О.Присяжнюк. Сингулярно збурені задачі типу «Фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін» із урахуванням терморежиму / О.Присяжнюк // Вісник ТНТУ. — 2014. — Том 73. — № 1. — С.259-268. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.955: 519.673

О. Присяжнюк

Рівненський державний гуманітарний університет

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ «ФІЛЬТРАЦІЯ–КОНВЕКЦІЯ–ДИФУЗІЯ–МАСООБМІН» ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРМОРЕЖИМУ

Резюме. *Сформовано просторову сингулярно збурену крайову задачу для системи нелінійних рівнянь трикомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу розчинних у фільтраційній течії речовин за умов малих дифузії та породженого реакцією двох сортів розчинних речовин масообміну з урахуванням температурного режиму в горизонтальному пористому пласті – криволінійному паралелепіпеді, обмеженому поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями. З точністю* $O(\varepsilon^2)$ *побудовано асимптотичне розвинення її розв'язку, що дає можливість автономно доповнювати до конвективної складової розв'язку масообмінні та дифузійні компоненти, а також поправки на виході фільтраційної течії та вплив бічних джерел забруднень. Наведено результати числових розрахунків.*

Ключові слова: *конвективна дифузія, масообмін, температурний режим.*

O. Prysyazhnyuk

SINGULARLY PERTURBED PROBLEM OF THE «FILTRATION–CONVECTION–DIFFUSION–MASS TRANSFER» TAKING INTO CONSIDERATION TEMPERATURE REGIME

Summary. *The problem of mathematical modelling of convective diffusion with mass transfer, which is important when solving the problems of prediction of surface and groundwater pollution by harmful impurities has been analysed in the paper. Spatial singularly perturbed boundary value problem for the system of nonlinear equations for three-component convection diffusion mass transfer of soluble in the filtration flow substances under conditions of small diffusion and mass transfer generated by the reaction of two types of soluble substance has been formed, the influence of change of ambient temperature (due to thermal effect of a chemical reaction) on the rate of diffusion and mass transfer (generated by the corresponding reactions) processes, being taken into account.*

The problem is solved in a horizontal porous layer – a curvilinear parallelepiped, bounded by flow and equipotential surfaces. As in the case of solving of two-dimensional convection diffusion problems of this type, when filtering groundwater, at first we perform the transition from the curvilinear physical area of filtration to the corresponding area of complex potential the parallelepiped with sides parallel to the coordinate axes. The problem of grid construction is solved automatically; the equation of convective transport is simplified; the stated problem is reduced to the canonical domain, and the corresponding solution can be represented in numerical – analytical form. On this basis, with accuracy $O(\varepsilon^2)$ *in the area of complex potential we construct asymptotic expansion of solution of the problem of convective diffusion under condition of two-dimensional filtration, including small exothermic bimolecular reaction of soluble substances, which to significant level allows remotely add to the convective component of the solution the mass transfer and diffusion components, the corrections for the output of filtration flow, and the effect of lateral sources of pollution.*

The results of numerical calculations confirmed the predicted acceleration of the flow mass transfer and diffusion processes under the influence of the thermal effect of the chemical reaction.

Key words: *convective diffusion, mass transfer, temperature regime.*

Постановка проблеми. Математичне моделювання процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну знаходить важливі застосування при вирішенні проблем прогнозування забруднення поверхневих та підземних вод шкідливими домішками. Як відомо, з плином часу внаслідок людської діяльності все більше шкідливих хімічно активних речовин потрапляє в природне середовище [1]. Саме тому при математичному моделюванні таких процесів і виникає потреба врахувати

можливість втрати чи набуття концентрації забруднюючих речовин у фільтраційній течії внаслідок їхньої реакції. Більшість таких реакцій проходять з виділенням чи поглинанням енергії [2], тому необхідно враховувати вплив зміни температури середовища на швидкість перебігу дифузійних та масообмінних (породжених певними хімічними реакціями) процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На основі [3–4] в [5–6] розроблено підхід до розв'язання двовимірних задач конвективної дифузії при фільтрації підземних вод, що ґрунтується на переході від криволінійної фізичної області фільтрації, обмеженої лініями течії й еквіпотенціальними лініями, до відповідної області комплексного потенціалу (прямокутника з паралельними осям координат сторонами). Поєднуючи цей підхід із числово-асимптотичними методами, отримані розв'язки найтиповіших плоских задач «фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін» для багатозв'язних областей [5–6]. Чимало робіт, наприклад [7–8], присвячено питанню поширення даної методики до розв'язання просторових задач конвективної дифузії. Актуальною залишається проблема застосування асимптотичних методів до розв'язання просторових сингулярно збурених крайових задач багатокомпонентної конвективної дифузії з урахуванням впливу температури на ті чи інші характеристики процесу.

Мета роботи полягає у побудові асимптотичного розвинення розв'язків нелінійних просторових сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії при плоскій фільтрації з урахуванням малої бімолекулярної екзотермічної реакції розчинних речовин.

Постановка задачі. Розглядається просторова нелінійна сингулярно збурена задача конвективно-дифузійного масопереносу трьох розчинних речовин для області $G = G_{\varpi} \times (0,\infty)$ $G_{\varpi} = G_{\tilde{z}} \times (0,H)$, де $G_{\tilde{z}}$ ($\tilde{z} = x + \mathrm{i}y$) – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими $AB = \{\tilde{z} = x + \mathrm{i}y : f_1(x,y) = 0\}$, $BC = \{\tilde{z} : f_2(x,y) = 0\}$, $CD = \{\tilde{z} : f_3(x,y) = 0\}$, $DA = \{\tilde{z} : f_4(x,y) = 0\}$ [8] із урахуванням температурного режиму [7]:

$$div\left(\varepsilon D^i(\tilde{T}) \cdot grad\ \tilde{c}_i\right) - \vec{v} \cdot grad\ \tilde{c}_i - \varepsilon\alpha_i S^i(\tilde{T}) \prod_{m=1}^{2} \tilde{c}^m = \sigma \tilde{c}_t^i,\ i = \overline{1,3}, \tag{1}$$

$$div\left(\varepsilon a \cdot grad\ \tilde{T}\right) - \vec{v} \cdot grad\ \tilde{T} + \varepsilon\gamma \prod_{m=1}^{2} \tilde{c}^m = \sigma \tilde{T}_t, \tag{2}$$

$$\tilde{c}^i(x,y,z,0) = \tilde{c}_0^{i0}(x,y,z),\ \tilde{T}(x,y,z,0) = \tilde{T}_0^0(x,y,z), \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{c}^i\Big|_{ABB^*A^*} = \tilde{c}_*^i(M,t),\ \tilde{c}^i\Big|_{CDD^*C^*} = \tilde{c}^{i*}(M,t),\ \tilde{c}^i\Big|_{ADD^*A^*} = \tilde{c}_{**}^i(M,t), \\
\tilde{c}^i\Big|_{BCC^*B^*} = \tilde{c}^{i**}(M,t),\ \tilde{c}^i\Big|_{ABCD} = \tilde{c}_{**}^{i*}(M,t),\ \tilde{c}^i\Big|_{A^*B^*C^*D^*} = \tilde{c}_*^{i**}(M,t), \\
\tilde{T}\Big|_{ABB^*A^*} = \tilde{T}_*(M,t),\ \tilde{T}\Big|_{CDD^*C^*} = \tilde{T}^*(M,t),\ \tilde{T}\Big|_{ADD^*A^*} = \tilde{T}_{**}(M,t),
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\tilde{T}\Big|_{BCC^*B^*} = \tilde{T}^{**}(M,t),\ \tilde{T}\Big|_{ABCD} = \tilde{T}_{**}^*(M,t),\ \tilde{T}\Big|_{A^*B^*C^*D^*} = \tilde{T}_*^{**}(M,t), \tag{5}$$

$$\vec{v} = -\chi\ grad\ h,\ div\ H\vec{v} = 0,$$

$$\Delta\varphi = 0,\ \varphi\big|_{ABB^*A^*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{CDD^*C^*} = \varphi^*,\ \frac{d\varphi}{dn}\bigg|_{ADD^*A^*\cup A^*D^*C^*B^*\cup B^*C^*CB\cup ADCB} = 0, \qquad (6)$$

де $\tilde{c}^i = \tilde{c}^i(x, y, z, t)$ – концентрація i-го сорту речовини у точці (x, y, z) в момент часу t; $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z, t)$ – температура; H – потужність проникного пласту; $\varepsilon D^i(\tilde{T})$ – коефіцієнти дифузії; $D^i(\tilde{T})$ та $S^i(\tilde{T})$ виражаються, наприклад, згідно з законом Арреніуса, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$; χ – коефіцієнт фільтрації; a – коефіцієнт температуропровідності; γ – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції; σ – коефіцієнт пористості середовища; ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр; φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_{ϖ}, $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* >> \varepsilon$, ($v_z = 0$), $h = h(x, y)$ – напір у точці $\tilde{z} = x + \mathrm{i}y$; M – біжуча точка відповідної поверхні; n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $\tilde{c}_*^i(M, t)$, $\tilde{c}^{i*}(M, t)$, $\tilde{c}_0^{i0}(M)$, $\tilde{c}_{**}^i(M, t)$, $\tilde{c}^{i**}(M, t)$, $\tilde{c}_{**}^{i*}(M, t)$, $\tilde{c}_*^{i**}(M, t)$, $\tilde{T}_*(M, t)$, $\tilde{T}^*(M, t)$, $\tilde{T}_0^0(M)$, $\tilde{T}_{**}(M, t)$, $\tilde{T}^{**}(M, t)$, $\tilde{T}_{**}^*(M, t)$, $\tilde{T}_*^{**}(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (гранях) області G [5].

Нехай задача (6) шляхом конформного відображення $G_{\tilde{z}} \mapsto G_{\tilde{w}}$ (або $G_{\tilde{w}} \mapsto G_{\tilde{z}}$), де $G_{\tilde{w}} = \{\tilde{w} = \varphi + \mathrm{i}\psi:\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*;\ 0 < \psi < Q\}$ – відповідна $G_{\tilde{z}}$ область комплексного потенціалу; $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) є розв'язаною [5], зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$. Параметр $\tilde{Q} = H \cdot Q = H \cdot \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_{ϖ}) знаходиться в процесі розв'язку даної задачі (див., напр., [7]). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $z = z$, $t = t$ у рівняннях (1) – (2) та умовах (3) – (5), приходимо до відповідної «дифузійної задачі» для області $G_{\tilde{w}}$

$$\varepsilon D^i(T)\left(q^2(\varphi,\psi)(c^i_{\varphi\varphi} + c^i_{\psi\psi}) + c^i_{zz}\right) + \varepsilon(q^2(\varphi,\psi)(D^i_{\varphi}(T)c^i_{\varphi} + D^i_{\psi}(T)c^i_{\psi}) + D^i_z(T)c^i_z) - \frac{q^2(\varphi,\psi)}{H}c^i_{\varphi} - S^i(T)\alpha_i c^1 c^2 = \sigma c^i_t,\ i = \overline{1,3}, \qquad (7)$$

$$\varepsilon a\left(q^2(\varphi,\psi)(T_{\varphi\varphi} + T_{\psi\psi}) + T_{zz}\right) - \frac{q^2(\varphi,\psi)}{H}T_{\varphi} + \gamma c^1 c^2 = \sigma T_t, \qquad (8)$$

$$c^i(\varphi,\psi,z,0) = c^{i0}_0(\varphi,\psi,z),\ T(\varphi,\psi,z,0) = T^0_0(\varphi,\psi,z), \qquad (9)$$

$$c^i(\varphi_*,\psi,z,t) = c^i_*(\psi,z,t),\ c^i(\varphi^*,\psi,z,t) = c^{i*}(\psi,z,t),$$

$$c^i(\varphi,0,z,t) = c^i_{**}(\varphi,z,t),\ c^i(\varphi,Q,z,t) = c^{i**}(\varphi,z,t),$$

$$c^i(\varphi,\psi,0,t) = c^{i*}_{**}(\varphi,\psi,t),\ c^i(\varphi,\psi,H,t) = c^{i**}_*(\varphi,\psi,t),$$

$$T(\varphi_*,\psi,z,t) = T_*(\psi,z,t),\ T(\varphi^*,\psi,z,t) = T^*(\psi,z,t),$$

$$T(\varphi,0,z,t) = T_{**}(\varphi,z,t),\ T(\varphi,Q,z,t) = T^{**}(\varphi,z,t),$$

$$T(\varphi,\psi,0,t)=T_{**}^{*}(\varphi,\psi,t),\ T(\varphi,\psi,H,t)=T_{*}^{**}(\varphi,\psi,t), \tag{10}$$

де $\vec{q}=H\cdot\vec{v}$ – фільтраційна витрата; $c^i(\varphi,\psi,z,t)=\tilde{c}^i(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),z,t)$, $T(\varphi,\psi,z,t)=\tilde{T}(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),z,t)$.

Асимптотика розв'язку. Розв'язок (c^1,c^2,c^3,T) $(i=\overline{1,3})$ поставленої задачі (7) – (10) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів [6, 7]:

$$\begin{aligned}c^i(\varphi,\psi,z,t)&=c_0^i(\varphi,\psi,z,t)+\varepsilon c_1^i(\varphi,\psi,z,t)+\sum_{p=0}^{2}\varepsilon^p \ddot{I}_p^i(\xi,\psi,z,t)+\\&+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\underline{\Pi}_{\frac{l}{2}}^i(\varphi,\eta,z,t)+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\overline{\Pi}_{\frac{l}{2}}^i(\varphi,\mu,z,t)+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\underline{\underline{\Pi}}_{\frac{l}{2}}^i(\varphi,\psi,\beta,t)+\\&+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\overline{\overline{\Pi}}_{\frac{l}{2}}^{i}(\varphi,\psi,\alpha,t)+R_1^i(\varphi,\psi,z,t,\varepsilon),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}T(\varphi,\psi,z,t)&=T_0(\varphi,\psi,z,t)+\varepsilon T_1(\varphi,\psi,z,t)+2\sum_{p=0}^{2}\varepsilon^p P_p(\xi,\psi,z,t)+\\&+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\underline{P}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\eta,z,t)+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\overline{P_l}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\mu,z,t)+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\underline{\underline{P}}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\psi,\beta,t)+\\&+\sum_{l=0}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}\overline{\overline{P_l}}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\psi,\alpha,t)+R_1^4(\varphi,\psi,z,t,\varepsilon),\end{aligned} \tag{12}$$

де R_1^i – залишкові члени $c_j^i(\varphi,\psi,z,t)$ та $T_j(\varphi,\psi,z,t)$; $(j=\overline{0,1})$ – члени регулярної частини асимптотики [9], $\Pi_p^i(\xi,\psi,z,t)$ і $P_p(\xi,\psi,z,t)$; $(p=\overline{0,2})$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку із області G_{ϖ}); $\underline{\Pi}_{\frac{l}{2}}^i(\varphi,\eta,z,t)$, $\underline{P}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\eta,z,t)$, $\overline{\Pi}_{\frac{l}{2}}^i(\varphi,\mu,z,t)$, $\overline{P_l}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\mu,z,t)$, $\underline{\underline{\Pi}}_{\frac{l}{2}}^i(\varphi,\psi,\beta,t)$, $\underline{\underline{P}}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\psi,\beta,t)$, $\overline{\overline{\Pi}}_{\frac{l}{2}}^{i}(\varphi,\psi,\alpha,t)$, $\overline{\overline{P}}_{\frac{l}{2}}(\varphi,\psi,\alpha,t)$ $(l=\overline{0,4})$ – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q$, $z=0$, $z=H$, що враховують вплив бічних джерел забруднень; $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$, $\eta=\psi\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\mu=(Q-\psi)\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\beta=z\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\alpha=(H-z)\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення (розтяги). При цьому функції $D^i(T)$ та $S^i(T)$ розкладемо в ряд за степенями ε у вигляді [7]

$$D^i(T)=I_0^i(\tau_0)+\sum_{l=1}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}I_{\frac{l}{2}}^i(\tau_0,...,\tau_{\frac{l}{2}})+R_I^i(\tau_0,...,\tau_2,R_1^4,\varepsilon), \tag{13}$$

$$S^i(T)=J_0^i(\tau_0)+\sum_{l=1}^{4}\varepsilon^{\frac{l}{2}}J_{\frac{l}{2}}^i(\tau_0,...,\tau_{\frac{l}{2}})+R_J^i(\tau_0,...,\tau_2,R_1^4,\varepsilon), \tag{14}$$

де $\tau_j = T_j + P_j + \underline{P}_j + \overline{P}_j + \underline{\overline{P}}_j + \overline{\underline{P}}_j \quad (i = 0,1), \quad \tau_{\frac{j}{2}} = \underline{P}_{\frac{j}{2}} + \overline{P}_{\frac{j}{2}} + \underline{P}_{\frac{j}{2}} + \overline{\underline{P}}_{\frac{j}{2}} + \overline{\underline{P}}_{\frac{j}{2}} \quad (j = 1,3),$

$\tau_2 = P_2 + \underline{P}_2 + \overline{P}_2 + \underline{P}_2 + \overline{\underline{P}}_2$; $I_0^i(\bullet),..., I_4^i(\bullet), J_0^i(\bullet),..., J_4^i(\bullet), R_I^i(\bullet), R_J^i(\bullet)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Аналогічно до [5 – 7], після підстановки (11) – (14) в (7) – (10) та застосування стандартної «процедури прирівнювання», для знаходження регулярних частин асимптотики приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \dfrac{q^2(\varphi,\psi)}{H} \cdot c^i_{j\,\varphi}(\varphi,\psi,z,t) + \sigma c^i_{jt}(\varphi,\psi,z,t) = g^i_j(\varphi,\psi,z,t), \\ c^i_j(\varphi,\psi,z,0) = h^i_j(\varphi,\psi,z),\ c^i_j(\varphi_*,\psi,z,t) = b^i_j(\psi,z,t), \end{cases} \tag{15}$$

$g^i_0(\varphi,\psi,t) = 0$, $h^i_0(\varphi,\psi,z) = c^{i0}_0(\varphi,\psi,z)$, $b^i_0(\psi,z,t) = c^i_*(\psi,z,t)$, $h^i_1(\varphi,\psi,z) = 0$, $b^i_1(\psi,z,t) = 0$, $g^i_1(\varphi,\psi,z,t) = I^i_0(q^2(\varphi,\psi)\left(c^i_{0\varphi\varphi} + c^i_{0\psi\psi}\right) + c^i_{0zz}) + q^2(\varphi,\psi)(I^i_{0\varphi}c^i_{0\varphi} + I^i_{0\psi}c^i_{0\psi}) + I^i_{0z}c^i_{0z} - \alpha_i J^i_0 c^1_0 c^2_0$, $i = \overline{1,3}$;

$$\begin{cases} \dfrac{q^2(\varphi,\psi)}{H} \cdot T_{j\,\varphi}(\varphi,\psi,z,t) + \sigma T_{j\,t}(\varphi,\psi,z,t) = g^4_j(\varphi,\psi,z,t), \\ T_j(\varphi,\psi,z,0) = h^4_j(\varphi,\psi,z),\ T_j(\varphi_*,\psi,z,t) = b^4_j(\psi,z,t), \end{cases} \tag{16}$$

$g^4_0(\varphi,\psi,t) = 0$, $h^4_0(\varphi,\psi,z) = T^0_0(\varphi,\psi,z)$, $b^4_0(\psi,z,t) = T_*(\psi,z,t)$, $h^4_1(\varphi,\psi,z) = 0$, $b^4_1(\psi,z,t) = 0$, $g^4_1(\varphi,\psi,z,t) = a(q^2(\varphi,\psi)\left(T_{0\varphi\varphi} + T_{0\psi\psi}\right) + T^i_{0zz}) + \gamma c^1_0 c^2_0$.

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c^i_0(\varphi,\psi,z,t) = \begin{cases} c^i_*(\psi,z,t - f(\varphi,\psi)),\ t \ge f(\varphi,\psi), \\ c^{i0}_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t,\psi),\psi,z,t),\ t < f(\varphi,\psi); \end{cases}$$

$$c^i_1(\varphi,\psi,z,t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma H q^{-2}(\tilde{\varphi},\psi) \cdot g^i_1(\tilde{\varphi},\psi,z,f(\tilde{\varphi},\psi) + t - f(\varphi,\psi))\,d\tilde{\varphi},\ t \ge f(\varphi,\psi), \\ \int_0^t g^i_1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi,\psi) - t,\psi),\psi,z,\tilde{t})d\tilde{t},\ t < f(\varphi,\psi); \end{cases}$$

$$T_0(\varphi,\psi,z,t) = \begin{cases} T_*(\psi,z,t - f(\varphi,\psi)),\ t \ge f(\varphi,\psi), \\ T^0_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t,\psi),\psi,z,t),\ t < f(\varphi,\psi); \end{cases}$$

$$T_1(\varphi,\psi,z,t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma H q^{-2}(\tilde{\varphi},\psi) \cdot g^4_1(\tilde{\varphi},\psi,z,f(\tilde{\varphi},\psi) + t - f(\varphi,\psi))\,d\tilde{\varphi},\ t \ge f(\varphi,\psi), \\ \int_0^t g^4_1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi,\psi) - t,\psi),\psi,z,\tilde{t})d\tilde{t},\ t < f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi,\tilde{\psi})=\sigma H\int_{\varphi_*}^{\varphi} q^{-2}(s,\tilde{\psi})\,ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x,y,z)=\tilde{\psi}$, $0\le\tilde{\psi}\le Q$, $z(x,y,z)=\tilde{z}$, $0\le\tilde{z}\le H$), від еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi$; f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція q^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функції $\Pi^i=\sum_{p=0}^{2}\Pi_p^i\varepsilon^p$ та $P=\sum_{p=0}^{2}P_p\varepsilon^p$ призначені для усунення нев'язок, внесених побудованими регулярними частинами $c^i=\sum_{j=0}^{1}c_j^i\varepsilon^j$ та $T=\sum_{j=0}^{1}T_j\varepsilon^j$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Тобто повинні виконуватись умови $\left(c^i+\Pi^i\right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=c^{i*}+O\left(\varepsilon^2\right)$, $(T+P)\big|_{\varphi=\varphi^*}=T^*+O\left(\varepsilon^2\right)$. Для знаходження цих функцій, маємо такі задачі [8]:

$$q^2(\varphi^*,\psi)\Pi^i_{p\xi\xi}(\xi,\psi,z,t)+\frac{q^2(\varphi^*,\psi)}{H}\Pi^i_{p\xi}(\xi,\psi,z,t)=d_p^i(\xi,\psi,z,t),$$

$$\Pi_p^i\to 0,\ при\ \xi\to\infty,\ \ \Pi_p^i(0,\psi,z,t)=w_p^i(\psi,z,t),\ \ p=\overline{0,2},$$

$$q^2(\varphi^*,\psi)P_{p\xi\xi}(\xi,\psi,z,t)+\frac{q^2(\varphi^*,\psi)}{H}P_{p\xi}(\xi,\psi,z,t)=d_p^4(\xi,\psi,z,t),$$

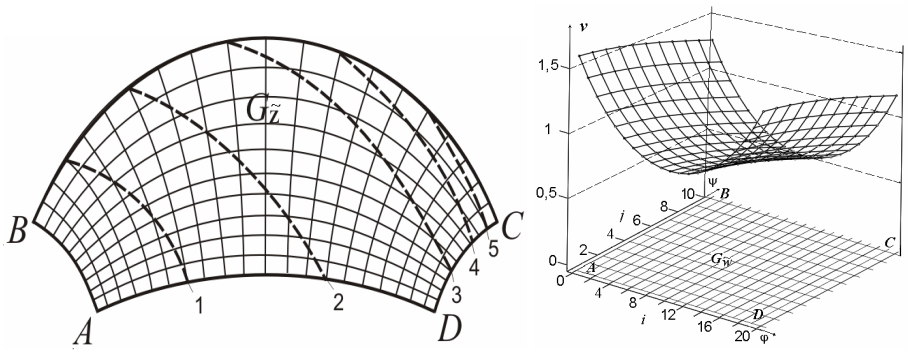
$$P_p\to 0,\ при\ \xi\to\infty,\ \ P_p(0,\psi,z,t)=w_p^4(\psi,z,t),\ \ p=\overline{0,2},$$

де $d_0^i(\xi,\psi,z,t)=0$, $i=\overline{1,4}$ $d_1^i(\xi,\psi,z,t)=\Pi_{0t}^i(\xi,\psi,z,t)$, $i=\overline{1,3}$, $d_1^4(\xi,\psi,z,t)=$ $=P_{0t}(\xi,\psi,z,t)$, $d_2^i(\xi,\psi,z,t)=f_1^i(\psi,z,t)e^{\frac{-\xi}{H}}+f_2^i(\psi,z,t)\xi e^{\frac{-\xi}{H}}$, $f_1^i(\psi,z,t)=-c_t^{i*}(\varphi^*,\psi,z,t)-$ $-q^2(\varphi^*,\psi)\frac{\partial^2\Pi_0^i}{\partial\psi^2}-\frac{\partial^2\Pi_0^i}{\partial z^2}$, $f_1^4(\psi,z,t)=-T_t^*(\varphi^*,\psi,z,t)-q^2(\varphi^*,\psi)\frac{\partial^2P_0}{\partial\psi^2}-\frac{\partial^2P_0}{\partial z^2}$, $f_2^i(\psi,z,t)=2q^{-1}(\varphi^*,\psi)q'(\varphi^*,\psi)\frac{\partial\Pi_0^i}{\partial t}-Hq^{-2}(\varphi^*,\psi)\frac{\partial^2\Pi_0^i}{\partial t^2}$, $f_2^4(\psi,z,t)=2q^{-1}(\varphi^*,\psi)\times$ $\times q'(\varphi^*,\psi)\frac{\partial P_0}{\partial t}-Hq^{-2}(\varphi^*,\psi)\frac{\partial^2P_0}{\partial t^2}$, $w_0^i(\psi,z,t)=c^{i*}(\psi,z,t)-c_0^i\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)$, $w_1^i(\psi,z,t)=$ $=-c_1^i\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)$, $i=\overline{1,3}$, $w_2^i(\psi,z,t)=0$, $i=\overline{1,4}$, $w_0^4(\psi,z,t)=T^*(\psi,z,t)-T_0\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)$, $w_1^4(\psi,z,t)=-T_1\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)$.

Функції типу примежового шару $\underline{\Pi}^i(\varphi,\eta,z,t)=\sum_{l=0}^{4}\underline{\Pi}_{l/2}^i\varepsilon^{l/2}$, $\underline{P}^i(\varphi,\eta,z,t)=$ $=\sum_{l=0}^{4}\underline{P}_{l/2}^i\varepsilon^{l/2}$ і $\overline{\Pi}^i(\varphi,\mu,z,t)=\sum_{l=0}^{4}\overline{\Pi}_{l/2}^i\varepsilon^{l/2}$, $\overline{P}^i(\varphi,\mu,z,t)=\sum_{l=0}^{4}\overline{P}_{l/2}^i\varepsilon^{l/2}$ призначені для

усунення нев'язок в околах $\psi = 0$ та $\psi = Q$ відповідно, а також функції $\underline{\underline{\Pi}}^i(\varphi,\psi,\beta,t) = \sum_{l=0}^{4} \underline{\underline{\Pi}}^i_{l/2}\varepsilon^{l/2}$, $\underline{\underline{P}}^i(\varphi,\psi,\beta,t) = \sum_{l=0}^{4} \underline{\underline{P}}^i_{l/2}\varepsilon^{l/2}$ і $\overline{\overline{\Pi}}^i(\varphi,\psi,\alpha,t) = \sum_{l=0}^{4} \overline{\overline{\Pi}}^i_{l/2}\varepsilon^{l/2}$, $\overline{\overline{P}}^i(\varphi,\psi,\alpha,t) = \sum_{l=0}^{4} \overline{\overline{P}}^i_{l/2}\varepsilon^{l/2}$ (призначені для усунення нев'язок в околах $z = 0$ та $z = H$) знаходимо в результаті проведення стандартної процедури "прирівнювання" аналогічно до [5–8].

Результати числових розрахунків. Наведемо результати розрахунку просторового процесу типу «конвекція–дифузія–масообмін–терморежим» на ідеальному плоскопаралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $\tilde{z}_1 = 0$ та $\tilde{z}_2 = 4$ (відповідно витік та впадання однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0/2\pi)\cdot\ln((\tilde{z}-\tilde{z}_1)/(\tilde{z}-\tilde{z}_2))$, при $\varphi_* = -1.5$, $\varphi^* = 1.5$, $AD = \{\tilde{z} : \psi(x,y) = 7\pi/6\}$, $BC = \{\tilde{z} : \psi(x,y) = 3\pi/2\}$ [8].

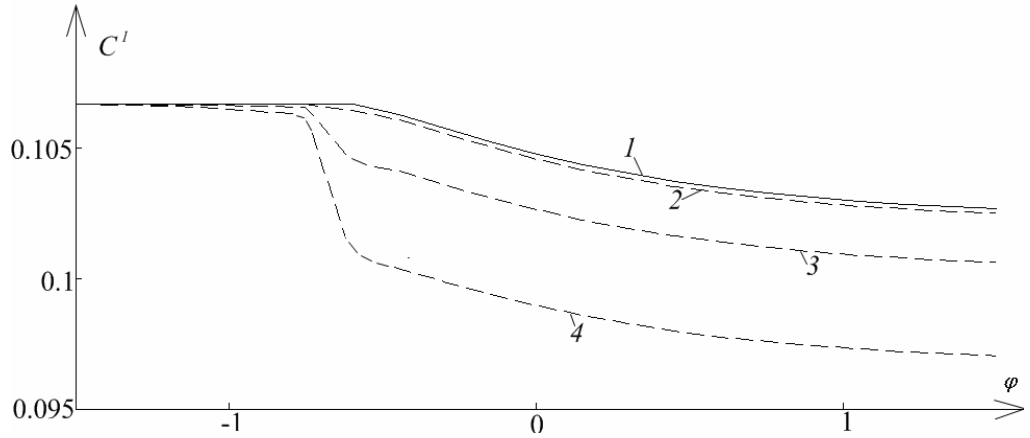


а) б)

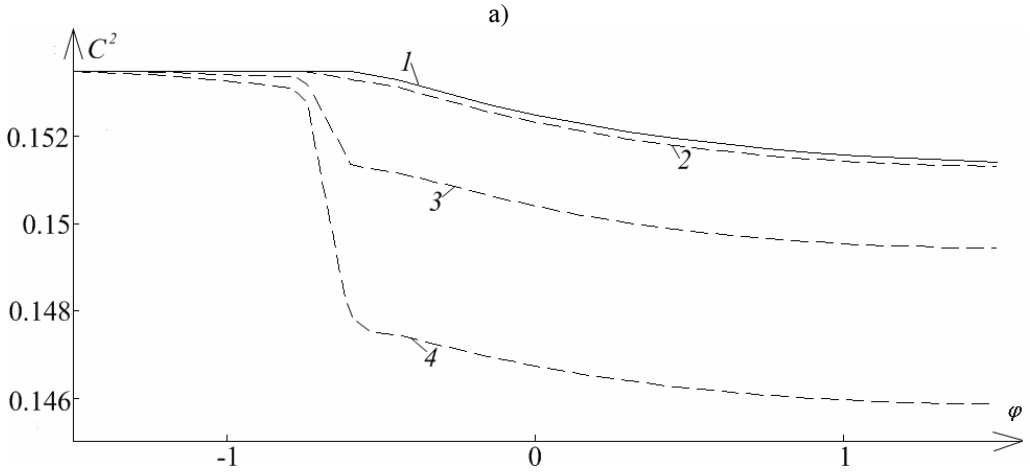
Рисунок 1. Лінії фронту (а) та величина швидкості (б)

Figure 1. Frontline (a) and velocity magnitude (b)

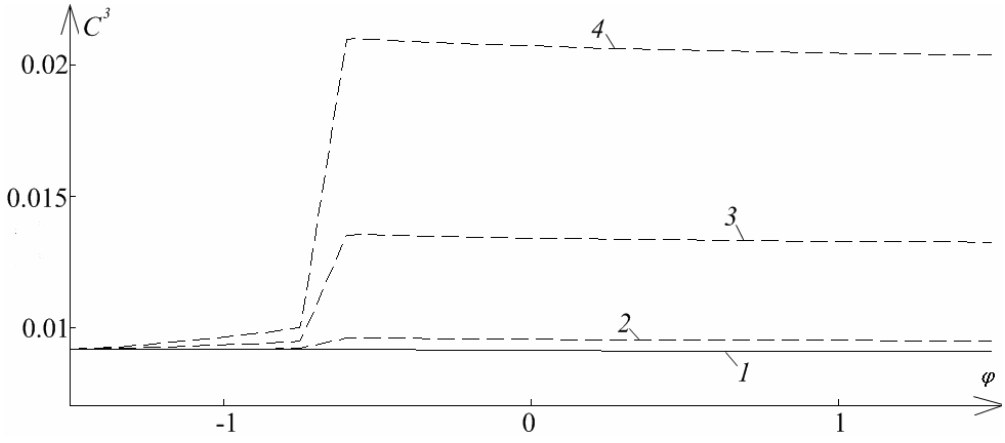
На рис.1 а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу $G_{\tilde{w}}$ та відповідну динамічну сітку в $G_{\tilde{z}}$: $\varphi(x,y) = \overline{\varphi}_i \overset{df}{=} \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*)\cdot i)/20$, $\psi(x,y) = \overline{\psi}_j \overset{df}{=} (Q_*\cdot j)/10$, $i = \overline{0,20}$, $j = \overline{0,10}$, величину швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw)(\overline{dz/dw})\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i,ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi,\psi) = t_k$, $k = \overline{1,5}$ при $t_1 = 0.5579$, $t_2 = 1.6349$, $t_3 = 3.2639$, $t_4 = 4.9997$, $t_5 = 6.2778$ (криві 1–5 відповідно).



а)



б)



в)

Рисунок 2. Вплив функції швидкості хімічної реакції на розподіл концентрації розчинних речовин

Figure 2. Effect of chemical reaction rate function for the distribution of the concentration of soluble substances

Розподіл концентрацій $c^i(\varphi,\psi,z,t)$ розчинних речовин при $\varepsilon = 0.001$, $H = 1$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.75$, $D^i(T) = 10\exp((T/15)-1)$,

$$c_0^{10}(\varphi,\psi,z)=0.1+0.02((\varphi+1.5)^2+\psi^2+z^2+4)^{-1},$$

$$c_*^1(\psi,z,t)=0.1+0.02(\exp(-t)+\psi^2+z^2+3)^{-1},$$

$$c^{1*}(\psi,z,t)=0.1+0.02\exp(-t-\psi/2)(12+z)^{-1},$$

$$c_{**}^1(\varphi,z,t)=0.1+0.02\left((\varphi+1.5)^2+z^2+2\cdot t+(7\pi/6)^2\right)^{-1},$$

$$c^{1**}(\varphi,z,t)=0.1+0.02\left((\varphi+1.5)^2+z^2+2\cdot t+(3\pi/2)^2\right)^{-1},$$

$$c_{**}^{1*}(\varphi,\psi,t)=0.1+0.02\left((\varphi+1.5)^2+\psi^2+2t\right)^{-1},$$

$c_*^{1**}(\varphi,\psi,t)=0.1+0.02\left((\varphi+1.5)^2+\psi^2+2t+1\right)^{-1}$, $c_0^{20}(\varphi,\psi,z)=0.08-0.05\sin(\psi/100)\times$ $\times\exp(2z)((\varphi+1.5)^2+3)^{-1}$, $c_*^2(\psi,z,t)=0.08+0.05\exp(2z)\sin(\psi/100)(\exp(-t)+2)^{-1}$, $c^{2*}(\psi,z,t)=0.08+0.05\exp(2z)\cos(y)\exp(-2t)/12$, $c_{**}^2(\varphi,z,t)=0.08+0.05\exp(2z)\times$ $\times\left((\varphi+1.5)^2+2t+(7\pi/6)^2\right)^{-1}$, $c^{2**}(\varphi,z,t)=0.08+0.05\exp(2z)\left((\varphi+1.5)^2+2t+(3\pi/2)^2\right)^{-1}$, $c_{**}^{2*}(\varphi,\psi,t)=0.08+0.05\,\mathrm{e}^2\sin(\psi/100)\left((\varphi+1.5)^2+2\cdot t\right)^{-1}$, $c_*^{2**}(\varphi,\psi,t)=0.05e^2\sin(\psi/100)\times$ $\times((\varphi+1.5)^2+2t+1)^{-1}+0.08$, $c_0^{30}(\varphi,\psi,z)=0.1z+0.2\sin^2(\psi/100)((\varphi+1.5)^2+3)^{-1}$, $c_*^3(\psi,z,t)=0.1z+0.2\sin^2(\psi/100)(\exp(-t)+2)^{-1}$, $c^{3*}(\psi,z,t)=0.2\sin^2(\psi)\exp(-2t)/12+$ $+0.1z$, $c_{**}^1(\varphi,z,t)=0.1z+0.2\left((\varphi+1.5)^2+2\cdot t+(7\pi/6)^2\right)^{-1}$, $c^{1**}(\varphi,z,t)=0.1z+0.2\left(2t+\right.$ $\left.+(3\pi/2)^2+(\varphi+1.5)^2\right)^{-1}$, $c_{**}^{1*}(\varphi,\psi,t)=0.1+0.2\sin^2(\psi/100)\left((\varphi+1.5)^2+2\cdot t\right)^{-1}$, $=0.1+0.2\sin^2(\psi/100)\left((\varphi+1.5)^2+2\cdot t+1\right)^{-1}$ уздовж характерних ліній течії при різних значеннях функції залежності реакції від температури середовища $S^i(T)$ зображено на рис.2. Зокрема на рис.2 а) проілюстровано розподіл концентрації речовини $c^1(\varphi,\psi,z,t)$, на рис.2 б) – речовини $c^2(\varphi,\psi,z,t)$, на рис.2 в) – речовини $c^3(\varphi,\psi,z,t)$. Крива 1 рис.2 а)–в) відповідає значенням $c_0^i(\varphi,\psi,z,t)$, а криві 2–4 – значенням $c_0^i(\varphi,\psi,z,t)+\varepsilon c_1^i(\varphi,\psi,z,t)$ при $S^i(T)=\exp(T-15)/5i$, $S^i(T)=(i+1)10\exp(T-15)$, $S^i(T)=10\ln(T)$ відповідно.

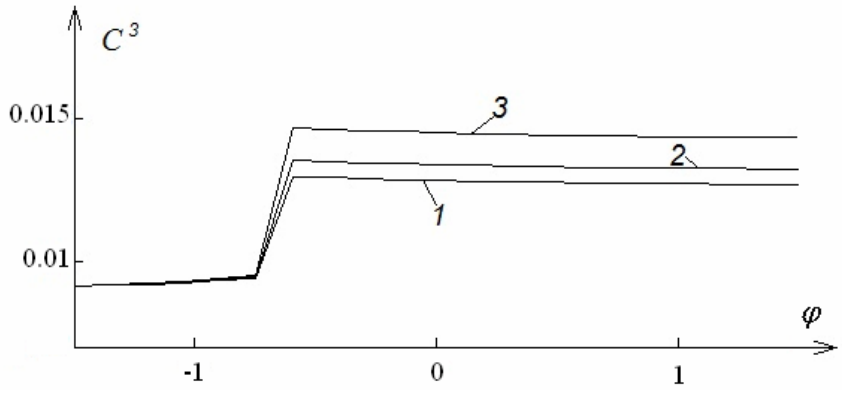


Рисунок 3. Вплив температури середовища на розподіл концентрації розчинної речовини

Figure 3. Effect of ambient temperature on Distribution of soluble substances

На рис.3 зображено розподіл концентрації розчинної речовини $c^3(\varphi,\psi,z,t)$ при початковому значенні температури середовища $T_0^0 = 14.2$ (крива 1), $T_0^0 = 15$ (крива 2), $T_0^0 = 15.3$ (крива 3).

Висновки. Запропоновано математичну модель нелінійного сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного масопереносу двох розчинних речовин, що вступають у хімічну реакцію з утворенням третьої розчинної речовини та певної кількості тепла. На основі отриманих результатів підтверджено прогнозоване пришвидшення ходу реакції речовин зі збільшенням температури середовища. Це дає можливість контролювати вибір речовин, що візьмуть участь у реакції, а також оптимальної температури середовища з метою зменшення концентрації забруднюючої речовини на виході фільтраційної течії даної області. В перспективі поширення запропонованої методики на випадок, коли процес протікає в середовищі з подвійною пористістю.

Conclusions. The mathematical model of nonlinear singularly perturbed convection – diffusion process of mass transfer of two soluble substances that enter into a chemical reaction with the formation of a third soluble substance and a certain amount of heat is formed. Basing on the results the predicted acceleration of progress of reaction of substances with increasing ambient temperature has been proved. It makes possible to control the selection of substances that take part in reaction and optimal ambient temperature in order to reduce the concentration of pollutants. In the future application of the proposed method to the case where the process takes place in a environment with double porosity, is possible.

Список використаної літератури

1. Большаков, В. А. Аэротехногенное загрязнение почвенного покрова тяжелыми металлами: источники, масштабы, рекультивація [Текст] / В.А. Большаков, Н.М. Краснова, Т.Н. Борисочкина и др. – М.: Изд-во Почвенного ин-та им. В.В. Докучаева, 1993. – 92 с.
2. Acosta, J.L. Porous media: heat and mass transfer, transport and mechanics / J.L. Acosta, A.F. Camacho – New York: Nova Science Publishers, Inc, 2009 – 255 p.
3. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 208с.
4. Bobisud, L.E. Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data // Jornal of mathematical analysis and opplications. – 1969 – Vol. 26 – P. 208-220.
5. Бомба, А.Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» [Текст] / А.Я. Бомба, С.В. Барановський І.М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
6. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція–дифузія–масообмін» [Текст] / В.М. Сівак, А.Я. Бомба, Ю.Є. Климюк, І.М. Присяжнюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист: збірн. наук. праць. – Вип.1 (33). – Рівне: НУВГП. – 2006. – С. 108–116.
7. Присяжнюк, О.В. Асимптотичний метод розв'язання нелінійних сингулярно збурених задач типу «конвекція–дифузія–масообмін–терморежим» [Текст] / О.В. Присяжнюк., І.М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія «Прикладна математика». – 2011. – Вип. 8(17). – С. 140–152.
8. Бомба, А.Я. Чисельно-асимптотичне наближення просторових задач конвективно-дифузійного переносу при плоскій фільтрації [Текст] / А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк, Ю. Є. Климюк // Вісник ТДТУ. – 2005. – Т.10, №3. – С. 158–165.

Отримано 15.11.2013