, в ґрунтовому масиві утворюється дві області:  $\Omega_1$  – область повного насичення, зайнята фільтраційним потоком;  $\Omega_2$  – область неповного насичення (область вологопереносу). Внаслідок симетрії картини, розглянемо лише виділений її фрагмент  $ABB_1B_2EF$ .

Потрібно дослідити процес фільтрації сольових розчинів до дрени в області повного насичення  $G_1$  та процес вологопереносу з урахуванням солепереносу в області неповного насичення  $G_2$ . Здійснити сумісне дослідження даних процесів у насичено-ненасиченій області. Встановити положення вільної поверхні в процесі розв'язування задачі.

**Математична модель задачі.** Математична модель задачі солепереносу при фільтрації сольових розчинів в області повного насичення  $G_1$  у змінних  $x, y$  має вигляд [3, 6–10]

$$\frac{\partial \left( D(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma(c_1 - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\bar{v} = -k(c_1) \text{grad} h, \quad \text{div } \bar{v} = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1), (2) можна записати у вигляді

$$D(c_1) \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma(c_1 - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$k(c_1) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial k(c_1)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k(c_1)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0,$$

де  $v_1 = v_x^1(c_1) - \frac{\partial D(c_1)}{\partial x}, v_2 = v_y^1(c_1) - \frac{\partial D(c_1)}{\partial y}, v_x^1 = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x}, v_y^1 = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial y}.$

Рівняння (1) доповнюється такими крайовими умовами для концентрації  $c_1(t, x, y)$  сольових розчинів:

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0^1(x, y), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{AD \cup BB_1 \cup B_2C \cup B_1B_2} = 0, \quad c_1 \Big|_{DC} = \tilde{C}_1, \quad c_1 \Big|_{AB} = \tilde{C}_2. \quad (3)$$

На  $CD$  задані умови спряження

$$c_1(x, y, t) = c_2(x, y, t), \quad D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1 = D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2$$

Рівняння фільтрації рідини (2) до горизонтального дренажу доповнюється такими граничними умовами:

$$h \Big|_{AB} = h \Big|_{r=r_1} = H_1, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{BB_1B_2C} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (4)$$

$$h \Big|_{CD} = y, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{CD} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Математична модель задачі масопереносу солей в області неповного насичення  $G_2$  у змінних  $x, y$  фізичної площини описується такими рівняннями:

$$\left( \frac{\partial \left( D(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) - v_1^2(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_2^2(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}(K(h) \operatorname{grad} h), \quad v_1^2 = \omega m^{-1} v_x^2 - \frac{\partial D(c)}{\partial x}, \quad v_2^2 = \omega m^{-1} v_y^2 - \frac{\partial D(c)}{\partial y} \quad (6)$$

при крайових умовах для концентрації солей та напорів води відповідно

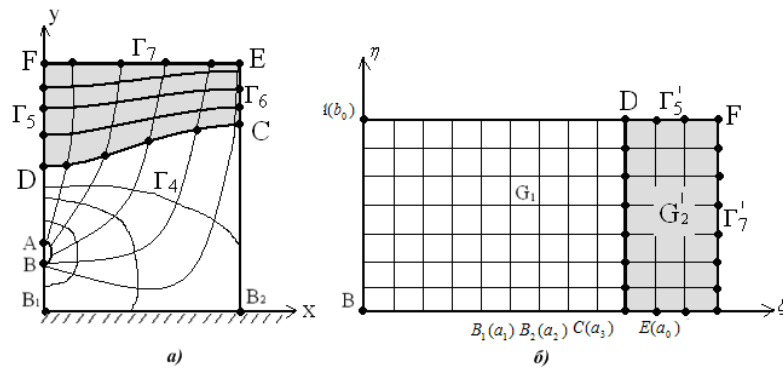
$$\frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{DC} = 0, \quad c_2 \Big|_{FE} = \tilde{C}_1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{DF \cup CE} = 0, \quad c_2 \Big|_{t=0} = \tilde{C}_0(x, y), \quad (7)$$

$$h \Big|_{DC} = y, \quad h \Big|_{FE} = \tilde{H}_1, \quad \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{DF \cup CE} = 0, \quad h \Big|_{t=0} = \tilde{H}_0(x, y). \quad (8)$$

У рівняннях (5), (6) використані залежності  $f(\omega) = (1 - \omega) \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x^2 \frac{\partial(\omega m^{-1})}{\partial x} + v_y^2 \frac{\partial(\omega m^{-1})}{\partial y}$ ,

$$\mu(h) = \frac{\partial \omega}{\partial h}, \quad (p < 0) \quad K(h) = \frac{a_1}{b_1 + p^\alpha} = \frac{a_1}{b_1 + [\rho g(h + y)]^2}.$$

**Чисельний метод розв'язування задачі.** Для знаходження чисельного розв'язку задачі використаємо метод скінченних різниць [11] із застосуванням чисельних конформних відображень в оберненій постановці [5, 7]. У зв'язку з цим відобразимо складену область (рис.2 а) на параметричний прямокутник (рис.2 б). Відображувана область (рис.2 а) складається з двох криволінійних чотирикутників зі спільною невідомою вільною межею (кривою депресії), яка знаходиться в процесі розв'язування задачі.



**Рисунок 2.** Чисельне конформне відображення виділеного фрагмента області  $G_z$  (а) повного та неповного насичення на параметричний прямокутник  $G_x$  (б)

**Figure 2.** Numerical conformal mapping of chosen fragment of area  $G$  (а) of complete and incomplete saturation on parametric rectangular  $G$  (б)

Чисельне конформне відображення параметричного прямокутника  $G_x$  на криволінійний чотирикутник  $G_z$  реалізується парою спряжених гармонічних функцій  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ , які задовольняють умовам Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

а на межі області  $G_\xi$  і кривій депресії  $CD$  – таким граничним умовам:

$$\begin{aligned} AB: x^2(0,\eta) + (y(0,\eta) - y_0)^2 &= r^2, \quad 0 < \eta < b_0, & BB_1: x(\xi,0) &= 0, \quad 0 < \xi < a_1, \\ B_1B_2: y(\xi,0) &= 0, \quad a_1 \leq \xi \leq a_2, & B_2C: x(\xi,0) &= a, \quad a_2 < \xi \leq a_3, \\ CD: \xi &= a_3, \quad (x,y) \in CD, & CE: x(\xi,0) &= a_4, \quad a_3 < \xi \leq a_0, \\ EF: y(a_0,\eta) &= b, \quad 0 < \eta \leq b_0, & FD: x(\xi,b_0) &= 0, \quad a_3 < \xi \leq a_0. \end{aligned}$$

У результаті застосування алгоритму побудови чисельного конформного відображення, розробленого в [5], встановлено взаємно-однозначну відповідність між масивами точок  $(x_{ij}, y_{ij})$  та  $(\xi_i, \eta_j)$  областей  $G_z$  та  $G_\xi$ . Тому перетворимо вихідну крайову задачу до нових змінних  $\xi, \eta$  комплексної площини та побудуємо обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку крайової задачі.

Рівняння фільтрації у змінних  $\xi, \eta$  після перетворень матиме вигляд

$$\bar{A}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \bar{B}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \bar{E}_1 \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \quad (9)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1, \bar{E}_1$  обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{k(c_1)}{I_1}, \quad \bar{C}_1 = \frac{k(c_1)}{I_1}, \quad \bar{B}_1 = 0, \quad \bar{D}_1 = \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta - \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta, \\ \bar{E}_1 &= -\frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\xi + \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\xi, \quad I_1 = y_\xi^2 + y_\eta^2. \end{aligned}$$

Граничні умови для напору в результаті переходу до змінних  $\xi, \eta$  такі:

$$\frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad h \Big|_{AB} = h(0,\eta) = H_1, \quad h \Big|_{CD} = y, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{BB_1 \cup B_2C} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0 \cup x=l} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{B_1B_2} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

Згідно з рівнянням (6), компоненти швидкості фільтрації знаходимо таким чином:

$$v_x = -\frac{k(c_1)}{I_1} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot y_\xi \right), \quad v_y = -\frac{k(c_1)}{I_1} \cdot \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot x_\xi \right).$$

Розв'язок задачі фільтрації (9) у змінних  $\xi, \eta$  знайдемо за ітераційною формулою

$$\text{Гауса-Зейделя} \quad h_{i,j}^{(k+1)} = P_1 h_{i-1,j}^{(k+1)} + P_2 h_{i+1,j}^{(k)} + P_3 h_{i,j-1}^{(k+1)} + P_4 h_{i,j+1}^{(k)}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n},$$

$$\text{де } P_1 = \frac{\bar{A}_1 - \bar{D}_1}{h_1^2 - 2h_1}, \quad P_2 = \frac{\bar{A}_1 + \bar{D}_1}{h_1^2 + 2h_1}, \quad P_3 = \frac{\bar{A}_1 - \bar{E}_1}{h_2^2 - 2h_2}, \quad P_4 = \frac{\bar{A}_1 + \bar{E}_1}{h_2^2 + 2h_2}, \quad P_0 = 2\bar{A}_1 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right).$$

Тоді компоненти швидкості фільтрації обчислюють згідно з формулою

$$v_{x_{i,j}} = -\frac{k(c_1)}{I_1} \left( \frac{(h_{i+1,j} - h_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{4h_1h_2} - \frac{(h_{i,j+1} - h_{i,j-1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{4h_1h_2} \right),$$

$$v_{y_{i,j}} = -\frac{k(c_1)}{I_1} \left( \frac{(h_{i,j} - h_{i-1,j})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{h_1h_2} - \frac{(h_{i,j} - h_{i,j-1})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{h_1h_2} \right),$$

де 
$$I_1 = \frac{1}{4h_1h_2} [(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{ij+1} - y_{ij-1}) - (x_{ij+1} - x_{ij-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})].$$

Рівняння солепереносу (1) для області повного насичення  $G_1$  у змінних  $\xi, \eta$  набуде вигляду 
$$\bar{A}_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} + \bar{D}_2 \frac{\partial c_1}{\partial \xi} + \bar{E}_2 \frac{\partial c_1}{\partial \eta} + \bar{G}_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (10)$$

де 
$$\bar{A}_2 = \frac{D(c_1)}{I_1}, \quad \bar{C}_2 = \frac{D(c_1)}{I_1}, \quad \bar{B}_2 = 0, \quad \bar{G}_2 = -\gamma(c_1 - C^*),$$

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{I_1} (-v_x^1 y_\eta + v_y^1 x_\eta), \quad \bar{E}_2 = \frac{1}{I_1} (v_x^1 y_\xi + v_y^1 x_\xi).$$

Для розв'язання задачі солепереносу (9), (10) застосуємо локально-одновимірний метод О.А.Самарського [11] з використанням монотонної різницевої схеми [12].

Уздовж осі  $O\xi$  маємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_2} \frac{\partial c_1}{\partial \xi} - \frac{0.5\bar{G}_2}{\bar{A}_2} = \frac{0.5}{\bar{A}_2} \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \\ c_1(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \Big|_{AD} = 0, \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \Big|_{BB_1} = 0, \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \Big|_{B_2C} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Монотонна різницева схема для задачі (11) має вигляд

$$\mu_1 \frac{C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{1+}^2 \frac{C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{1-}^2 \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \frac{0.5}{\bar{A}_2} \gamma \left( C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C^* \right) = \frac{0.5}{\bar{A}_2} \sigma \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^k}{0.5\tau},$$

де 
$$\mu_1 = \frac{1}{1 + 0.5h_1|r_1^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1\bar{D}_2}{2\bar{A}_2}}, \quad r_{1-}^2 \equiv 0, \quad r_{1+}^2 = \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_2}. \quad (12)$$

Розв'язок задачі солепереносу знайдемо методом прогонки. Різницева схема (12) в прогоночному вигляді така:

$$a_1 C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_1 C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_1 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_1, \quad (13)$$

де 
$$a_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1}, \quad b_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_1}, \quad c_1 = \frac{-2\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1+}^2}{h_1} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0.5\gamma}{\bar{A}_2} - \frac{\sigma}{\bar{A}_2\tau}, \quad f_1 = \frac{\sigma}{\bar{A}_2\tau} C_{i,j}^k - 0.5\gamma C^*.$$

На основі поздовжньої прогонки, розв'язок (13) представляється у вигляді

$$C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^1 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^1, \quad (14)$$

де 
$$\alpha_{i+1,j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{i,j}^1 a_1}, \quad \beta_{i+1,j}^1 = \frac{a_1 \beta_{i,j}^1 + f_1}{c_1 - \alpha_{i,j}^1 a_1}, \quad \alpha_{1,j}^2 = 1, \quad \beta_{1,j}^2 = 0.$$

Вздовж осі  $O\eta$  маємо крайову задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{E}_2}{A_2} \frac{\partial c_1}{\partial \eta} - \frac{0,5\bar{G}_2}{A_2} = \frac{0,5}{A_2} \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \\ c_1(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{B_1 B_2} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \Big|_{DC} = \tilde{C}_1, \quad c_1 \Big|_{AB} = \tilde{C}_2. \end{cases} \quad (15)$$

Застосувавши до (15) монотонну різницеву схему, отримаємо

$$\mu_2 \frac{C_{i,j-1}^{k+1} - 2C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_+^2 \frac{C_{i,j+1}^{k+1} - C_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_-^2 \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} - \frac{0,5\bar{G}}{A_2} C_{i,j}^{k+1} = \frac{0,5}{A_2} \sigma \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau}, \quad (16)$$

де 
$$\mu_2 = \frac{1}{1 + 0,5h_2 |r_2^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2 \bar{E}_2}{2A_2}}, \quad r_{2-}^2 \equiv 0, \quad r_{2+}^2 = \frac{\bar{E}_2}{A_2}.$$

Різницеву схему (16) згідно з методом прогонки запишемо у вигляді

$$a_2 C_{i,j-1}^{k+1} - c_2 C_{i,j}^{k+1} + b_2 C_{i,j+1}^{k+1} = -f_2, \quad (17)$$

де 
$$a_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_2}, \quad b_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_2}, \quad c_2 = \frac{-2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_2} + \frac{r_{2-}^2}{h_2} - \frac{0,5\gamma}{A_2} - \frac{\sigma}{A_2 \tau}, \quad f_2 = \frac{\sigma}{A_2 \tau} C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 0,5\gamma C^*.$$

Тоді розв'язок задачі солепереносу методом прогонки матиме вигляд

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2, \quad (18)$$

де 
$$\alpha_{i+1,j}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 a_2}, \quad \beta_{i+1,j}^2 = \frac{a_2 \beta_{i,j}^2 + f_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 a_2}, \quad \alpha_{i,1}^2 = 0, \quad \beta_{i,1}^2 = \tilde{C}_{i,0}^{1,k+1}.$$

Побудуємо обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку задачі солепереносу в області неповного насичення  $G_2$ . Рівняння вологопереносу в змінних  $\xi, \eta$  має вигляд

$$\bar{A}_3 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \bar{B}_3 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_3 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \bar{D}_3 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \bar{E}_3 \frac{\partial h}{\partial \eta} = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (19)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_3, \bar{B}_3, \bar{C}_3, \bar{D}_3, \bar{E}_3$  обчислюються аналогічно, як у (9) із заміною  $k(c_1)$  на  $K(h)$ .

Розв'язок задачі (19) знайдемо аналогічно до попередньої, використавши локально-одновимірний метод О.А.Самарського із застосуванням монотонної схеми [11, 12].



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{D}_3}{A_3} \frac{\partial h}{\partial \xi} = \frac{0.5\mu(h)}{A_3} \frac{\partial h}{\partial t}, \\ h(\xi, \eta, 0) = \tilde{H}_0(\xi, \eta), \frac{\partial h}{\partial \xi} \Big|_{DF} = 0, \frac{\partial h}{\partial \xi} \Big|_{CE} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Монотонна різницева схема для задачі (20) має вигляд

$$\mu_3 \frac{H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{3+}^2 \frac{H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{3-}^2 \frac{H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} = \frac{0.5\mu(h)}{A_3} \frac{H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i,j}^k}{0.5\tau}, \quad (21)$$

де

$$\mu_3 = \frac{1}{1 + 0.5h_1|r_3^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1\bar{D}_3}{2A_3}}, \quad r_{3-}^2 \equiv 0, \quad r_{3+}^2 = \frac{\bar{D}_3}{A_3}.$$

Різницева схема (21) в прогоночному вигляді має такий вигляд:

$$a_3 H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_3 H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_3 H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_3, \quad (22)$$

де

$$a_3 = \frac{\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3-}^2}{h_1}, \quad b_3 = \frac{\mu_3}{h_1^2} + \frac{r_{3+}^2}{h_1}, \quad c_3 = \frac{-2\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3+}^2}{h_1} + \frac{r_{3-}^2}{h_1} - \frac{\mu(h)}{A_3\tau}, \quad f_3 = \frac{\mu(h)}{A_3\tau} H_{i,j}^k.$$

Згідно з методом прогонки розв'язок задачі вологопереносу вздовж осі  $O\xi$  має вигляд

$$H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1}^3 H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1}^3, \quad (23)$$

де

$$\alpha_{i+1}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}, \quad \beta_{i+1}^3 = \frac{a_3 \beta_{i,j}^3 + f_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}, \quad \alpha_{1,j}^3 = 1, \quad \beta_{1,j}^3 = 0.$$

Вздовж осі  $O\eta$  маємо крайову задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{E}_3}{A_3} \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{0.5\mu(h)}{A_3} \frac{\partial h}{\partial t}, \\ h(\xi, \eta, 0) = \tilde{H}_0(\xi, \eta), h \Big|_{DC} = y, h \Big|_{FE} = \tilde{H}_1. \end{cases} \quad (24)$$

У результаті застосування монотонної різницевої схеми до (24), отримаємо

$$\mu_4 \frac{H_{i,j-1}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_{4+}^2 \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_{4-}^2 \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} = \frac{0.5\mu(h)}{A_3} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}, \quad (25)$$

де

$$\mu_4 = \frac{1}{1 + 0.5h_2|r_4^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2\bar{E}_3}{2A_3}}, \quad r_{4-}^2 \equiv 0, \quad r_{4+}^2 = \frac{\bar{E}_3}{A_3}.$$

Різницева схема (25) в прогоночному вигляді така:

$$a_4 H_{i,j-1}^{k+1} - c_4 H_{i,j}^{k+1} + b_4 H_{i,j+1}^{k+1} = -f_4, \quad (26)$$

де  $a_4 = \frac{\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4-}^2}{h_2}$ ,  $b_4 = \frac{\mu_4}{h_2^2} + \frac{r_{4+}^2}{h_2}$ ,  $c_4 = \frac{-2\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4+}^2}{h_2} + \frac{r_{4-}^2}{h_2} - \frac{\mu(h)}{A_3 \tau}$ ,  $f_4 = \frac{\mu(h)}{A_3 \tau} H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ .

Згідно з методом прогонки розв'язок задачі вологопереносу має вигляд

$$H_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^4 H_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^4, \quad (27)$$

де  $\alpha_{i+1,j}^4 = \frac{b_4}{c_4 - \alpha_{i,j}^4 a_4}$ ,  $\beta_{i+1,j}^4 = \frac{a_4 \beta_{i,j}^4 + f_4}{c_4 - \alpha_{i,j}^4 a_4}$ ,  $\alpha_{i,1}^4 = 0$ ,  $\beta_{i,1}^4 = \tilde{H}_{i,0}^{2,k+1}$ .

Знайдемо розв'язок задачі солепереносу в області неповного насичення аналогічно до знаходження розв'язку даної задачі в області повного насичення.

Рівняння солепереносу для області неповного насичення у змінних  $\xi, \eta$  має

вигляд 
$$\bar{A}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \bar{B}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} + \bar{D}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \xi} + \bar{E}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (28)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_4, \bar{B}_4, \bar{C}_4, \bar{D}_4, \bar{E}_4$  обчислюються аналогічно, як у (10) із заміною  $v_x^1, v_y^1$  на  $v_x^2, v_y^2$ .

Проводячи стандартну процедуру, описану вище, маємо для проведення повздовжньої прогонки крайову задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{D}_4}{A_4} \frac{\partial c_2}{\partial \xi} - \frac{0,5}{A_4} f(\omega) c_2 = \frac{0,5}{A_4} \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \\ c_2(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), \frac{\partial c_2}{\partial \xi} \Big|_{DF} = 0, \frac{\partial c_2}{\partial \xi} \Big|_{CE} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Монотонна різницева схема задачі (29) має вигляд

$$\mu_5 \frac{C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{5+}^2 \frac{C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{5-}^2 \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \frac{0,5}{A_4} f(\omega) C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{0,5}{A_4} \sigma \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^k}{0,5\tau}, \quad (30)$$

де  $\mu_5 = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \bar{D}_5}{2A_5}}$ ,  $r_{5-}^2 \equiv 0$ ,  $r_{5+}^2 = \frac{\bar{D}_4}{A_4}$ ,

$$\begin{aligned} f(\omega) = & -\frac{\rho^2 g^2}{0,5\tau} \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + y_{ij} \right) \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - h_{ij}^k \right) + \frac{V_x \rho g}{4\sigma h_1 h_2} \left( \left( h_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} \right) (y_{ij+1} - y_{ij-1}) - \right. \\ & \left. - \left( h_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} - h_{ij-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) (y_{i+1j} - y_{i-1j}) \right) - \frac{V_y \rho g}{\sigma h_1 h_2} \left( \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} \right) (x_{ij} - x_{ij-1}) - \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - h_{ij-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) (x_{ij} - x_{i-1j}) \right), \\ & i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

З (30) отримаємо 
$$a_5 C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_5 C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_5 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_5, \quad (31)$$

$$\text{де } a_5 = \frac{\mu_5}{h_1^2} - \frac{r_{5-}^2}{h_1}, \quad b_5 = \frac{\mu_5}{h_1^2} + \frac{r_{5+}^2}{h_1}, \quad c_1 = \frac{-2\mu_5}{h_1^2} - \frac{r_{5+}^2}{h_1} + \frac{r_{5-}^2}{h_1} - \frac{0.5f(\omega)}{A_4} - \frac{\sigma}{A_4\tau}, \quad f_5 = \frac{\sigma}{A_4\tau} C_{i,j}^k.$$

Згідно з методом прогонки розв'язок задачі (31) знайдемо у вигляді

$$C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^5 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^5, \quad (32)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j}^5 = \frac{b_5}{c_5 - \alpha_{i,j}^5 a_5}, \quad \beta_{i+1,j}^5 = \frac{a_5 \beta_{i,j}^5 + f_5}{c_5 - \alpha_{i,j}^5 a_5}, \quad \alpha_{1,j}^5 = 1, \quad \beta_{1,j}^5 = 0.$$

У випадку поперечної прогонки знайдемо розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{E}_4}{A_4} \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) c_2 = \frac{0.5}{A_4} \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \\ c_2(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial c_2}{\partial \eta} \Big|_{DC} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial \xi} \Big|_{FE} = \tilde{C}. \end{cases} \quad (33)$$

Застосувавши до (33) монотонну різницеву схему, отримаємо

$$\mu_6 \frac{C_{i,j-1}^{k+1} - 2C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_{6+}^2 \frac{C_{i,j+1}^{k+1} - C_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_{6-}^2 \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) C_{i,j}^{k+1} = \frac{0.5}{A_4} \sigma \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}, \quad (34)$$

$$\text{де } \mu_6 = \frac{1}{1 + \frac{h_2 \bar{E}_4}{2A_4}}, \quad r_{6-}^2 \equiv 0, \quad r_{6+}^2 = \frac{\bar{E}_4}{A_4}.$$

$$\text{З (34) матимемо } a_6 C_{i,j-1}^{k+1} - c_6 C_{i,j}^{k+1} + b_6 C_{i,j+1}^{k+1} = -f_6, \quad (35)$$

$$\text{де } a_6 = \frac{\mu_6}{h_2^2} - \frac{r_{6-}^2}{h_2}, \quad b_6 = \frac{\mu_6}{h_2^2} + \frac{r_{6+}^2}{h_2}, \quad c_6 = \frac{-2\mu_6}{h_2^2} - \frac{r_{6+}^2}{h_2} + \frac{r_{6-}^2}{h_2} - \frac{0.5f(\omega)}{A_4} - \frac{\sigma}{A_4\tau}, \quad f_6 = \frac{\sigma}{A_4\tau} C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Чисельний розв'язок задачі солепереносу в області неповного насичення має вигляд

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^6 C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^6, \quad (36)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j}^6 = \frac{b_6}{c_6 - \alpha_{i,j}^6 a_6}, \quad \beta_{i+1,j}^6 = \frac{a_6 \beta_{i,j}^6 + f_6}{c_6 - \alpha_{i,j}^6 a_6}, \quad \alpha_{i,1}^6 = 0, \quad \beta_{i,1}^6 = \tilde{C}_{i,0}^{2,k+1}.$$

**Результати дослідження.** Здійснено програмну реалізацію знаходження чисельного розв'язку задачі в інтегрованому середовищі об'єктно-орієнтованого програмування Visual Studio 2010 мовою C#.

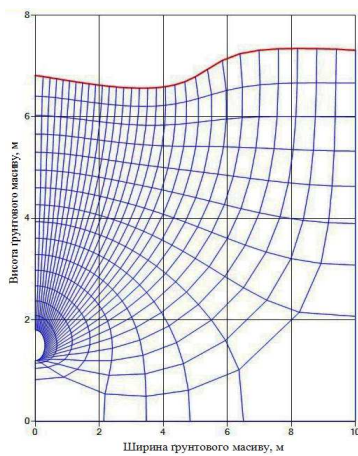
Створена програма є комплексом чисельного розв'язання таких задач: в області повного насичення – побудова чисельного конформного відображення області фільтраційного потоку, задачі фільтрації, задачі солепереносу; в області неповного насичення – побудова чисельного конформного відображення області потоку вологи, задачі вологопереносу, задачі солепереносу, побудова графічних зображень отриманих чисельних результатів. Також знайдено розв'язок задачі солепереносу сумісно для двох

областей водонасичення. На основі комплексного розв'язування задачі в областях повного та неповного насичення встановлено рух вільної поверхні з часом.

Програмна реалізація й чисельні експерименти проводилися при сталих граничних і початкових умовах з такими вхідними даними:

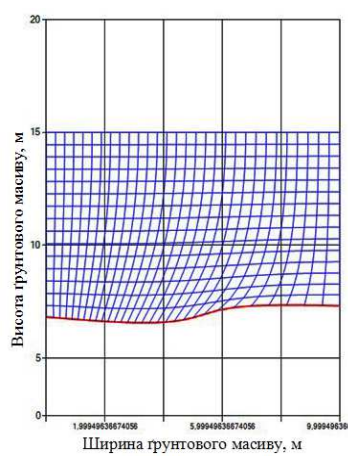
$T = 60 \text{ діб}$ ,  $l_1 = 10 \text{ м}$ ,  $l_2 = 15 \text{ м}$ ,  $\sigma = 0,4$ ,  $\gamma = 0,0065$ ,  $D_m = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{добу}$ ,  $C^* = 350 \text{ г} / \text{літр}$ ,  
 $\tilde{C}_1 = 3 \text{ г} / \text{літр}$ ,  $\tilde{C}_2 = 20 \text{ г} / \text{літр}$ ,  $H_1 = 5 \text{ м}$ ,  $H_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $D(x, y, c) = D_m + \lambda |V(x, y, c)|$ ,  $D_m = 10^{-6}$ ,  
 $\lambda = 1 \div 10$ ,  $p = 360 \text{ Па}$ ,  $g = 9,8 \text{ м} / \text{с}^2$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$ ,  $\lambda = 1 \div 10$ ,  $D_m = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 1 \div 10$ .  
 $k(c) = 0.0002c^6 - 0.00088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.187$ ,  $c \in [0, 1]$  –  
 обзрозмірена величина [13].

Конформні різницеві сітки областей повного, неповного насичення та насичено-ненасиченого ґрунтового середовища наведено на рис.3, 4, 5.



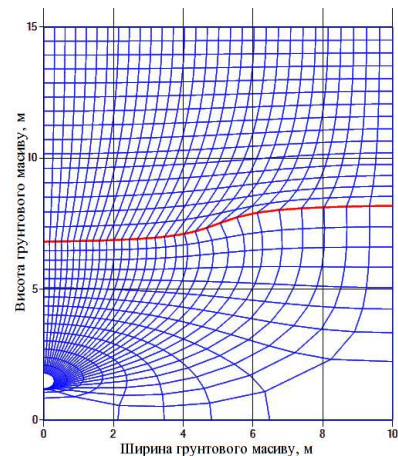
**Рисунок 3.** Конформна різницева сітка області повного насичення

**Figure 3.** Conformal mapping of area of complete saturation



**Рисунок 4.** Конформна різницева сітка області неповного насичення

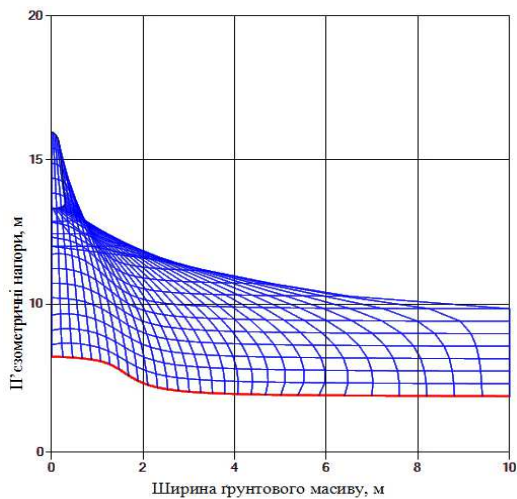
**Figure 4.** Conformal mapping of area of incomplete saturation



**Рисунок 5.** Конформна різницева сітка області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища

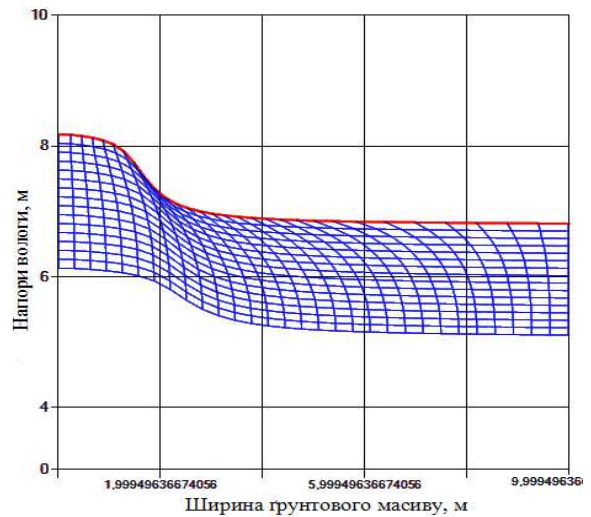
**Figure 5.** Conformal differential network of area of saturated-non-saturated soil medium

Отримані конформні різницеві сітки ортогональні й гідродинамічні. Одне сімейство ізоліній сітки є лініями течії, друге, ортогональне йому, – еквіпотенціальними лініями. На основі візуалізації гідродинамічної сітки потоку рідини видно її згущення до лівої межі області фільтрації. Графіки розподілу п'єзометричного напору та напорів вологи мають вигляд (рис.6, 7).



**Рисунок 6.** Графік розподілу п'езометричного напору, м

**Figure 6.** Chart of distribution of piezometric pressure head, m

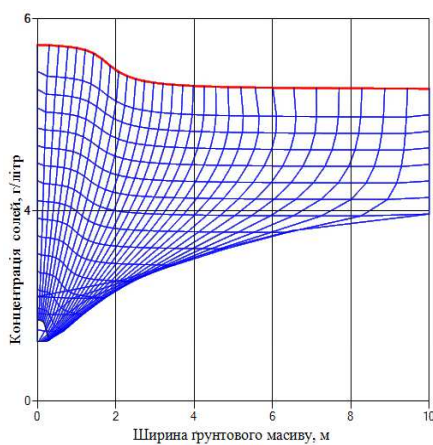


**Рисунок 7.** Графік розподілу напорів вологи, м

**Figure 7.** Chart of distribution of pressure heads of moisture, m

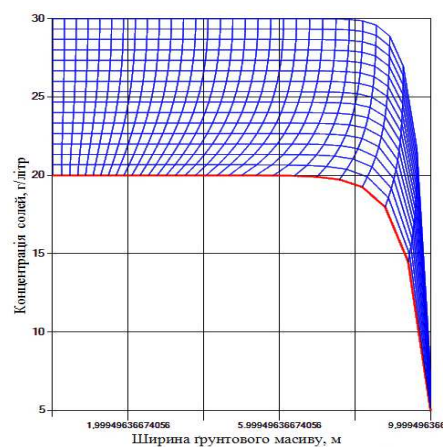
Рис.6 демонструє зростання розподілу п'езометричних напорів з глибиною; найбільші значення напорів спостерігаються в околі дрени. Напір вологи зростає з глибиною і найбільших значень набуває в околі вільної поверхні (рис.7).

У результаті чисельного розв'язання задачі солепереносу в областях повного та неповного насичення отримали такі графіки розподілу концентрації солей (рис.10, 11).



**Рисунок 8.** Графік розподілу концентрації солей в області повного насичення, г / літр

**Figure 8.** Chart of distribution of salts concentration in area of complete saturation, g/l



**Рисунок 9.** Графік розподілу концентрації солей в області неповного насичення, г / літр

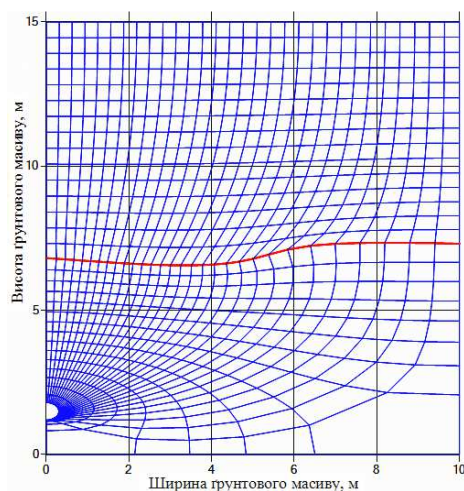
**Figure 9.** Chart of distribution of salts concentration in area of incomplete saturation, g/l

Розподіл концентрації сольових розчинів в області повного насичення солей спадає з глибиною (рис.8), набуваючи найменших значень в околі дрени, де спостерігається зростання швидкості фільтрації сольових розчинів; зростання значень концентрації спостерігається в околі вільної поверхні. Поле розподілу концентрації монотонно спадає по всій області фільтрації за рахунок вимивання сольових розчинів через дренаж. В області неповного насичення значення розподілу поля концентрації сольових розчинів спадають з глибиною, набуваючи найменших значень на вільній

поверхні, тобто розподіл концентрації солей спадає по всій області вологопереносу (рис.9).

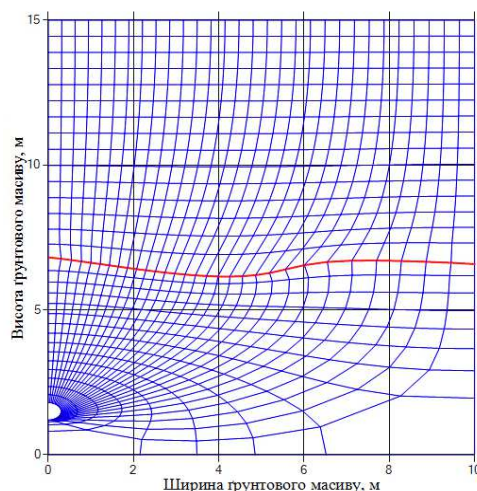
У результаті розв'язання задачі солепереносу в областях повного та неповного насичення у випадку осушувального режиму проведено дослідження руху вільної поверхні з часом та враховано вплив фільтраційного потоку на вигляд вільної поверхні.

Уточнення вільної поверхні проводилось динамічно в ході розв'язку задачі (рис.10).



**Рисунок 10.** Конформна різницева сітка з урахуванням фільтраційного потоку

**Figure10.** Conformal differential network taking into account filtration flow



**Рисунок 11.** Конформна різницева сітка зміни положення вільної поверхні з часом

**Figure 11.** Conformal differential network of change of situation of free surface in time

Порівнюючи рисунки 5, 10, 11, встановлено зміну вільної поверхні з часом у випадку осушувального режиму ґрунтового масиву. Під дією фільтраційного потоку вільна поверхня рухається вниз, що зумовлює перерозподіл напорів та поля концентрації. При цьому значення напорів та концентрації з часом та глибиною спадають.

**Висновки.** Здійснено математичне моделювання солепереносу при фільтрації та вологопереносі в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища з рухомою вільною поверхнею. Розв'язок задачі знайдено методом скінченних різниць із використанням чисельних конформних відображень. Встановлено монотонне спадання концентрації сольових розчинів з глибиною в усій області водонасичення. Під дією фільтраційного потоку вільна поверхня рухається вниз, що зумовлено вимиванням сольових розчинів з пористого середовища через дренаж.

**Conclusions.** The mathematical modelling of salt transfer under filtration and moisture transfer in the area of saturated-non-saturated soil medium with mobile free surface was carried out. The solution of the problem is found by the method of finite differences using numerical conformal mappings. The monotonous decrease of the concentration of salt solutions in the area of water saturation is established. Under the action of filtration flow free surface moves down which is stipulated by the washing out of solutions from porous medium through drain.

#### Список використаної літератури

1. Веригин, Н.Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах [Текст] / Н.Н. Веригин, Б.С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967). – М.: Наука, 1969. – С. 237–313.
2. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах [Текст] / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – С. 27–31.

3. Ляшко, И.И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах [Текст] / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий. – К.: Наук.думка, 1991. – С. 29–33.
4. Лукнер, Л. Моделирование геофильтрации [Текст] / Л. Лукнер, В.М. Шестаков. – М.: Надра, 1976. – С. 68–71.
5. Власюк, А.П. Чисельне розв'язування одного класу крайових задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь [Текст] / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – Київ, 1994. – 24 с.
6. Власюк, А.П. Математичне моделювання фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах в стаціонарному режимі [Текст] / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова: тез. XVIII Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2011. – С. 53–55
7. Власюк, А.П. Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного і неповного насичення [Текст] / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат.науки. – Вип. 1. – 2012. – С. 137–144.
8. Власюк, А.П. Математичне моделювання солеперенесення при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці [Текст] / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Вісник Київського нац. ун-ту. Серія: фіз.-мат.науки. – Вип. 2. – 2013. – С.118–124.
9. Власюк, А.П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній одновимірній постановці [Текст] / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова// Математичне та комп. моделювання [зб. наук. пр.]. Серія: Техн. науки. – Вип. 7.– К-П. НУ ім. І. Огієнка. – 2012. – С.28–42.
10. Власюк, А.П. Математичне моделювання солеперенесення при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах у випадку нестационарного зволожуючого режиму [Текст] / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Тез. XIX Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» – Львів. 2013. – С.38.
11. Самарский, А.А. Численные методы математической физики [Текст] / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М: Наука, 2003. – 316 с.
12. Власюк, А.П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну [Текст] / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – Вип. №3. – 2005. – С.188–197.
13. Власюк, А.П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах [Текст] / А.П. Власюк, М.Т. Кузло //Меліорація і водне господарство.– міжвід. тем. наук. зб. – Вип. 87. – К., 2000. – С. 43–46.

*Отримано 01.03.2014*