

УДК 539.3

**Н. Шинкарчук, канд. техн. наук**

*Рівненський державний гуманітарний університет*

## **МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА**

**Резюме.** Розглянуто мішану контактну задачу для ізотропної пластинки з квадратним отвором і жорсткого диска за наявності на лінії розмежування матеріалів зон спаю, гладкого без тертя контакту і відставання. Використовуючи інтегральні подання компонент вектора зміщення контурних точок, побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення контактних зусиль. Напружений стан на контурі отвору пластинки досліджено методом механічних квадратур і колокації.

**Ключові слова:** нескінченна пластинка, напружений стан, контактні зусилля, жорсткий диск, зона спаю, гладкий контакт.

**N. Shynkarchuk**

## **MIXED CONTACT PROBLEM FOR THE PLATE WITH SQUARE HOLE AND HARD DISK**

**Summary.** Composite plastic materials as elements of engineering structures are widely used in machinery, instrumentation, construction and other fields of modern technology. From the technological or structural points of view, they may consist of different materials with straight or curved boundary of their division, on which while manufacturing or operation may arise and develop cracks transverse sections of zero width.

We consider the mixed contact problem for a composite plate structure, which contains an infinite isotropic plate with a square hole and totally hard drive, fused together along the separation line of materials. By the action of concentrated power load applied at the center of the drive, the banks of lamellar structure cut are partially in contact. We consider that there is no friction in the area of plate and drive contact.

Solution of this problem involves identifying the components of stress state on the hole contour of the plate and setting the size and position of the contact zone.

In the area of smooth frictionless contact boundary conditions of the problem are elected as equality of normal plate and drive displacement, as in the area of junction are in the form of displacement equality of contour points.

Dependencies between the components of the displacement vector contour points of the plate and the hard drive and contact stresses are recorded in the form of integral relations with logarithmic kernels. By substituting these expressions into the boundary conditions, a system of four singular integral equations for determining the functions is obtained through which the contact force on the contact area and the junction are expressed.

For approximate solution of this problem the structure of the desired functions in the vicinity of the ends of sections of smooth frictionless contact zone and junction is set. At the ends of the junction area contact efforts have root feature. The desired searched functions have the same feature. The area smooth frictionless contact solution is chosen in the class of functions bounded at its ends. Approximate solution of the problem is realized by the mechanical quadrature and collocation method.

Dichotomy method determines the size and position of the contact zone. The results of numerical calculation of the stress state components are illustrated in the graphs.

**Key words:** infinite plate, stress state, contact force, hard disk, singular equations, zone of soldered joint, smooth contact.

**Вступ.** Розрахунок циліндричних з'єднань у передачах обертового руху призводить до необхідності розв'язання контактних задач про взаємодію пластинок з отворами і пружних або жорстких дисків. Унаслідок інтенсивної експлуатації таких передач на межі сполучення пластинки і диска з'являються тріщини, що призводять до значного послаблення передавання.

Розв'язок задачі про напружений стан пластинки із впаяною круговою шайбою з іншого матеріалу за наявності на лінії спаю одного або системи розрізів подано в [1–3].

У роботі [4] розглянуто задачу про передавання моментного навантаження до нескінченної пластинки через абсолютно жорсткий диск, вставлений в отвір пластинки з натягом. Досліджується поява зони відставання між пластинкою та диском.

Мішана контактна задача для пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска при їх неповному сполученні сформульована в [5]. Крайові умови задачі в зоні сполучення обираються у вигляді рівностей деформацій контурних точок пластинки і диска, а в зоні гладкого без тертя контакту – у вигляді рівності їх кривин.

В даній роботі запропоновано числовий розв'язок задачі про передавання силового і моментного навантаження від абсолютно жорсткого диска до контуру квадратного отвору нескінченної ізотропної пластинки за наявності на лінії розмежування матеріалів зон спаю, гладкого без тертя контакту і відставання.

**Постановка задачі.** Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною  $2h$  із симетричним криволінійним отвором, контур якого  $\Gamma$  має форму правильного чотирикутника із заокругленими кутами. Середню площину пластинки віднесемо до системи прямокутних  $(x, y)$  і полярних  $(r, \delta)$  координат з полюсом у центрі отвору.

Раціональна функція [6]

$$z = \omega(\xi) = \xi + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi^2} + \frac{\varepsilon_3}{\xi^3} \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності  $S^-$  одиничного кола  $\gamma(\rho_0=1)$  в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область, яку займає пластинка в площині  $z = x + iy$ .  $\varepsilon_j$  – параметри, які характеризують відхилення форми криволінійного многокутника від кола,  $j = \overline{1, 3}$ .  $(\rho, \lambda)$  – полярна система координат у площині  $\xi$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Нехай в отвір нескінченної пластинки без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск такої ж форми і розмірів. На ділянці  $\Gamma_3 = [\pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*]$  контуру  $\Gamma$  диск спаяний з пластинкою. В центрі диска прикладено зосереджену силу  $(X_0, Y_0)$  та пару сил з моментом  $M_0$ , унаслідок чого диск вступає у контактну взаємодію з пластинкою на проміжку  $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ . На ділянці  $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi + \alpha_1^*] \cup [\pi + \beta_1^*, 2\pi + \alpha_0^*]$  між пластинкою та диском виникає зона відставання (рис.1).

Тут  $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*$  – полярні кути межових точок ділянок контакту та спаю.

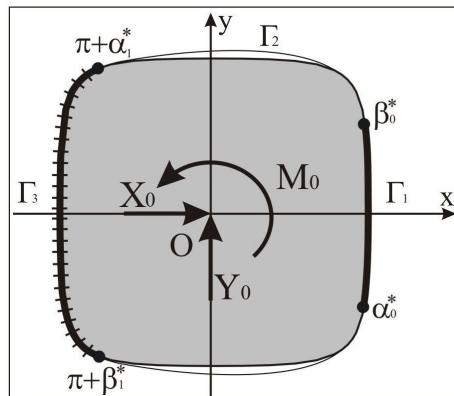


Рисунок 1. Розрахункова схема складеної пластинки

Figure 1. Analytical model of the composite plate

Розв'язок поставленої задачі полягає у визначенні компонентів напруженого стану на контурі отвору пластинки, величини і положення зон контакту.

**Інтегральні рівняння задачі.** Вирази для компонент вектора зміщення контурних точок пластинки та жорсткого диска при заданому навантаженні на підставі [7] запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 2Ehu &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + R_0(\lambda) + c_1; \\
 2Ehv &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + Q_0(\lambda) + c_2; \\
 (u+iv)_{\Gamma}^{\circ} &= (U_0+iV_0) + e^{i\varphi_0} \left( \sigma + \frac{\varepsilon_1}{\sigma} + \frac{\varepsilon_2}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon_3}{\sigma^3} \right); \quad \sigma = e^{i\lambda}, \quad \lambda \in \gamma, \quad (2)
 \end{aligned}$$

де введено позначення

$$\begin{aligned}
 R_0(\lambda) &= \frac{X_0(1+\nu)}{2\pi} (\varepsilon_2 \cos \lambda + \varepsilon_3 \cos 2\lambda) - \frac{Y_0(1+\nu)}{2\pi} (\varepsilon_2 \sin \lambda + \varepsilon_3 \sin 2\lambda) + \\
 &\quad + 4\varepsilon_3 (\tilde{\alpha}_1 \cos \lambda - \tilde{\beta}_1 \sin \lambda) - \frac{Y_0(1-\nu)}{2\pi} \lambda; \\
 Q_0(\lambda) &= \frac{Y_0(1+\nu)}{2\pi} (\varepsilon_2 \cos \lambda + \varepsilon_3 \cos 2\lambda) - \frac{X_0(1+\nu)}{2\pi} (\varepsilon_2 \sin \lambda + \varepsilon_3 \sin 2\lambda) + \\
 &\quad - 4\varepsilon_3 (\tilde{\alpha}_1 \sin \lambda + \tilde{\beta}_1 \cos \lambda) + \frac{X_0(1-\nu)}{2\pi} \lambda;
 \end{aligned}$$

$$a(\lambda) + ib(\lambda) = \omega'(\sigma) e^{i\lambda}; \quad f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt; \quad T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad E, \nu - \text{модуль}$$

Юнга і коефіцієнт Пуассона;  $c_1, c_2$  – сталі;  $\alpha_0, \beta_0, \pi+\alpha_1, \pi+\beta_1$  – образи кутів  $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi+\alpha_1^*, \pi+\beta_1^*$  при відображенні (1);  $T_{\rho}, S_{\rho\lambda}$  – нормальні та дотичні зусилля на контурі  $\Gamma$ ;  $U_0, V_0$  – компоненти жорсткого зміщення диска;  $\varphi_0$  – кут його повороту. Сталі  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$  визначимо зі співвідношень

$$\begin{aligned}
 (1-\varepsilon_3) \tilde{\alpha}_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \sin t dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \cos t dt + \varepsilon_2 \frac{X_0 - iY_0}{2\pi(1+\kappa)}, \\
 (1+\varepsilon_3) \tilde{\beta}_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \cos t dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \sin t dt.
 \end{aligned}$$

Граничні умови в зоні гладкого без тертя контакту приймаємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска [4, 7]

$$\begin{aligned}
 a(\lambda)u + b(\lambda)v &= \sum_{N=1}^3 ((N+1)\varepsilon_N \varphi_0 \sin(N+1)\lambda) + a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \\
 S_{\rho\lambda} &= 0; \quad \lambda \in [\alpha_0, \beta_0], \quad (3)
 \end{aligned}$$

а в зоні спаю – у вигляді рівності зміщень їх контурних точок

$$u = u^{\circ}; \quad v = v^{\circ}; \quad \lambda \in [\pi+\alpha_1, \pi+\beta_1]. \quad (4)$$

Підстановкою (2) в граничні умови (3), (4), отримаємо систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь із логарифмічними ядрами для визначення функцій  $f_1', f_2'$

$$\begin{aligned}
 & a(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + R_0(\lambda) \right] + \\
 & b(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + Q_0(\lambda) \right] = \\
 & = 2Eh \sum_{N=1}^3 ((N+1) \varepsilon_N \varphi_0 \sin(N+1)\lambda) + a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2, \\
 & f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0; \quad \lambda \in [\alpha_0, \beta_0]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + R_0(\lambda) = \\
 & = \tilde{c}_1 - 2Eh \sum_{N=2}^4 ((\sin \lambda - \varepsilon_{N-1} \sin((N-1)\lambda)) \varphi_0); \\
 & (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + Q_0(\lambda) = \\
 & = \tilde{c}_2 + 2Eh \sum_{N=2}^4 ((\cos \lambda + \varepsilon_{N-1} \cos((N-1)\lambda)) \varphi_0); \quad \lambda \in [\pi+\alpha_1, \pi+\beta_1]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Тут  $\tilde{c}_1 = 2EhU_0 - c_1$ ,  $\tilde{c}_2 = 2EhV_0 - c_2$ .

Крім цієї системи рівнянь, повинні виконуватися умови силової й моментної рівноваги диска [6], які служать для визначення сталих  $\tilde{c}_1$ ,  $\tilde{c}_2$  і  $\varphi_0$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma} f_2'(t) dt = -X_0; \quad \int_{\gamma} f_1'(t) dt = Y_0, \\
 & \int_{\gamma} [f_1'(t) \cos t + f_2'(t) \sin t] dt + \sum_{N=1}^3 \varepsilon_N \int_{\gamma} [f_1'(t) \cos Nt + f_2'(t) \sin Nt] dt = M_0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Контактні й кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки, через функції  $f_1'$ ,  $f_2'$  визначаємо за формулами, наведеними в [4,8].

**Наближений розв'язок задачі.** Знаходження точного розв'язку системи (5) – (6) за умов силової й моментної рівноваги диска (7) пов'язано зі значними математичними труднощами. Тому для наближеного розв'язку використовуємо метод механічних квадратур і колокації, ефективність якого проілюстровано в роботах [4,9].

**Результати числового розрахунку.** Для нескінченної ізотропної пластинки з квадратним ( $\varepsilon_1=0$ ,  $\varepsilon_2=0$ ,  $\varepsilon_3=\pm 0.1$ ) отвором досліджено вплив на величину нормальних  $T_\rho$  та дотичних  $S_{\rho\lambda}$  зусиль форми отвору пластинки та виду навантаження.

Досліджено також вплив величини зони спаю на величину ізольованої зони контакту та напружений стан на контурі отвору пластинки за наявності двох зон відставання, які прилягають до зони спаю.

Результати числових розрахунків компонентів напруженого стану при  $X_0=X_0$ ;  $Y_0=0$ ;  $M_0=0$  проілюстровано на рис.2–3. Штрихові лінії побудовано для випадку  $\beta_1=2\pi/3$ , суцільні –  $\beta_1=\pi/2$ , штрихпунктирні –  $\beta_1=\pi/4$ . В табл.1 наведено розміри зон контакту, які відповідають заданим величинам зон спаю.

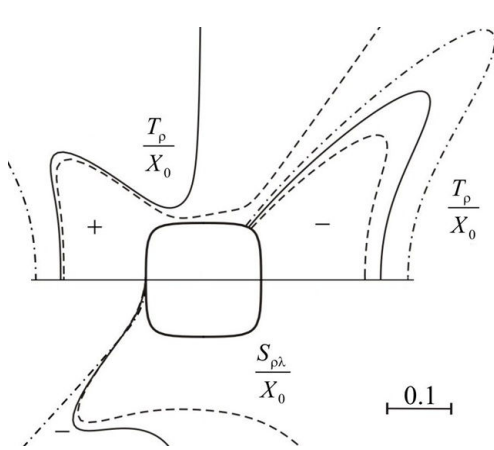


Рисунок 2. Розподіл нормальних зусиль

Figure 2. Distribution of the normal stresses

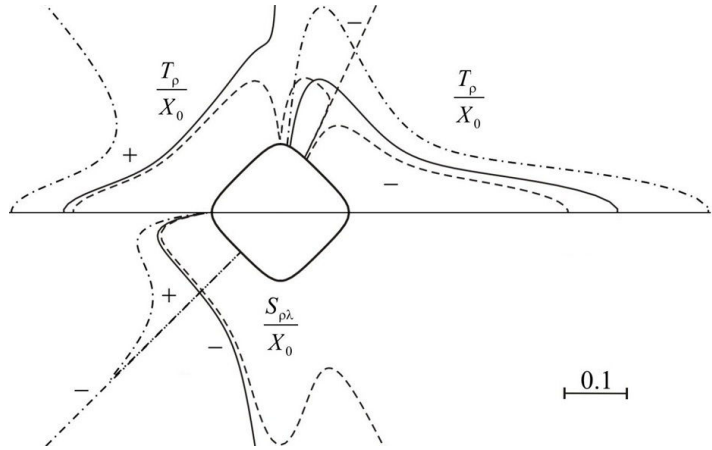


Рисунок 3. Розподіл нормальних зусиль

Figure 3. Distribution of the normal stresses

Таблиця 1

Значення граничних полярних кутів, що визначають зону контакту  $\beta_0^* = -\alpha_0^*$

$\beta_1 = -\alpha_1$ (град)	$\beta_0^* = -\alpha_0^*$ (град)		Вид лінії на рисунках
	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -0.1$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0.1$	
120	47.51	63.62	---
90	49.77	81.65	—
45	52.21	84.27	-.-.-.-.-

**Висновки.** Форма отвору пластинки суттєво впливає на величину зони контакту. Максимальні нормальні, кільцеві зусилля в зоні контакту та дотичні зусилля в зоні спаю виникають у точках контуру з найбільшою кривиною. Збільшення розмірів зони спаю пластинки і диска призводить до зменшення зони контакту. В межових точках зони спаю нормальні, дотичні й кільцеві зусилля необмежені.

**Conclusions.** Shape of the hole plates substantially affects the size of the contact zone. Maximal normal, ring efforts in the area of contact and tangential efforts in the area of solder appear in the points of greatest curvature of the contour. Increase of the plate and disk fused area size reduces the size of the contact area. In boundary points the fusing areas are normal, tangent and ring forces are unlimited.

**Список використаної літератури**

1. Грилицький, Д.В. Основные граничные задачи теории упругости для бесконечной изотропной пластинки со впаиной круглой изотропной шайбой с разрезами на линии спаю [Текст] / Д.В. Грилицький // Питання механіки та математики. – Львов: Изд-во Львов.ун-та. – 1969. – С. 15 – 24.
2. Грилицький, Д.В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов [Текст] / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин. – Львів : Вид-во «Вища школа» при ЛДУ, 1975. – 116 с.
3. Опанасович, В. Контактна задача для пластини з двома тріщинами різних довжин уздовж дуги кола [Текст] / В. Опанасович, Н. Копоть // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С.155 – 160.
4. Комбель, С.М. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки [Текст] / С.М. Комбель // Машинознавство. – 2003. – № 8. – С. 25 – 31.
5. Сяський, В.А. Мішана контактна задача для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / В.А. Сяський, А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – Рівне, 1998. – Вип. 5. – С. 139 – 146.
6. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

7. Сяський, А.О. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А.О. Сяський, Н.В. Шинкарчук // Волинський математичний вісник. Серія «Прикладна математика». – Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 199–209.
8. Батишкіна, Ю.В. Часткове підкріплення криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним стержнем [Текст] / Ю.В. Батишкіна, А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – 2002. – Випуск 9. – С. 4 – 11.
9. Сяський, А.О. Кусково-однорідна ортотропна пластинка з еліптичним розрізом за умови контактування його берегів [Текст] / А.О. Сяський, Н.В. Шинкарчук // Наукові нотатки: міжвузівський збірник (за напрямками «Інженерна механіка», «Металургія та матеріалознавство»). – Луцьк: Луцький національний технічний університет, 2011. – Вип. 30. – С. 168 – 174.

*Отримано 12.11.2013*