

УДК 539.3

**В. Ревенко, канд. фіз.-мат. наук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

## **ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВИМІРНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА**

**Резюме.** Розглянуто тривимірний напружено-деформований стан скінченного багатошарового циліндра, дослідження якого, шляхом відокремлення кутової змінної, зведено до розв'язання одновимірних крайових задач. Уперше побудовано власні функції для багатошарового циліндра з ненавантаженими торцями. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень подано у вигляді рядів, які визначаються власними функціями. З використанням методу найменших квадратів, розв'язання крайових задач зведено до мінімізації узагальноної квадратичної форми. Вперше теоретично встановлені числові критерії збіжності методу і показано, що точність задоволення крайових умов оцінюється одним числом – мінімумом квадратичної форми.

**Ключові слова:** багатошаровий циліндр, власні функції, метод найменших квадратів, напруження, переміщення.

**V. Revenko**

## **DETERMINATION OF THREE-DIMENSIONAL STRESS-STRAIN STATE OF MULTILAYER CYLINDER**

**Summary.** Multilayer elastic cylinders are widely used in construction and engineering designs. In the calculation of the stress-strain state (SSS), the simplified two-dimensional model of cylindrical shells are used or axisymmetrical boundary value problems under static load, which depend only on one spatial variable are considered. However, publications that describe a technique for solving boundary value problems in three-dimensional setting are not available.

Investigation of the three-dimensional boundary-value problems of elasticity theory for multilayer cylindrical bodies are significantly complicated by the need to satisfy many ( more than ten ) conditions of perfect contact of adjacent layers and the boundary conditions. The problem of justification the completeness of solution as the series, research on the convergence of the method, theorem proving the existence and uniqueness of the solution, installation error estimates the meet all conditions has not studied. These issues are discussed in the article.

To solve the three-dimensional boundary value problems the representation of general solution of equations of elasticity theory in a cylindrical coordinate system in three harmonic functions has been used. Countable set of eigenfunctions with nonzero and zero eigenvalues has been built. Components of displacement vector and the stress tensor are presented as series that defined eigenfunctions. The resulting strain is identically zero satisfying the boundary conditions at the ends of the layers. An approximation SSS of each cylinder layer is approximated by the finite sum of eigenfunctions. Basing on the method of least squares the algorithm for numerical solution of boundary value problems for multilayer cylinder has been developed. Satisfaction of all conditions is reduced to minimization of the generalized quadratic form. The method of analytical calculation of the coefficients of the quadratic form that allows to find the value of unknown coefficients of the high accuracy and to improve the performance of the method has been proposed. For the first time the numerical convergence criterion method was established theoretically. It is shown that the accuracy of satisfaction of the boundary conditions and the conditions of perfect contact is measured by a single number - the minimum quadratic form.

**Key words:** eigenfunctions, multilayer elastic cylinder, method of least squares, displacement, stresses.

**Умовні позначення:**

$E_j, \nu_j$  – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона  $j$ -го шару багатошарового циліндра;

$G_j, j = 1, K$  – модулі зсуву шарів циліндра;

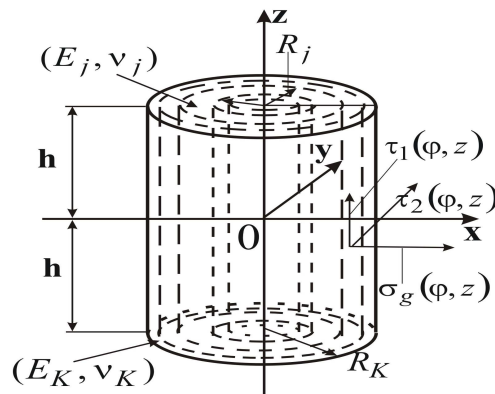
$u_r^j, u_\phi^j, u_z^j$  – компоненти вектора переміщення  $j$ -го шару циліндра;

$k_j = \frac{G_j}{G_{j+1}}, j = \overline{1, K-1}$  – відношення модулів зсуву прилеглих шарів циліндра.

**Вступ.** Багатошарові пружні циліндри – поширені елементи будівельних та інженерних конструкцій. Огляд праць з розв’язування крайових осесиметричних задач для багатошарових циліндрів під дією статичного навантаження, яке залежить тільки від однієї просторової змінної, наведено в публікаціях [1, 2], а під дією динамічного навантаження у [3, 4]. На даний час при розрахунку напруженого стану багатошарових циліндричних тіл широко використовують спрощені двовимірні моделі циліндричних оболонок [5, 6]. Однак майже відсутні публікації, які описують методику розв’язування крайових задач для багатошарових циліндрів у тривимірній постановці.

**Метою роботи** є розроблення методу розв’язування крайових задач для навантаженого багатошарового циліндра як у тривимірній, так і двовимірній постановці та побудова власних функцій, що описують його напружено-деформований стан (НДС).

**Постановка задачі й подання розв’язку.** Знайдемо тривимірний НДС багатошарового циліндра, який знаходиться в стані статичної рівноваги і має  $K$  шарів:  $D_j = \{(r, \varphi, z) \in ([R_{j-1}, R_j] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$ ,  $R_0 = 0$ ,  $R_{j-1} < R_j$  з пружними характеристиками матеріалу  $E_j, \nu_j, j = \overline{1, K}$  (рис.1). До поверхонь циліндра прикладені нормальні та дотичні навантаження.



**Рисунок 1.** Навантаження багатошарового циліндра

**Figure 1.** The loading of multilayer cylinder

Для опису тривимірного НДС  $j$ -го шару багатошарового циліндра використаємо подання загального розв’язку рівнянь Ляме у циліндричній системі координат [7]

$$u_r^j = z \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_j}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi^j = \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q_j}{\partial r},$$

$$u_z^j = z \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - (3 - 4\nu_j) \Phi_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}, \quad j = \overline{1, K}, \quad (1)$$

де  $\Phi_j, \Psi_j, Q_j$  – незалежні гармонічні функції переміщень від трьох координат. Використаємо переміщення (1), формули [8] і знайдемо нормальні

$$\sigma_r^j = 2G_j \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial r^2} - 2\nu_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_j}{\partial \varphi} \right],$$

$$\sigma_z^j = 2G_j \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} - 2(1-\nu_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z^2} \right], \quad (2)$$

$$\sigma_\varphi^j = \frac{2G_j}{r} \left[ \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \varphi^2} + z \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} - 2\nu_j r \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_j}{r \partial \varphi} \right]$$

та дотичні напруження

$$\tau_{r\varphi}^j = G_j \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (z\Phi_j + \Psi_j)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial (z\Phi_j + \Psi_j)}{\partial \varphi} - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial Q_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial \varphi^2} \right],$$

$$\tau_{rz}^j = G_j \left[ 2 \frac{\partial^2 (z\Phi_j + \Psi_j)}{\partial z \partial r} - 4(1-\nu_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial z \partial \varphi} \right], \quad (3)$$

$$\tau_{z\varphi}^j = G_j \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi} (z\Phi_j + \Psi_j) - \frac{4(1-\nu_j)}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 Q_j}{\partial r \partial z} \right], \quad j = \overline{1, K}.$$

Побудові загального виразу основного напруженого стану для скінченного циліндра присвячена робота [9]. Після виділення основного НДС, до кожної з поверхонь циліндра будуть прикладені самозрівноважені навантаження, які мають нульові головні вектори сил і моментів.

Розглянемо детально тривимірний напружений стан багат шарового скінченного циліндра, за якого його торці вільні від навантажень

$$\sigma_z(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, \varphi, \pm h) = 0. \quad (4)$$

Крайові умови на бічній поверхні циліндра мають вигляд

$$\begin{aligned}
 2G_K \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_K}{\partial r^2} - 2\nu_K \frac{\partial \Phi_K}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_K}{r \partial \varphi} \right] &= \sigma_g(\varphi, z), \\
 2G_K \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_K}{\partial z \partial r} - (1 - 2\nu_K) \frac{\partial \Phi_K}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial z \partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 Q_K}{\partial z \partial \varphi} \right] &= \tau_1(\varphi, z), \\
 2G_K \left[ \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \Phi_K}{\partial r \partial \varphi} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \Phi_K}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_K}{\partial \varphi} - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_K}{r \partial r} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 Q_K}{\partial \varphi^2} \right] &= \tau_2(\varphi, z),
 \end{aligned} \tag{5}$$

де  $r = R_K$ ,  $\sigma_g$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_1(\varphi, \pm h) = 0$ ,  $\tau_2$  – відомі неперервні навантаження.

До крайових умов (4), (5) потрібно додати умови спряження на поверхнях контакту шарів,  $r = R_j$ ,  $j = 1, K - 1$ . Вважатимемо, що виконуються умови ідеального контакту, які полягають у неперервності переміщень і напружень:

$$u_r^{j+1} = u_r^j, \quad u_\varphi^{j+1} = u_\varphi^j, \quad u_z^{j+1} = u_z^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \tag{6}$$

$$\sigma_r^{j+1} = \sigma_r^j, \quad \tau_{r\varphi}^{j+1} = \tau_{r\varphi}^j, \quad \tau_{rz}^{j+1} = \tau_{rz}^j, \quad j = \overline{1, K-1}. \tag{7}$$

Врахувавши вираз переміщень (1), розпишемо умови (6)

$$\begin{aligned}
 z \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{j+1}}{\partial \varphi} &= z \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_j}{\partial \varphi}, \\
 \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q_{j+1}}{\partial r} &= \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q_j}{\partial r}, \\
 z \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial z} - (3 - 4\nu_{j+1}) \Phi_{j+1} + \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial z} &= z \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - (3 - 4\nu_j) \Phi_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}, \quad j = \overline{1, K-1}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Використаємо вираз напружень (2), (3) і запишемо умови (7)

$$\begin{aligned}
 z \frac{\partial^2 \Phi_{j+1}}{\partial r^2} - 2\nu_{j+1} \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{j+1}}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_{j+1}}{r \partial \varphi} &= \\
 = k_j \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial r^2} - 2\nu_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_j}{r \partial \varphi} \right], \\
 z \frac{\partial^2 \Phi_{j+1}}{\partial z \partial r} - (1 - 2\nu_{j+1}) \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_{j+1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 Q_{j+1}}{\partial z \partial \varphi} &= \\
 = k_j \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z \partial r} - (1 - 2\nu_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z \partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial z \partial \varphi} \right],
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{j+1}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_{j+1}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial \varphi} - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_{j+1}}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 Q_{j+1}}{\partial \varphi^2} = \\ & = k_j \left[ \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial r \partial \varphi} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi} - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_j}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned}$$

де  $j = \overline{1, K-1}$ . Отже, нам потрібно побудувати такий набір функції переміщень  $\Phi_j$ ,  $\Psi_j$ ,  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, K}$ , який би одночасно задовольнив умови (4)–(7).

Для спрощення задоволення умов (4), (5), (8), (9), використаємо методику відокремлення кутової змінної [7, 10]. Для цього розкладемо функції переміщень у ряди

$$\begin{aligned} \Phi_j(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j,n}(r, z) \cos n\varphi, \quad \Psi_j(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{j,n}(r, z) \cos n\varphi, \\ Q_j(r, \varphi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{j,n}(r, z) \sin n\varphi, \quad j = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\Phi_{j,n}$ ,  $\Psi_{j,n}$ ,  $Q_{j,n}$  – коефіцієнти розкладу функцій переміщень, які для одного і того ж значення індексу  $n$  будуть відповідно розв'язками рівняння

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2} \right\} \Phi_{j,n}(r, z) = 0. \quad (11)$$

Підставимо в крайові умови (5) розклади (10) та врахуємо, що набір функцій  $\{\cos(n\varphi), \sin(n\varphi)\}$  є ортогональним на проміжку  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Після відповідних перетворень отримаємо для  $n > 0$  умови визначення коефіцієнтів розкладу:

$$\begin{aligned} & z \frac{\partial^2 \Phi_{K,n}}{\partial r^2} - 2\nu_K \frac{\partial \Phi_{K,n}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{K,n}}{\partial r^2} + n \frac{\partial}{\partial r} \frac{Q_{K,n}}{r} = \frac{\sigma_{g,n}(z)}{2G}, \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left[ z \frac{\partial \Phi_{K,n}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{K,n}}{\partial z} - (1 - 2\nu_K) \Phi_{K,n} \right] + \frac{n}{2r} \frac{\partial Q_{K,n}}{\partial z} = \frac{\tau_{1,n}(z)}{2G}, \\ & \frac{n}{r} \left[ \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right] (z \Phi_{K,n} + \Psi_{K,n}) - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{K,n}}{\partial r} - \frac{n^2}{2r^2} Q_{K,n} = \frac{\tau_{2,n}(z)}{2G}, \quad r = R_K, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\sigma_{g,n}(z)$ ,  $\tau_{j,n}(z)$ ,  $j = \overline{1, 2}$  – коефіцієнти розкладу навантажень (5) у ряди Фур'є.

У праці [7] наведено алгоритм спрощення умов (4) для суцільного циліндра. Із аналізу співвідношень (2)–(4) випливає, що, у випадку використання методу відокремлення змінних, умови (4) для кожного шару циліндра можна розділити на дві незалежні умови:

$$z \frac{\partial^2 \Phi_{j,n}}{\partial z^2} - 2(1 - \nu_j) \frac{\partial \Phi_{j,n}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{j,n}}{\partial z^2} = 0,$$

$$z \frac{\partial \Phi_{j,n}}{\partial z} - (1 - 2\nu_j) \Phi_{j,n} + \frac{\partial \Psi_{j,n}}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h$$
(13)

для визначення функцій  $\Phi_{j,n}$ ,  $\Psi_{j,n}$ ,  $j = \overline{1, K}$  та

$$\frac{\partial Q_{j,n}}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h$$
(14)

для визначення функцій  $Q_{j,n}$ ,  $j = \overline{1, K}$ .

Аналогічно розкладемо умови спряження (8)

$$z \frac{\partial \Phi_{j+1,n}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{j+1,n}}{\partial r} + \frac{n}{r} Q_{j+1,n} = z \frac{\partial \Phi_{j,n}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{j,n}}{\partial r} + \frac{n}{r} Q_{j,n},$$

$$z \frac{\partial \Phi_{2,n}}{\partial z} - (3 - 4\nu_2) \Phi_{2,n} + \frac{\partial \Psi_{2,n}}{\partial z} = z \frac{\partial \Phi_{1,n}}{\partial z} - (3 - 4\nu_1) \Phi_{1,n} + \frac{\partial \Psi_{1,n}}{\partial z},$$

$$\frac{n}{r} (z \Phi_{j+1,n} + \Psi_{j+1,n}) + \frac{\partial Q_{j+1,n}}{\partial r} = \frac{n}{r} (z \Phi_{j,n} + \Psi_{j,n}) + \frac{\partial Q_{j,n}}{\partial r}, \quad j = \overline{1, K-1}$$
(15)

та умови (9)

$$z \frac{\partial^2 \Phi_{j+1,n}}{\partial r^2} - 2\nu_{j+1} \frac{\partial \Phi_{j+1,n}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{j+1,n}}{\partial r^2} + n \frac{\partial}{\partial r} \frac{Q_{j+1,n}}{r} =$$

$$= k_j \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_{j,n}}{\partial r^2} - 2\nu_j \frac{\partial \Phi_{j,n}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{j,n}}{\partial r^2} + n \frac{\partial}{\partial r} \frac{Q_{j,n}}{r} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ z \frac{\partial \Phi_{j+1,n}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{j+1,n}}{\partial z} - (1 - 2\nu_{j+1}) \Phi_{2,n} \right] + \frac{n}{2r} \frac{\partial Q_{j+1,n}}{\partial z} =$$

$$= k_j \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ z \frac{\partial \Phi_{j,n}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{j,n}}{\partial z} - (1 - 2\nu_j) \Phi_{1,n} \right] + \frac{n}{2r} \frac{\partial Q_{j,n}}{\partial z} \right\},$$

$$\frac{n}{r} \left[ \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right] (z \Phi_{j+1,n} + \Psi_{j+1,n}) - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{j+1,n}}{\partial r} - \frac{n^2}{2r^2} Q_{j+1,n} =$$

$$= k_j \left[ \frac{n}{r} \left[ \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right] (z \Phi_{j,n} + \Psi_{j,n}) - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{j,n}}{\partial r} - \frac{n^2}{2r^2} Q_{j,n} \right],$$
(16)

де  $j = \overline{1, K-1}$ .

У працях [7, 10] побудовано коефіцієнти розкладу функцій переміщень, які є розв'язком рівнянь (11), для суцільного циліндра. Використавши ці подання, знайдемо

коефіцієнти розкладу функцій переміщень для багат шарового циліндра, які описуються всіма власними значеннями та тотожно задовільняють умови (13), (14):

$$\begin{aligned}\Psi_j^n &= h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\delta(\mu_k, \nu_j)[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] \cos(\mu_k \gamma)\} + \\ &+ d_{n,1}^j r^n + d_{n,3}^j \Psi_n^1(r) + (1 - \nu_j)[d_{n,2}^j \Phi_n(r, z) + d_{n,4}^j \Psi_n(r, z)], \\ \Phi_j^n &= h \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] \sin(\mu_k \gamma)\} + \\ &+ z(d_{n,2}^j r^n + d_{n,4}^j r^{-n}), \quad n \geq 0;\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}Q_j^n &= h^2 \sum_{k=1}^{\infty} [g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)] \cos(k\pi\gamma) + \\ &+ 2[d_{n,4}^j \Psi_n(r, z) - d_{n,2}^j \Phi_n(r, z)], \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

де  $a_{n,k}^j, b_{n,k}^j, b_{n,k}^1 = 0$  – комплексні,  $g_{n,k}^j, s_{n,k}^j, s_{n,k}^1 = 0$ ;  $d_{n,m}^j, d_{n,3}^1 = d_{n,4}^1 = 0$ ,  $d_{0,1}^j = d_{0,4}^j = 0$  – дійсні коефіцієнти;  $K_n(r)$  – функції Макдональда [11];  $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$ ,  $\beta_k = \frac{\mu_k}{h}$ ;  $\mu_k, \operatorname{Re}(\mu_k) > 0$  – власні значення, комплексні корені рівняння

$$F^+(\mu) \equiv \sin(2\mu) + 2\mu = 0;\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\delta(\mu, \nu_j) &= -\left[\frac{2(1 - \nu_j)}{\mu} + tg(\mu)\right]; \quad \Phi_n(r, z) = z^2 r^n + \chi_n^1 r^{n+2}, \quad n \geq 0; \quad \Psi_1(r, z) = z^2 r^{-1} - r \ln r, \\ \Psi_n(r, z) &= z^2 r^{-n} + \chi_n^2 r^{2-n}, \quad n \geq 2; \quad \chi_n^m = \frac{-1}{2 - 2(-1)^m n}, \quad m = \overline{1, 2}.\end{aligned}$$

В поданнях (17) коефіцієнти  $a_{n,k}^j, g_{n,k}^j$  відповідають за задоволення умов на поверхнях  $r = R_j$ , а  $b_{n,k}^j, s_{n,k}^j, j > 1$  – на поверхнях  $r = R_{j-1}$ .

Встановлено: характеристичне рівняння (18), ненульові корені якого визначають власні функції, що описують самозрівноважений НДС багат шарового циліндра, не залежить від значення  $n$ ; напруження від власних функцій, що визначаються нульовим власним значенням, описують основний НДС, який відповідає головним векторам сил і моментам, прикладеним до бічних поверхонь шару.

Підставимо функції (10), (17) у співвідношення (1) і знайдемо явний вираз коефіцієнтів переміщень у вигляді рядів за власними функціями для ненульових

$$\begin{aligned}u_{r,n}^j &= h^2 \sum_{k=0}^{\infty} \{\operatorname{Re}\{\chi(\mu_k, \nu_j, \gamma)[a_{n,k}^j I_n'(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n'(\beta_k r)]\} + \frac{n}{r} [g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + \\ &+ s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)] \cos(k\pi\gamma)\}, \\ u_{\phi,n}^j &= -h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{r} \operatorname{Re}\{\chi(\mu_k, \nu_j, \gamma)[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)]\} -\end{aligned}\tag{19}$$

$$-[g_{n,k}^j I_n'(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n'(\lambda_k r)] \cos(k\pi\gamma),$$

$$u_{z,n}^j = h \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\varphi(\mu_k, \nu_j, \gamma)[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)]\}, \quad n \geq 0$$

та нульових власних значень: які не мають

$$\begin{aligned} u_{r,n}^j &= nd_{n,1}^j r^{n-1} + d_{n,2}^j [-\nu_j n z^2 r^{n-1} + [2(1-\nu_j) - n(1+\nu_j)] \chi_n^1 r^{n+1}], \\ u_{\phi,n}^j &= -nd_{n,1}^j r^{n-1} + d_{n,2}^j \{\nu_j n z^2 r^{n-1} + [4 + n(\nu_j + 1)] \chi_n^1 r^{n+1}\}, \quad n > 0, \\ u_{z,n}^j &= 2\nu_j z d_{n,2}^j r^n, \quad n \geq 0, \quad u_{r,0}^j = -(1-\nu_j) d_{0,2}^j \end{aligned} \quad (20)$$

і, які мають особливості в нулі ( $r = 0$ )

$$\begin{aligned} u_{r,n}^j &= -nd_{n,3}^j r^{-n-1} + d_{n,4}^j [\nu_j n z^2 r^{-n-1} + [2(1-\nu_j) + n(1+\nu_2)] \chi_n^2 r^{-n+1}], \quad n > 1 \\ u_{r,1}^j &= d_{1,4}^j [\nu_j z^2 r^{-2} - (3-\nu_j) \ln r - 1 + \nu_j] - d_{1,3}^j r^{-2}, \quad u_{r,0}^j = d_{0,3}^j \frac{1}{r}, \\ u_{\phi,n}^j &= nd_{n,3}^j r^{-n-1} + d_{n,4}^j [\nu_j n z^2 r^{-n-1} + [n(\nu_j + 1) - 4] \chi_n^2 r^{-n+1}], \quad n > 1, \\ u_{\phi,1}^j &= [\nu_j z^2 r^{-2} + (3-\nu_j) \ln r + 2] + d_{1,3}^j r^{-2}, \\ u_{z,n}^j &= 2\nu_j z d_{n,4}^j r^{-n}, \quad n > 0, \quad u_{z,0}^j = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \chi(\mu_k, \nu_j, \gamma) &= \gamma \sin(\mu_k \gamma) + \delta(\mu_k, \nu_j) \cos(\mu_k \gamma), \\ \varphi(\mu_k, \nu_j, \gamma) &= \mu_k \gamma \cos(\mu_k \gamma) - [\mu_k \delta(\mu_k, \nu_j) + 3 - 4\nu_j] \sin(\mu_k \gamma). \end{aligned}$$

Верхній штрих біля функцій Бесселя позначає похідну по  $r$ .

Підставимо функції (17) у співвідношення (10), (2), (3) та знайдемо у вигляді суми ряду коефіцієнти розкладу тензора

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n}^j &= 2G_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}\{h^2 \chi(\mu_k, \nu_j, \gamma) \frac{d^2}{dr^2} [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] - \right. \right. \\ &\quad - 2\nu_j \mu_k \cos(\mu_k \gamma) [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] \left. \left. \right\} + nh^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} [g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + \right. \\ &\quad \left. + s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)] \cos(k\pi\gamma) \right\} + k_n^1 d_{n,1}^j r^{n-2} + d_{n,2}^j [k_{n,1}^{1,j} z^2 r^{n-2} + k_{n,2}^{1,j} r^n], \\ \sigma_{z,n}^j &= -2G_j \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}\{[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] [\mu_k^2 \chi(\mu_k, \nu_j, \gamma) + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu_j) \mu_k \cos(\mu_k \gamma)] I_n(\beta_k r)\}, \right. \end{aligned} \quad (22)$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi,n}^j = & 2G_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \{ \operatorname{Re} \{ h^2 \chi(\mu_k, \nu_j, \gamma) \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right] [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] - \right. \right. \\ & - 2\nu_j \mu_k \cos(\mu_k \gamma) [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] \} - nh^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} [g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + \\ & \left. \left. + s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)] \cos(k\pi\gamma) \} - k_n^1 d_{n,1}^j r^{n-2} + d_{n,2}^j [-k_{n,1}^{1,j} z^2 r^{n-2} + k_{n,3}^{1,j} r^n] \right\} \end{aligned}$$

нормальних та

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi,n}^j = & 2G_j \sum_{k=1}^{\infty} h^2 \left\{ 2 \frac{n}{r} \operatorname{Re} [\chi(\mu_k, \nu_j, \gamma) \left[ \frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \right] [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)]] - \right. \\ & - \left[ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r^2} \right] [g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)] \cos(k\pi\gamma) \} + \\ & + d_{n,2}^j [k_{n,4}^{1,j} r^n - 2k_{n,1}^{1,j} z^2 r^{n-2}] - 2k_{n,1}^1 d_{n,1}^j r^{n-2}, \\ \tau_{rz,n}^j = & 2hG_j \sum_{k=1}^{\infty} \{ 2 \operatorname{Re} \{ \psi(\mu_k, \nu_j, \gamma) \frac{d}{dr} [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] \} - \\ & - \frac{nk}{r} \pi [g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)] \sin(k\pi\gamma) \}, \\ \tau_{z\varphi,n}^j = & 2hG_j \sum_{k=1}^{\infty} \{ \{-2 \operatorname{Re} \{ \psi(\mu_k, \nu_j, \gamma) \frac{n}{r} [a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)] \} + \\ & + k\pi \sin(k\pi\gamma) [g_{n,k}^j I_n'(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n'(\lambda_k r)] \} \end{aligned} \quad (23)$$

дотичних напружень, де

$$\begin{aligned} \psi(\mu_k, \nu_j, \gamma) = & \mu_k \gamma \cos(\mu_k \gamma) - [(1 - 2\nu_j) + \mu_k \delta(\mu_k)] \sin(\mu_k \gamma), \quad k_{n,3}^{1,j} = -(n+2)(1+\nu_j)/2, \\ k_{n,1}^1 = & n(n-1), \quad k_{n,1}^{1,j} = -n(n-1)\nu_j, \quad k_{n,2}^{1,j} = (n-2)(1+\nu_j)/2, \quad k_{n,4}^{1,j} = -n(1+\nu_j). \end{aligned}$$

При числових розрахунках обмежимося у співвідношеннях (17) першими  $N$  членами ряду за індексом  $k$  і всіма нульовими власними значеннями та позначимо такі компоненти розкладу функцій переміщень  $\Phi_{j,N}^n$ ,  $\Psi_{j,N}^n$ ,  $Q_{j,N}^n$ . Підставимо для заданого  $N$ ,  $n > 0$  компоненти вектора переміщень (19)–(21) і тензора напружень (22), (23) в крайові умови (12), (15), (16) й отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^M c_k^n A_{m,k}^n(\gamma) = P_m^n(\gamma), \quad m = \overline{1, K_1}, \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} M = & M_1 + 2(2K - 1), \quad M_1 = 2N(2K - 1), \quad c_k^n = \operatorname{Re} a_{n,k}^1, \quad c_{k+N}^n = \operatorname{Im} a_{n,k}^1, \quad c_{k+2N}^n = g_{n,k}^1, \\ c_{k+(6j-9)N}^n = & \operatorname{Re} a_{n,k}^j, \quad c_{k+(6j-8)N}^n = \operatorname{Im} a_{n,k}^j, \quad c_{k+(6j-7)N}^n = \operatorname{Re} b_{n,k}^j, \quad c_{k+(6j-6)N}^n = \operatorname{Im} b_{n,k}^j, \\ c_{k+(6j-5)N}^n = & g_{n,k}^j, \quad c_{k+(6j-4)N}^n = s_{n,k}^j, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{2, K}; \quad c_{K_1+m}^n = d_{n,m}^1, \quad m = \overline{1, 2}, \\ c_{K_1+4j-6+m}^n = & d_{n,m}^j, \quad m = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{2, K}; \quad P_m^n(\gamma) = 0, \quad m = \overline{1, K_1 - 3}, \quad K_1 = 6(K - 1) + 3, \end{aligned}$$

$$P_{K_1-2}^n(\gamma) = \frac{\sigma_{g,n}(h\gamma)}{2G_2}, \quad P_{K_1-1}^n(\gamma) = \frac{\tau_{1,n}(h\gamma)}{2G_2}, \quad P_{K_1}^n(\gamma) = \frac{\tau_{2,n}(h\gamma)}{2G_2}.$$

**Зведення проблеми задоволення системи рівнянь (24) для заданого  $n > 0$  до пошуку мінімуму узагальненої квадратичної форми.** Побудовані переміщення і напруження, виражені через функції  $\Phi_{j,N}^n$ ,  $\Psi_{j,N}^n$ ,  $Q_{j,N}^n$  і точно задовольняють співвідношення тривимірної теорії пружності та крайові умови на торцях багат шарового циліндра. Для оцінювання похибки наближеного розв'язку скінченної системи рівнянь (24) запишемо нев'язки для заданого  $N > 1$

$$|f_{m,N}^n(\gamma) - P_m^n(\gamma)|, \quad \gamma \in [-1,1], \quad m = \overline{1, K_1}, \quad (25)$$

де  $f_{m,N}^n(\gamma) = \sum_{k=1}^M c_k^n A_{m,k}^n(\gamma)$ . У працях [7, 9, 10] розроблено метод, використання якого дозволяє одночасно мінімізувати всі нев'язки вигляду (25). Використаємо його і зведемо задоволення крайових умов (24) до пошуку мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\Omega_N \{c_1^n, \dots, c_M^n\} = \sum_{m=1}^{K_1} \|f_{m,N}^n(\gamma) - P_m^n(\gamma)\|^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k^n c_j^n W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k^n V_k + P^2, \quad (26)$$

де  $\|f(\gamma)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(\gamma) d\gamma}$  – норма в  $L_2[-1,1]$ ,  $W_{kj} = W_{jk}$ ,  $W_{kj} = \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^{K_1} A_{m,k}^n(\gamma) A_{m,j}^n(\gamma) d\gamma$ ,

$$V_k = \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^{K_1} A_{m,k}^n(\gamma) P_m^n(\gamma) d\gamma, \quad k, j = \overline{1, M}; \quad P^2 = \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^{K_1} P_m^n(\gamma)^2 d\gamma.$$

Там же запропонована методика аналітичного обчислення інтегралів  $W_{kj}$ ,  $V_k$ , які визначають коефіцієнти узагальненої квадратичної форми, що дозволяє знайти значення невідомих коефіцієнтів ряду за власними функціями з високою точністю і підвищити швидкодію методу.

За своїм означенням узагальнена квадратична форма (26) є невід'ємна. Її мінімум позначимо  $F(N)$ , а змінні, на яких він досягається –  $c_k^N$ . Із умови мінімуму квадратичної форми отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{k=1}^M c_k^N W_{kj} = V_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

За відомими змінними  $c_k^N$ ,  $k = \overline{1, M}$  визначимо коефіцієнти  $a_{n,k}^j$ ,  $b_{n,k}^j$ ,  $g_{n,k}^j$ ,  $s_{n,k}^j$ ,  $d_{n,m}^j$  і знайдемо шукані функції переміщень (17), через які визначають компоненти вектора переміщень і тензора напружень у багат шаровому циліндрі.

**Встановлення числових критеріїв збіжності розв'язку.** Покажемо, що для побудованих власних функцій (17) і знайденого мінімуму квадратичної форми (26) мають місце такі твердження:

**Лема.** Функція  $F(N)$  є невід'ємна і не зростає.

Доведення леми подібне, як в [7].

**Теорема.** Якщо для заданого  $n > 0$  і довільного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $N$ , що  $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$ , то межі послідовностей коефіцієнтів розкладу (17)

$$\Phi_{j,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_{j,N}^n, \quad \Psi_{j,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_{j,N}^n, \quad Q_{j,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{j,N}^n, \quad j = \overline{1, K}$$

точно задовольняють крайові умови (24) у метриці  $L_2[-1,1]$ .

Відзначимо, що квадратична форма (26) вибрана таким чином, що для її мінімуму  $F(N)$  і знайдених невідомих коефіцієнтів  $c_k^N$  буде виконуватись

$$F(N) = \sum_{m=1}^{K_1} \left\| f_{m,N}^n(\gamma) - P_m^n(\gamma) \right\|^2. \quad (27)$$

**Доведення.** Розглянемо послідовність малих додатних чисел  $\varepsilon_N$ , яка збігається до нуля. Згідно з умовою теореми ця послідовність існує і їй відповідає послідовність натуральних чисел  $N \rightarrow \infty$ . Відповідно з лемою і умовою теореми для довільного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $N$  і  $\varepsilon_N < \varepsilon$ , що виконується

$$F(N+k) \leq F(N) < \frac{\varepsilon_N^2}{4}$$

для будь-якого натурального  $k$ , а отже, якщо спрямувати  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то отримаємо в границі

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 0.$$

Покажемо, що при зменшенні  $\varepsilon_N$ ,  $\varepsilon \geq \varepsilon_N \geq 0$  і відповідно збільшенні  $N$ , переміщення і напруження побудовані з використанням коефіцієнтів  $c_k^N$  і функцій (17) задовольнятимуть умови (24) із заданою похибкою  $\varepsilon$  у метриці простору  $L_2[-1,1]$ . Дійсно, з умови (27) і нерівності трикутника випливає, що послідовності функцій  $f_{m,N}^n(\gamma)$  є фундаментальними, оскільки

$$\left\| f_{m,j}^n - f_{m,k}^n \right\| \leq \left\| f_{m,j}^n - P_m^n \right\| + \left\| f_{m,k}^n - P_m^n \right\| \leq 2\sqrt{F(N)} < \varepsilon_N < \varepsilon, \quad m = \overline{1, K_1}$$

для будь-яких  $k, j \geq N$ . Отже, існують границі функцій  $f_{m,N}^n(\gamma)$ , які позначимо

$$f_m^n(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{m,N}^n(\gamma), \quad f_m^n(\gamma) \in L_2[-1,1].$$

Крайові умови (24) також задовольняються із заданою похибкою  $\varepsilon_N > 0$  у метриці  $L_2[-1,1]$ , оскільки згідно з (27) отримаємо такі оцінки:

$$\|f_{m,N}^n - P_m^n\| \leq \sqrt{F(N)} < \varepsilon_N/2, \quad m = \overline{1, K_1}. \quad (28)$$

Спрямуємо в нерівностях (28)  $\varepsilon_N \rightarrow 0$ , і в границі отримаємо, що функції  $f_m^n(\gamma)$  точно задовольняють крайові умови (24) у метриці простору  $L_2[-1,1]$ . Отже, маємо

$$\|f_m^n - P_m^n\| = 0, \quad m = \overline{1, K_1}. \quad (29)$$

Ми показали, що у випадку виконання умов теореми напруження, які визначають функції

$$\Phi_{j,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_{j,N}^n, \quad \Psi_{j,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_{j,N}^n, \quad Q_{j,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{j,N}^n, \quad j = \overline{1, K}$$

точно задовольняють усі рівняння і співвідношення тривимірної теорії пружності та крайові умови (24) у метриці  $L_2[-1,1]$ . Із теореми існування і єдиності розв'язків теорії пружності випливає, що функції  $\Phi_{j,n}$ ,  $\Psi_{j,n}$ ,  $Q_{j,n}$  існують. Кінець доведення.

Відзначимо, що у випадку, коли функції  $P_m^n(\gamma)$  будуть неперервними, то умови (29) будуть задовольнятися у нормі простору  $C[-1,1]$ .

**Розв'язання крайових задач осесиметричної теорії пружності для двошарового циліндра.** В цьому випадку осесиметричну задачу описують: функції переміщень (17), переміщення (18)–(20), напруження (21), (22), якщо покласти  $n=0$ . Система рівнянь (23) буде мати  $K_1 = 4(K-1) + 2$  рівнянь з  $M = (2N+1)(2K-1)$  невідомими. Розв'язання цієї системи і доведення теореми аналогічно як для  $n > 0$ .

**Висновки.** Вперше напружений стан багатошарового циліндра з ненавантаженими торцями описано власними функціями, які визначаються нульовими та ненульовими власними значеннями. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень наведено у вигляді рядів за побудованими власними функціями. Розроблено методику апроксимації умов ідеального контакту прилеглих шарів і крайових умов скінченною кількістю власних функцій. Дослідження тривимірного НДС циліндра замінено розв'язанням незв'язаного між собою набору одновимірних крайових задач. Дослідження розв'язку отриманих систем рівнянь зведено до знаходження мінімуму узагальненої квадратичної форми, коефіцієнти якої виражаються через тригонометричні й бesselеві функції. Встановлено, що числове значення мінімуму узагальненої квадратичної форми дає оцінку похибки задоволення всіх крайових умов.

**Conclusions.** At the first time the stress state of multilayer cylinder with not loaded ends was described by eigenfunctions, which defined zero and nonzero eigenvalues. Components of displacement vectors and the stress tensors are expanded in series of the eigenfunctions. The technique of approximating by finite number of eigenfunctions the conditions perfect contact of adjacent layers and boundary conditions is developed. The study of the three-dimensional stress-strain state of the cylinder is replaced by solving a set of

unrelated one-dimensional boundary value problems. Solution of obtained equations is reduced to find the minimum of the generalized quadratic forms whose coefficients are expressed in terms of trigonometric and Bessel functions. It was established that the numerical value of the minimum generalized quadratic form gives the error estimate satisfying the boundary conditions.

#### Список використаної літератури

1. Shokrolahi-Zadeh, B. Spectral equivalent inclusion method: anisotropic cylindrical multi-inhomogeneities / B. Shokrolahi-Zadeh, H.M. Shodja // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2008. – 56. – P. 3565–3575.
2. Tsukrov, I. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers / I. Tsukrov, B. Drach // *Int. J. Solids Struct.* – 2010. – 47. – P. 25–33.
3. Саврук, М.П. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра [Текст] / М.П. Саврук, Л.Й. Онишко, М.М. Сенюк // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2008. – 44, № 1. – С. 7–14.
4. Yin, X. C. Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse / X. C. Yin, Z. Q. Yue // *J. Appl. Mech.* – 2002. – 69, № 6. – P. 825–835.
5. Extension of a new approach towards accurate stress analysis of laminates subjected to thermomechanical loading / S. Liu, K.P. Soldatos // *J. Eng. Math.* – 2008. – 61. – P. 185–200.
6. Soldatos, K. P. General solutions for the statics of anisotropic, transversely inhomogeneous elastic plates in terms of complex functions / K. P. Soldatos // *Math Mech Solids*. – 2006. – 11. – P. 596–628.
7. Ревенко, В.П. О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости [Текст] / В.П. Ревенко // *Прикл. механика*. – 2009. – 45, № 7. – С. 52–65.
8. Лурье, А.И. Теория упругости [Текст] / А.И. Лурье. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
9. Ревенко, В.П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій [Текст] / В.П. Ревенко // *Прикл. пробл. мех. і мат.* – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
10. Ревенко, В.П. Дослідження тривимірного напруженого стану в пружній пластині з круговим отвором / В.П. Ревенко // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2009. – 45, № 5. – С. 71–76.
11. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.

*Отримано 04.01.2014*