

Т. Николишин. Напружено-деформований стан ортотропної пружно-пластичної замкненої циліндричної оболонки з внутрішньою поздовжньою тріщиною довільної конфігурації / Т. Николишин, Ю. Пороховський // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.60-68. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.375

Т. Николишин<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук;  
Ю. Пороховський<sup>2</sup>, канд. техн. наук

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка»

## НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ЗАМКНЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

**Резюме.** Задачу про напружений стан і граничну рівновагу циліндричної ортотропної оболонки з внутрішньою тріщиною довільної конфігурації зведено до системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. Запропоновано алгоритм числового розв'язання отриманої системи. Вивчено вплив ортотропії, навантаження та геометричних параметрів на розкриття тріщини і розміри пластичних зон поблизу неї.

**Ключові слова:** ортотропна циліндрична оболонка, внутрішня тріщина, інтегральні рівняння, розкриття фронту тріщин, теорія оболонок типу Тимошенка.

T. Nykolyshyn, Yu. Porokhovs'ky

## STRESS-STRAIN STATE OF ORTHOTROPIC ELASTO-PLASTIC CLOSED CYLINDRICAL SHELL WITH INTERNAL LONGITUDINAL CRACK OF ARBITRARY CONFIGURATION

**Summary.** The strength of real solids is determined not only by their physical and chemical nature, but also depends significantly on the defectiveness of their structure. The solving of the problem on fracture of materials can be successful only in the case of accounting the defects contained in the body, as well as structural cuts and inclusions. During the deformation of the solid body in the vicinity of such concentrators high stress intensity occurs, which leads to the yielding flow of the material, to cracks initiation and propagation, i.e. to a local or complete fracture of the body [1, 2].

To evaluate the effect of different types of defects on the stress state and the limit equilibrium of the body, it is advisable to perform an investigation of stress concentrators that are subject to analytical study. Such stress concentrators, for example, in thin-walled structures are through and internal cracks.

The anisotropic closed cylindrical elastic-plastic shell, weakened by internal cracks of arbitrary configuration is studied.

The three-dimensional elastic-plastic problem on the stressed state and limiting equilibrium of closed orthotropic cylindrical shell with inner longitudinal crack of arbitrary configuration using analogue of the  $\delta_c$ -model is reduced to a two-dimensional problem on elastic equilibrium of the same shell with a through crack of unknown length, and the last problem (in the refined Timoshenko-type shell theory) is reduced to the tenth order system of five key differential equations with unknown boundaries of integration and discontinuous functions in the right-hand side containing the unknown values.

Using the fundamental solution and operation of convolution the integral representations of key functions of forces and moments for the closed orthotropic cylindrical shell are constructed, which, in turn, are reduced to the system of two singular integral equations.

The algorithm for the numerical solution of the obtained system together with the conditions of plasticity of thin shells, with conditions of the uniqueness of displacements and conditions of boundedness of forces and moments in the vicinity of the crack is proposed. This algorithm is implemented for the case of a parabolic crack. The numerical analysis of dependence of crack opening displacements and sizes of the plastic zone is carried out for shells made from such materials: a composite material on epoxy basis reinforced by unidirectional graphite fibers, composite material on epoxy basis reinforced by unidirectional fibers of S-glass;

bor-epoxy composite. The comparison of obtained results with the results for the corresponding rectangular internal crack, bounded by lines parallel to the coordinate lines is given.

**Key words:** orthotropic cylindrical shell, internal crack, integral equations, crack front opening, theory of Timoshenko-type shells.

**Вступ.** Міцність реальних твердих тіл визначається не тільки їх фізико-хімічною природою, а й істотно залежить від дефектності їх структури. Розв'язання проблеми руйнування матеріалів може бути успішним тільки у випадку врахування дефектів, що містяться в тілі (мікро- та макротріщини, різного походження порожнини та включення, границі блоків і зерен структури тощо), а також конструктивних розрізів і включень. У процесі деформації твердого тіла в околі таких концентраторів виникає висока інтенсивність напружень, що призводить до пластичного течіння матеріалу, утворення та поширення тріщин, тобто до локального чи повного руйнування тіла [1, 2].

Науково-технічний прогрес ставить все вищі вимоги до міцності конструкційних матеріалів. Такі вимоги, певною мірою, задовольняють нові композиційні матеріали, зокрема армовані надміцними волокнами пластики. Для них притаманна низка специфічних механічних властивостей, таких, як анізотропія деформативних та міцнісних властивостей, порівняно низька зсувна жорсткість. Ефективне конструювання виробів з таких матеріалів можливе лише при врахуванні та правильному використанні цих властивостей. Так як високоміцні матеріали схильні до крихкого та квазікрихкого руйнування, то наявність дефектів, особливо гострокінцевих, суттєво впливає на міцність конструкцій. Щоб оцінити вплив різних дефектів на напружений стан і граничну рівновагу тіла, доцільно провести дослідження для концентраторів напружень, які піддаються аналітичній трактовці. Таким концентратором, наприклад, в тонкостінних конструкціях є наскрізні та внутрішні тріщини. Тим більше, що тріщини є найнебезпечнішим з точки зору руйнування, дефектом [1 – 3].

Автори уже розглядали випадки, коли внутрішня тріщина обмежена лініями, паралельними координатами [4, 5]. В цій роботі досліджено анізотропну замкнену циліндричну пружно-пластичну оболонку, ослаблену внутрішньою тріщиною довільної конфігурації (рис. 1).

**Формулювання задачі.** Розглянемо ортотропну безмежну замкнену циліндричну оболонку радіуса  $R$ , середину поверхні якої віднесемо до циліндричної системи координат  $\alpha\beta\gamma$ . Оболонка товщини  $2h$  ослаблена поздовжньою внутрішньою тріщиною завдовжки  $2\ell_0$ . Глибина тріщини задається двома гладкими кривими  $d_1(\alpha)$  та  $d_2(\alpha)$  (рис. 1). Тріщина розміщена вздовж координатної лінії  $\beta = 0$ ; початок координат в її центрі.

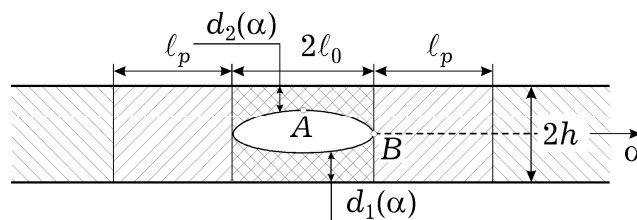


Рисунок 1. Схема розміщення внутрішньої тріщини та пластичних зон

Figure 1. The scheme of placement of internal cracks and plastic zones

Вважатимемо, що оболонка та береги тріщини завантажені лише симетричними відносно її площини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщин не контактують. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин ( $\min(d_1 + d_2) \leq 0,4h$ ). Площа тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що біля неї по всій товщині оболонки вузькою смугою розвиваються пласт-

тичні деформації. Тепер відповідно до аналога  $\delta_c$ -моделі [1] зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розрив пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки, тобто відповідно в області  $\alpha \in ]-\alpha_0; \alpha_0[$ ;  $\gamma \in [-h; -h+d_1] \cup [h-d_2; h]$ , ( $\alpha_0 = \ell_0/R$ ,  $\gamma$  – нормальна до серединної поверхні координата), діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_{Bi} + \sigma_{Ti})/2$ , де  $\sigma_{Bi}$  – границя міцності, а  $\sigma_{Ti}$  – поріг текучості матеріалу оболонки в головних напрямках ортотропії ( $i=1,2$ ). У пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h; h]$ ,  $\alpha \in ]-\alpha_p; -\alpha_0[ \cup ]-\alpha_0; \alpha_p[$ , ( $\alpha_p = \ell_p/R$ ) діють невідомі нормальне зусилля  $N_p$  та згинний момент  $M_p$ .  $N_p$ ,  $M_p$  протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок [6].

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з внутрішньою тріщиною заданої довжини  $2\ell_0$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини  $2\ell_1 = 2\ell_0 + 2\ell_p$  ( $\ell_p$  – довжина пластичної зони на продовженні тріщини по її довжині), на берегах якої виконуються умови

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} N_2^{(1)} + N^\ell - N_2^0, & |\alpha| \leq \alpha_0, \\ -N_2^0 + N^p, & \alpha_0 < |\alpha| < \alpha_0 + \alpha_p; \end{cases}$$

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^\ell - M_2^0, & |\alpha| \leq \alpha_0, \\ -M_2^0 + M^p, & \alpha_0 < |\alpha| < \alpha_0 + \alpha_p. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $N_2^{(1)}$ ,  $M_2^{(1)}$  – зусилля та момент, прикладені до берегів реальної тріщини;  $N_2^0$ ,  $M_2^0$  – ці ж параметри на лінії тріщини в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням;  $N^\ell$ ,  $M^\ell$  – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під внутрішньою тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями <sup>про</sup> напруження в цих зонах визначаються за формулами

$$N^\ell(-\alpha) = \sigma_0 \left( \int_{-h}^{d_1(\alpha)} d_\gamma + \int_{d_2(\alpha)}^h d_\gamma \right), \quad M^\ell(\alpha) = \sigma_0 \left( \int_{-h}^{d_1(\alpha)} \gamma d_\gamma + \int_{d_2(\alpha)}^h \gamma d_\gamma \right). \quad (2)$$

**Основні співвідношення анізотропної циліндричної оболонки з тріщиною.** В рамках уточненої теорії оболонок типу Тимошенка систему десятого порядку п'яти диференціальних ключових рівнянь, що враховують тріщини, запишемо в матричному вигляді [1, 3, 5]

$$\hat{L}^* \bar{u} = R \hat{M}_1^{*T} \bar{\varepsilon}_1^0 + c_1^2 R^2 \hat{M}_2^{*T} \bar{\varepsilon}_2^0, \quad (3)$$

де

$$\hat{L}^* = \hat{N}_1^* \hat{M}_1^* + c_1^2 \hat{N}_2^* \hat{M}_2^*; \quad c_1^2 = h^2/(3R^2); \quad \hat{M}_j^* = \hat{C} \hat{N}_j^T;$$

$$\hat{N}_1^* = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\partial_1 & -\partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{N}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{C}_2 \end{pmatrix}; \quad \hat{C}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} \\ 0 & c_{66} & 0 \\ c_{12} & 0 & c_{22} \end{pmatrix}; \quad \hat{C}_2 = k' \begin{pmatrix} c_{44} & 0 \\ 0 & c_{55} \end{pmatrix}; \quad \hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\varepsilon}_1^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{13}^0 \\ \varepsilon_{23}^0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\varepsilon}_2^0 = \begin{pmatrix} \chi_{11}^0 \\ 2\chi_{12}^0 \\ \chi_{22}^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тут верхнім індексом « $T$ » позначено транспоновану матрицю до даної;  $k' = 5/6$  – введений у теорії оболонок типу Тимошенка коефіцієнт зсуву для перерізуювальних сил; пружні сталі матеріалу оболонки  $c_{ij}$  визначаємо через технічні сталі за співвідношеннями

$$c_{11} = \frac{2E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad c_{22} = \frac{2E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad c_{12} = \frac{2hE_1 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$$

$$c_{44} = 2hG_{23}; \quad c_{55} = 2hG_{13}; \quad c_{66} = 2hG_{12}; \quad E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1.$$

$E_i, \nu_i$  ( $i = 1, 2$ ) – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона в напрямках  $\alpha, \beta$ ;  $G_{12}$  – модуль зсуву між напрямками  $\alpha$  і  $\beta$ ;  $G_{13}$  – модуль зсуву між напрямками  $\alpha$  або  $\beta$  та  $\gamma$ ;  $u, v, w$  – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки;  $\gamma_1, \gamma_2$  – кути повороту між нормаллю до серединної поверхні та координатними лініями  $\alpha, \beta$ ;  $\varepsilon_{ij}^0, \chi_{ij}^0$  – деформації, що виражаються через стрибки переміщень і кутів повороту.

Розв'язок системи (3) шукаємо у вигляді

$$\bar{u} = R \hat{L}^{*-1} (\hat{M}_1^{*T} \bar{\varphi}_1 + c_1^2 \hat{M}_2^{*T} \bar{\varphi}_2). \quad (4)$$

Тут  $\hat{L}^{*-1}$  – матриця алгебричних доповнень до матриці  $\hat{L}^*$ , тому

$$\hat{L}^* \hat{L}^{*-1} = D^* \hat{E}; \quad D^* = \det \hat{L}^*; \quad \hat{E}^{-1} = \hat{E}; \quad (5)$$

$\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$ ;  $\bar{\varphi}_2 = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, 0, 0)$  – вектори ключових функцій, які задовольняють рівняння

$$D^* \bar{\varphi}_i = \bar{\varepsilon}_i^{(0)} \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Рівняння (6) з урахуванням (5) називатимемо ключовим або розв'язувальним рівнянням теорії анізотропних циліндричних оболонок типу Тимошенка, а функції  $\bar{\varphi}_i$  ( $i = 1, 2$ ) – ключовими (розв'язувальними).

Вирази для знаходження зусиль і моментів через ключові функції  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$  мають вигляд

$$\bar{n}_1 = c_1^2 \Omega_1 (\hat{N}_1^1 \bar{\varphi}_1 + c_1^2 R \hat{N}_2^1 \bar{\varphi}_2), \quad \bar{n}_2 = c_1^2 \Omega_1 R (\hat{N}_1^2 \bar{\varphi}_1 + c_1^2 R \hat{N}_2^2 \bar{\varphi}_2), \quad (7)$$

де  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  – «вектори» зусиль і моментів серединної поверхні

$$\bar{n}_1 = \begin{bmatrix} N_1 \\ S \\ N_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{n}_2 = \begin{bmatrix} M_1 \\ H \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{N}_1^1 = \hat{M}_1^* \hat{L}^{*-1} \hat{M}_1^{*T} - D^* \hat{C}, \quad \hat{N}_2^2 = c_1^2 \hat{M}_2^* \hat{L}^{*-1} \hat{M}_2^{*T} - D^* \hat{C};$$

$$\hat{N}_i^j = \hat{M}_i^* \hat{L}^{*-1} \hat{M}_i^{*T} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad \Omega_1 = \det \hat{C}.$$

З (4) випливає:

$$\hat{N}_i^i = (\hat{N}_i^i)^T; \quad \hat{N}_i^j = (\hat{N}_j^i)^T \quad (i, j = 1, 2; i \neq j).$$

Ключові функції  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$  подамо у вигляді інтеграла згортки по серединній поверхні оболонки, вважаючи, що компоненти деформації  $\bar{\varepsilon}_1^{(0)}, \bar{\varepsilon}_2^{(0)}$  є інтегрованими функціями на серединній поверхні оболонки:

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}(\alpha, \beta) = \frac{1}{c_1^2 \Omega} \iint \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \end{pmatrix}(\xi_1, \xi_2) g(\alpha - \xi_1, \beta - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (8)$$

Тут  $g(\alpha, \beta)$  – фундаментальний розв'язок [7] рівняння

$$D^* g(\alpha, \beta) = \delta(\alpha) \delta_T(\beta), \quad (9)$$

де  $\delta(\alpha); \delta_T(\beta)$  – дельта-функції Дірака (нижній індекс  $T$  показує, що вказана функція  $T$ -періодична),  $\Omega = \det \hat{C}_1$ .

Зважаючи на симетричність навантаження, розміщення тріщин, а також на те, що переміщення й кути повороту при переході через тріщину мають стрибок, а зусилля й моменти – неперервні функції, поле деформацій  $\bar{\varepsilon}_1^0, \bar{\varepsilon}_2^0$  набуває вигляду

$$\varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) = R^{-1}[\nu(\beta)] \delta(\alpha); \quad \kappa_{22}^{(0)}(\alpha, \beta) = R^{-1}[\gamma_2(\beta)] \delta(\alpha);$$

$$\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{13}^0 = \varepsilon_{23}^0 = \kappa_{12}^0 = \kappa_{11}^0 = 0. \quad (10)$$

$[f(\beta)]$  – стрибок узагальнених переміщень.

**Інтегральні рівняння задачі.** З допомогою фундаментального розв'язку рівняння (9) та операції згортки побудовано інтегральні представлення ключових функцій (8)  $\bar{\varphi}_i$  ( $i=1,2$ ), а з допомогою формул (7) – інтегральні представлення зусиль та моментів для замкненої ортотропної циліндричної оболонки. Вимагаючи тепер, щоб на берегах фіктивної тріщини виконувались умови (1), отримуємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 F_j(\theta) \left[ \frac{a_{ij}}{\theta - \alpha} + \tilde{K}_{ij}(\theta, \alpha) \right] d\theta = b_i f_i(\alpha), \quad (11)$$

де  $F_1 = \frac{d}{d\theta}[v(\theta)]$ ;  $F_2 = \frac{d}{d\theta}[\gamma_2(\theta)]$ ;  $f_i(\alpha)$  – задані співвідношеннями (1), тобто – розривні функції;

$$\tilde{K}_{ij}(\theta, \alpha) = \frac{a_{ij}}{\theta + \alpha + 2\alpha_d} + K_{ij}^0(\alpha - \theta) + K_{ij}^0(\alpha + \theta + 2\alpha_d).$$

Ядра  $K_{ij}(z)$  – неперервні функції на проміжку  $z \in [-1; 1]$ .  $K_{ij}^0(z)$ ,  $a_{ij}$  наведені в [1] і відповідають ядрам для оболонки, ослабленої однією наскрізною поздовжньою тріщиною.

Розв'язки системи сингулярних інтегральних рівнянь (11) повинні задовольняти умови

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

які забезпечують неперервність переміщення  $v$  та кута повороту  $\gamma_2$  у вершинах тріщини і впливають із співвідношень (4), (10).

Відповідно до моделі в системі (11) невідомі розміри зон пластичних деформацій  $\ell_p$ , а також зусилля  $N_p$  та момент  $M_p$ , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок. Наприклад, умову Треска у вигляді пластичного поверхневого шару

$$\frac{N}{2h\sigma_{T\alpha}} + \frac{3|M|}{2h^2\sigma_{T\alpha}} = 1, \quad (13)$$

або пластичного шарніру

$$\left( \frac{N}{2h\sigma_{T\alpha}} \right)^2 + \frac{|M|}{h^2\sigma_{T\alpha}} = 1. \quad (14)$$

Умови пластичності (13) або (14) використовуємо для визначення довжини пластичної зони  $\ell_p$ . Для знаходження невідомих  $N$  та  $M$  застосуємо умови скінченності напружень біля вершини фіктивної тріщини. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормальних зусиль та згинних моментів дорівнювали нулю в обох вершинах тріщин, тобто

$$K_N(\ell_0) = K_M(\ell_0) = 0, \quad K_N(\ell_1) = K_M(\ell_1) = 0. \quad (15)$$

Таким чином, задачу про граничну рівновагу ортотропної пружно-пластичної циліндричної оболонки з внутрішньою тріщиною довільної конфігурації зведено до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь (11), умов однозначності переміщень (12), умов пластичності (13) або (14) та умов обмеженості напружень (15).

Слід відзначити, що в системі (11) невідомі граничні інтегрування  $\alpha_1$ , так як невідомі розміри пластичних зон. Крім цього, праві частини інтегральних рівнянь (11) – розривні функції в точках  $\alpha = \pm\alpha_0$ . Це впливає з (1). Розв'язок системи (11) можна шукати одним із прямих числових методів, наприклад, методом механічних квадратів.

Але в точках  $\alpha = \pm\alpha_0$  прямі методи дають значну похибку, а саме, в цих точках нас цікавить розкриття тріщини. Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$F_m(\theta) = h_m(\theta) + \psi_m(\theta), \quad (m = 1, 2). \quad (16)$$

Тут  $h_m(\theta)$  – розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \frac{h_j(t)}{t-\theta} dt = f_i(\theta), \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

який задовольняє умову

$$\int_{-1}^1 h_i(t) dt = 0.$$

Система (17) розв'язана з допомогою формули обернення інтегралів типу Комі. Підставляючи тепер (16) в (11), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь на функції  $\psi_m(\theta)$ , яка має вигляд системи (11), але з неперервною правою частиною. Алгоритм сумісного розв'язування отриманої системи та додаткових умов такий: вибираємо деяке початкове наближення значення  $\alpha_1$ , будуємо розв'язок отриманої системи інтегральних рівнянь, з допомогою умов (15) знаходимо  $N$  та  $M$ , які підставляємо в умови (13) або (14). Якщо вибрана умова пластичності задовольняється з наперед заданою точністю, то задача розв'язана, якщо ні, змінюємо певним чином  $\alpha_1$  і процедуру повторюємо.

Інтегруючи розв'язок системи (11), розкриття тріщини  $\delta(\alpha, \gamma)$  у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [u_2(\alpha)] + \gamma[\gamma_2(\alpha)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

**Числові результати.** Числовий аналіз проводили для оболонок з таких матеріалів [8]:

**I** – композиційний матеріал на епоксидній основі, армованій однонаправленими графітними волокнами:

$$E_1 = 14,9 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 0,6 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 0,4 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,31;$$

**II** – композиційний матеріал на епоксидній основі, армованій однонаправленими волокнами з S-скла:

$$E_1 = 6,3 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 2,12 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 0,9 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,25;$$

**III** – борепоксидний композит:

$$E_1 = 40 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 4 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,25;$$

Для всіх матеріалів приймали  $\nu = 0,3$ .

Алгоритм числового розв'язування реалізований для оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності  $p$  ( $N_2^0 = Rp$ ,  $M_2^0 = 0$ ), армувальні волокна направлені вздовж твірної. Матеріал ідеально пружно-пластичний ( $\sigma_B = \sigma_T$ ). Оболонка ослаблена внутрішньою параболічною тріщиною

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\tau_0^2} (h - d'_1 - d'_2) \alpha^2 - h + d'_1, \quad d_2(\alpha) = -\frac{1}{\tau_0^2} (h - d'_1 - d'_2) \alpha^2 + h - d'_2,$$

$d'_1$  та  $d'_2$  – відстань від вершини відповідної параболи до внутрішньої та зовнішньої

поверхонь оболонок,  $\tau_0 = \ell_0/\ell_p$ ,  $d'_1/h = 0,07$ ,  $d'_2/h = 0,1$ .

На рис. 2 побудовано залежності відносного розкриття тріщини в точці  $A$   $\delta^* = \delta(\alpha, \gamma) E_1/(\ell_0 \sigma_{T\alpha})$  від відносної довжини реальної тріщини  $\ell_0/R$  для параметра тонкостінності  $h/R = 0,01$ ;  $n^0 = N_2^0/(2h \sigma_{T\alpha})$  – приведенне зовнішнє навантаження.

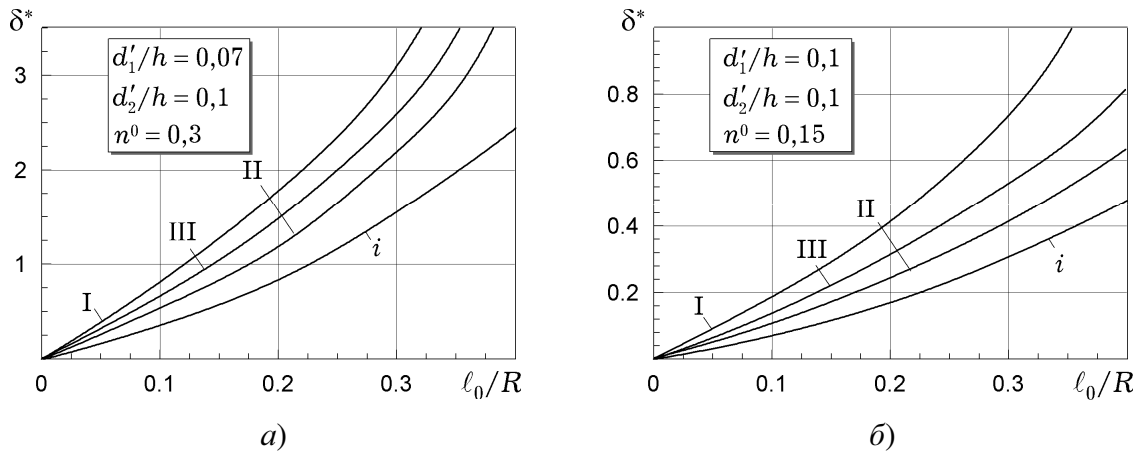


Рисунок 2. Залежність відносного розкриття вершини тріщини  $\delta^*$  у точці  $A$  від її відносної довжини  $\ell_0/R$

Figure 2. Dependence of relative crack tip opening at point  $A$  on its relative length  $\ell_0/R$

Криві I–III відповідають оболонкам, які виготовлені з відповідного ортотропного матеріалу; буквою « $i$ » позначено результат для ізотропної оболонки. Результати числового аналізу показують: зі збільшенням навантаження та довжини тріщини  $\delta^*$  зростає для оболонки із усіх розглянутих ортотропних матеріалів; з ростом відношення  $E_1/E_2$  відносно розкриття тріщини збільшується.

На рис. 3 показано залежність довжини пластичної зони  $\tau_0 = \ell_0/\ell_p$  від відносного навантаження  $n^0$ . Тут криві відповідають тим самим параметрам, що й на рис. 2а.

Результати, наведені на рис. 2, 3, отримано за умови пластичності (13). У випадку, коли брали умову (14), результати якісно не відрізняються, але на 10–12% більші. Розкриття тріщин на довжину пластичної зони визначали на випадок, коли оболонка ослаблена прямокутною тріщиною глибини  $2h - d'_1 - d'_2$ . Отримали, що  $\delta^*$  в точці  $A$  на 30% більше, ніж для параболічної тріщини, а  $\tau_0$  – на 20% менше.

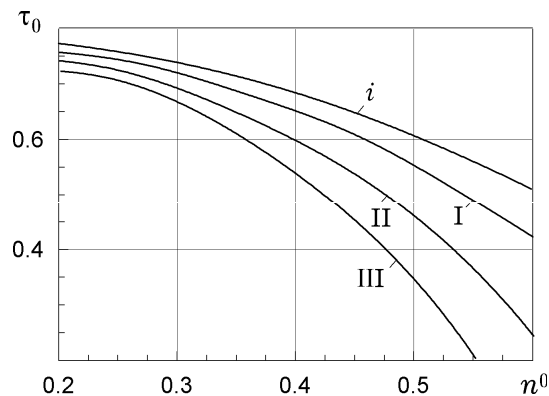


Рисунок 3. Залежність довжини пластичної зони  $\tau_0$  від відносного навантаження  $n^0$

Figure 3. Dependence of length of plastic zone  $\tau_0$  on the relative loading  $n^0$

**Висновок.** Якщо за критерій руйнування обрати критерій критичного розкриття фронту тріщини, то руйнування оболонки для розглянутих випадків розпочнеться в точці  $A$ . Числовий аналіз показав, що вибір умови пластичності мало впливає на



розкриття тріщини та розмір пластичних зон. Для поздовжнього армування  $\delta^*$  зростає зі збільшенням відношення  $E_1/E_2$ .

**Conclusions.** If the criterion of the crack front critical opening is taken as a failure criterion, the shell failure for the cases considered will start at point *A*. The numerical analysis has shown that the choice of plasticity condition influences inessentially the crack opening and dimension of plastic zones. For longitudinal reinforcement  $\delta^*$  increases, when relation  $E_1/E_2$  increases.

### **Список використаної літератури**

1. Кушнір, Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами [Текст] / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
2. Панасюк, В.В. Механика квазіхрупкого руйнування матеріалів [Текст] / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. МР 108.7 – 86. Расчеты на прочность: Оборудование энергетическое. – М.: НПО ЦНИИТМАШ, 1986. – 29 с.
4. Николишин, Т. Гранична рівновага анізотропної пружно-пластичної замкнутої циліндричної оболонки з двома внутрішніми поперечними тріщинами [Текст] / Т. Николишин, Ю. Пороховський // 11-й Міжнар. симпоз. українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2013. – С. 47.
5. Николишин, Т.М. Ортотропна пружно-пластична замкнута циліндрична оболонка з двома поперечними поверхневими тріщинами [Текст] / Т.М. Николишин // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 152 – 158.
6. Прагер, В. Проблемы теории пластичности [Текст] / В. Прагер. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
7. Прокопович, І.Б. Фундаментальний розв'язок рівнянь рівноваги анізотропної циліндричної оболонки зі скінченою зсувною жорсткістю [Текст] / І.Б. Прокопович, Л.М. Сеньків // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – № 1. – С. 56 – 61.
8. Ашкенази, Е.К. Анизотропия конструкционных материалов: справ. [Текст] / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

*Отримано 01.07.2013*