УДК 538.56:519.21:621.391

Я.П. Драган, Л.С. Сикора, Б.И. Яворский

СПЕЦИФИКА ИНФОРМАТИВНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РИТМИКИ — ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ И РОДСТВЕННЫХ ИМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Мир, в котором мы живем, склонен к колебаниям. Известный исследователь и популяризатор науки Р. Бишоп [1] эффектно показывает важность и многообразие колебаний — наши сердца бьются, наши легкие колеблются при дыхании; мы дрожим, когда нам холодно; можем слышать и разговаривать благодаря колебаниям барабанных перепонок и голосовых связок. Световые волны, которые дают нам возможность видеть, имеют колебательную природу. Когда мы ходим, наши ноги совершают колебательные движения. Колеблются даже атомы, из которых мы состоим. Не будет преувеличением утверждение, что вряд ли есть область науки, в которой колебания не играли бы существенной роли. Выделение колебаний как отдельного объекта изучения подчеркивает внутреннюю однородность внешне различных явлений, обусловленную тем, что они подчиняются общим закономерностям независимо от природы явлений.

Для колебаний характерным является повторение признаков. Но в последнее время, наряду с этой важной чертой, которую необходимо учитывать, чтобы в описании не утратить специфики колебаний в конкретных ситуациях, все более существенной становится случайность.

Итак, колебания на современном этапе развития науки интерпретируют как своеобразный симбиоз повторяемости и случайности — ритмику, представляющую собой статистическое повторение последовательностей фаз развития, временная развертка которых и порождает ритм.

Исследователями колебаний уже давно подчеркивалось, что даже поверхностное рассмотрение колебаний как случайных показывает, что здесь мы подходим к большой и сложной в математическом отношении проблеме, которая, несомненно, в будущем будет серьезно изучаться [1]. Исторически сложилось так, что первыми этой проблемой заинтересовались экономисты. В работах Е.Е. Слуцкого [2, 3] были заложены основы теории случайных процессов как моделей колебаний экономических показателей, что привело к выделению класса стационарных случайных процессов как наиболее подходящих, согласно взглядам того времени, на роль общих моделей колебаний. Это направление исследований нашло свое завершение в известной работе А.Н. Колмогорова [4], в которой шла речь, по существу, только (и исключительно) об описании спектра колебаний: он утверждал, что существование спектра (как разложения мощности) является автоматическим следствием стационарности и совсем не обязательно указывает на реальное возникновение исследуемого процесса из наложения строго периодических компонентов, как считалось до того. Проблема описания колебательного характера временных изменений в этой работе была обойдена, но не из-за математических трудностей, а

 ISSN 0572-2691

из-за отсутствия необходимых для ее решения понятий, так как даже для описания спектров и соответствующих им гармонических разложений процессов пришлось применить такой сложный аппарат, как теорию унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

Уже первые попытки построения хотя бы простой модели стохастических колебаний, которая бы описывала временную повторяемость [5], подтверждают сложность этой проблемы, показывают недостаточность подхода Колмогорова для описания изменчивости колебаний во времени (см. [5]). Исследование этой проблемы требует как привлечения уже известных математических методов — главным образом новейших достижений современного функционального анализа, новых фактов и теорий, так и их развития, в особенности для потребностей описания и анализа стохастических колебаний, ритмики, модуляций. Полученные специально для изучения ритмики и стимулированные ее потребностями результаты подытожены в монографии [6], базирующейся, в частности, на идеях работ [7-10], в которых изложена несколько более общая точка зрения на эти результаты.

Периодически коррелированные случайные процессы (ПКСП) и их информативные признаки. Рассмотрим теперь на базе этого подхода важные для описания реальных ритмических (стохастически колебательных) явлений свойства модели простой ритмики в виде ПКСП, обоснованной как адекватной их существенным чертам [5,11], ее частных случаев и обобщений. В этих моделях повторяемость и случайность соединены так, что повторяемость перенесена на значения вероятностных характеристик случайных процессов, которые служат математическими моделями стохастических колебаний.

Определение 1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, называют периодически коррелированным, если существуют его матожидание $m_\xi(t) \triangleq E\xi(t)$ и ковариация $r_\xi(t,s) \triangleq \mathrm{E}\,\overset{\circ}{\xi}(t)\,\overline{\overset{\circ}{\xi}(s)}$, где $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ — центрированное матожиданием значение, а E — символ усреднения по распределению (вычисления матожидания), и такое фиксированное число $T > 0$, что выполняются условия

$$m_\xi(t+T) = m_\xi(t),\ r_\xi(t+T, s+T) = r_\xi(t,s);\ t, s \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Поскольку статистические характеристики ПКСП периодические относительно совокупности аргументов, то возникает вопрос о разложении его на гармоники и учете этого свойства. А так как этот процесс нестационарный, его разложение должно быть разложением типа гармонизуемости по Лоэву, т.е. представлением вида

$$\xi(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \tag{2}$$

где $Z(\Delta)$ — случайная мера на числовой оси: $\Delta \subseteq \mathbf{R}$. Обычно принимают, что эта мера имеет конечную дисперсию $\mathrm{E}\,|\overset{\circ}{Z}(\Delta)|^2 \triangleq S(\Delta) < \infty$ для всех $\Delta \subseteq \mathbf{R}$, которая неотрицательна.

Для стационарного процесса случайная мера ортогональна: для непересекающихся множеств Δ, Δ' имеем $\mathrm{E}\,\overset{\circ}{Z}(\Delta)\,\overline{\overset{\circ}{Z}(\Delta')} = 0$, а в общем случае $\mathrm{E}\,\overset{\circ}{Z}(\Delta)\,\overline{\overset{\circ}{Z}(\Delta')} = S(\Delta \cap \Delta')$. Это является характеристическим свойством стационарности, выраженным в спектральных терминах: стационарность процесса равносильна некоррелированности его гармонических составляющих.

Для нестационарного процесса случайная мера в представлении (2) характеризуется структурной мерой (бимерой) $F(\Delta, \Delta') \triangleq \mathrm{E}\, \overset{\circ}{Z}(\Delta) \overline{\overset{\circ}{Z}(\Delta')}$, которая является функцией положительно определенного типа, т.е. обладает характеристическим свойством

$$\sum_{k,j=\overline{1,N}} z_k \overline{z}_j F(\Delta_k, \Delta_j) \geq 0$$

при всех комплексных $z_k \in \mathbf{C}$, целых $N \in \mathbf{N}$ и $\Delta_k \subseteq \mathbf{R}$. Понятно, что положительная определенность есть обобщение положительности.

В зависимости от свойств случайной меры интеграл (2) будет иметь разный смысл. Но при всяком разумном определении этого интеграла из соотношения (2) вытекает, что оно равносильно представлению ковариации двойным интегралом

$$r(t, s) = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{i(t\lambda - s\mu)} F(d\lambda, d\mu). \tag{3}$$

С учетом достижений современного функционального анализа возможны следующие интерпретации интегралов (3): 1) если выполняется условие

$$\mathrm{var}_V F \triangleq \sup_{\Delta_k, \Delta_j} \sum_{k,j} |F(\Delta_k, \Delta_j)| = \iint_{\mathbf{R}^2} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty, \tag{4}$$

т.е. если вариация Витали бимеры конечна, то она обеспечивает существование интеграла (3) как лебегового, а процесс тогда называют гармонизуемым по Лоэву, или, по терминологии Ю.А. Розанова, абсолютно гармонизуемым; 2) если выполняется условие

$$\mathrm{var}_F F \triangleq \sup \Big|\sum_{k,j} a_k, \overline{b}_j F(\Delta_k, \Delta_j)\Big| = \sup \Big|\iint_{\mathbf{R}^2} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\mu)} F(d\lambda, d\mu)\Big| < \infty, \tag{5}$$

где числа a_k, b_j и функции $\varphi(\lambda), \psi(\mu)$ не превышают по модулю 1, тогда это — вариация Фреше, интеграл — в смысле Радона, а гармонизуемость — по Розанову; 3) если выполняется условие

$$\mathrm{var}_D F \triangleq \mathrm{var} S_D \equiv S_D(\mathbf{R}),$$

т.е. конечной является вариация диагональной меры $S_D(\Delta) \triangleq F(\Delta, \Delta)$ бимеры $F(\Delta, \Delta')$, то интеграл (3) следует понимать в смысле интеграла Фурье-Лебега функции $r(t, s)$ двух переменных, а гармонизуемость — как разложение на гармоники с конечной суммарной дисперсией (поэтому названа она D-гармонизуемостью), так как $S_D(\Delta) = F(\Delta, \Delta) = \mathrm{E}\, |\overset{\circ}{Z}(\Delta)|^2 = d_{Z(\Delta)}$ — дисперсия (суммарная) гармоник с частотами $\lambda \in \Delta$. Поскольку по определению вариация счетно-аддитивной меры $\mathrm{var}\, m = \sup \sum |m(\Delta_k)|$, а мера $S_D(\Delta)$ неотрицательна и монотонна (неубывающая) в том смысле, что из факта $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ следует $S_D(\Delta_1) \leq S_D(\Delta_2)$, то ее вариация есть просто значение этой меры на оси:

$$\mathrm{var}\, S_D = S_D(\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{R}} S_D(d\lambda),$$

ISSN 0572-2691

т.е. $\operatorname{var} S_D$ — суммарная дисперсия всех гармонических составляющих процесса. В обоих случаях — 1) и 2), как видно из выражения интеграла (3), процесс будет гильбертовым, поскольку тогда $|r(t,s)| < \infty$ и, как следует из этого, $d(t) = r(t,t) = \mathrm{E}\,|\mathring{\xi}(t)|^2 < \infty$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Но класс гармонизируемых по Лоэву процессов уже класса гильбертовых. Доказательство проводят путем сравнения формул (4) и (5), что и было в свое время сделано Ю.А. Розановым. В случае 3), поскольку с учетом ортонормированности $M_t\{e^{it(\lambda-\mu)}\} = \delta_{\lambda,\mu}$ из формулы (3) следует $\operatorname{var}_D F = S_D(\mathbf{R}) = M_t\{r(t,t)\}$, то функция $r(t,t) = d(t)$ не обязана быть ограниченной всюду, а лишь почти всюду, поэтому это условие более слабое, чем гильбертовость, а класс процессов шире.

Производная спектральной бимеры в смысле обобщенных функций Шварца

$$f(\lambda,\mu) \triangleq \frac{F(d\lambda, d\mu)}{d\lambda d\mu} \tag{6}$$

выражает корреляцию гармоник с частотами λ и μ. В общем здесь эта производная будет обобщенной функцией. Показано [8], что предположение, что она будет обычной интегрируемой с квадратом функцией, равносильно тому, что процесс имеет конечную энергию

$$E_\xi \triangleq \int\limits_{\mathbf{R}} \mathrm{E}\,|\mathring{\xi}(t)|^2 dt = \int\limits_{\mathbf{R}} d_\xi(t)\, dt < \infty. \tag{7}$$

В частности, для стационарного процесса, так как его гармоники не коррелированы, эта производная имеет вид $f(\lambda,\mu) = s(\lambda)\,\delta(\lambda-\mu)$, где $\delta(\cdot)$ — известная дельта-функция Гевисайда-Дирака. Отметим, что более естественным аппаратом описания распределений являются меры, но тогда необходимо иметь возможность (средства) конструктивно их задавать. Математики, следуя Стильтьесу, традиционно пользуются функциями распределения, но для локализированных масс они неудобны, поэтому физики предпочитают иметь дело с функциями, которые корректно описывает теория обобщенных функций. А колебания описываются (так как рассматриваем, в общем, незатухающие колебания, которые предполагаются «вечными», т.е. заданными на всей временной оси) процессами, принадлежащими к другому классу. Моделями колебаний тогда являются процессы с конечной средней на всей оси мощностью

$$P_\xi \triangleq \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int\limits_{-L}^{L} \mathrm{E}\,|\mathring{\xi}(t)|^2\, dt = M_t\{\mathrm{E}\,|\mathring{\xi}(t)|^2\} = M_t\{d_\xi(t)\} < \infty.$$

Первый класс, образованный процессами конечной энергии, был назван классом ε, а второй — классом π. Понятно, что D-гармонизуемость и принадлежность процесса к классу π равносильны. А это значит, что не существует никакого специального класса гармонизуемых процессов, а гармонизуемые по Розанову процессы входят в класс π. В класс π входят и стационарные случайные процессы, поскольку для них интеграл (3) будет выглядеть как

$$r_\xi(t,s) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{i(t\lambda - s\mu)}\, s(\lambda)\,\delta(\lambda-\mu)\,d\lambda\, d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i(t-s)\lambda}\, s(\lambda)\, d\lambda = R_\xi(t-s),$$

откуда следует, что ковариация стационарного процесса действительно зависит только от разности аргументов, а его средняя мощность $P_\xi = M_t\{d(t)\} = M_t\{R_\xi(0)\} = R_\xi(0) < \infty$ как среднее от постоянной равно этой постоянной.

Заменив в выражении (3) переменные $t + u \to t$ и $t \to s$ и введя для характеристики корреляционной связи значений процесса новую функцию

$$b_\xi(t, u) = r_\xi(t + u, t), \tag{8}$$

в случае стационарного процесса имеем

$$\begin{aligned} b_\xi(t, u) &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{\,i([t+u]\lambda - t\mu)}\, s(\lambda)\, \delta(\lambda - \mu) d\lambda\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\,i(t+u-t)\lambda}\, s(\lambda)\, d\lambda = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\,iu\lambda}\, s(\lambda)\, d\lambda = R_\xi(u), \end{aligned} \tag{9}$$

откуда следует, что функция $b(t, u)$ для этого процесса действительно при всех u не зависит от t. Таким образом, зависимость от t ковариации $b(t, u)$ может служить также индикатором нестационарности процесса.

Положив в формулах (8) и (9) $u = 0$, имеем, что таким индикатором будет и дисперсия процесса

$$d_\xi(t) = b_\xi(t, 0), \tag{10}$$

которая для стационарного процесса постоянна: $d_\xi(t) = R_\xi(0) = \text{const}$. Если ввести для ковариации нестационарного процесса представление (также в смысле теории обобщенных функций)

$$b_\xi(t, u) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{\,i(u\lambda - t\mu)}\, c(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

то для функций корреляционной связи гармоник получаем выражение

$$c(\lambda, \mu) = f(\lambda, \lambda - \mu).$$

Для ПКСП функция корреляции в результате периодичности (при всяком фиксированном $u \in \mathbb{R}$) имеет представление в виде ряда Фурье

$$b_\xi(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u)\, e^{\,ik\frac{2\pi}{T}t}. \tag{11}$$

Функции $B_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{Z}$, в этом разложении называют корреляционными компонентами. Из этой формулы следует, что функция корреляции гармоник ПКСП определяется через спектральные компоненты процесса

$$f_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} B_k(u)\, e^{-iu\lambda}\, du$$

выражением

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\lambda)\, \delta(\lambda - \mu + k\frac{2\pi}{T}).$$

Из последней формулы видно, что гармоника частоты λ_0 коррелирована исключительно с гармониками частот $\lambda_0 + k\frac{2\pi}{T}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

ISSN 0572-2691

Коэффициенты корреляции при этом определяются значениями спектральных компонентов $f_k(\lambda_0)$.

С другой стороны, функция $f_k(\cdot)$ — k-я гармоника изменения спектральной плотности параметрического спектра, который входит в представление функции корреляции $b_\xi(t,u)=\int\limits_{\mathbf{R}} e^{iu\lambda} f(t,\lambda)\,d\lambda$, и одновременно равна k-му коэффициенту разложения при всяком $\lambda\in\mathbf{R}$ этой плотности в ряде Фурье.

Понятие параметрического спектра является оксимороном, т.е. противоречивым в своем определении, потому что $f(t,\lambda)$ не имеет всех свойств спектра и, главное, — она не положительна, а в общем — комплекснозначная. Но обладает другим важным в данном случае свойством — она периодична во времени с периодом, равным периоду коррелированности процесса. Поэтому имеет место представление

$$f(t,\lambda)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k(\lambda)\,e^{ik\frac{2\pi}{T}t}. \tag{12}$$

Из этого типа коррелированности следует, что фильтр, полуполоса пропускания которого $\frac{\Delta\lambda}{2}<\frac{\pi}{T}$, дает возможность устранить влияние гармоник, коррелированных с отфильтрированными. Поэтому для такой «спектральной вырезки» из процесса остаются в силе все результаты теории фильтрации стационарных процессов.

Другие свойства ПКСП нетрудно получить из их представления через стационарные и взаимно-стационарно-коррелированные компоненты $\xi_k(t)$:

$$\xi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} \xi_k(t)\,e^{ik\frac{2\pi}{T}t}. \tag{13}$$

Для доказательства этого факта показано (см. [12]), что если функция двух переменных $r(t,s)$ — положительно определенного типа, т.е. такая, что при всех t_k, комплексных C_k, $k=\overline{1,N}$, и всяком целом N

$$\sum_{k,j=\overline{1,N}} C_k\overline{C}_j r(t_k,t_j)\geqslant 0,$$

и обладает конечным средним

$$B(t-s)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T r(t+v,s+v)\,dv, \tag{14}$$

т.е. $|B(u)|<\infty$, для нее справедливо представление в виде

$$r(t,s)=\sum_{l,n\in\mathbf{Z}} e^{i\frac{2\pi}{T}(lt-ns)} D_{ln}(t-s). \tag{15}$$

Здесь $D(u)$ — бесконечная положительно определенная матрица (корректное определение таких матриц есть в книге [13] как выполнение условия

$$\sum_{k,j=\overline{1,N}} C(t_k)\,D(t_k-t_j)\,\widetilde{C}(t_j)\geqslant 0,$$

где $C(t) = \left[C_{pq}(t)\right]_{p,g \in \mathbf{Z}}$ — произвольная матрица, а $\sim$ — символ эрмитового сопряжения матриц) с конечным следом $|\operatorname{tr}\mathbf{D}(u)| < \infty$. В силу положительной определенности для этого достаточно выполнения условия $|\operatorname{tr}\mathbf{D}(0)| < \infty$. Аналогично для ограниченности средней ковариации, т.е. того, что $|B(u)| < \infty$, достаточно выполнения условия $B(0) < \infty$. Можно показать, что среднее (14) совпадает с нулевым корреляционным компонентом ПКСП из формул (11), т.е. что

$$B(u) = B_0(u);\ u \in \mathbf{R}.$$

Поэтому достаточно требовать ограниченности только нулевого компонента в нуле, т.е. чтобы было $B_0(0) < \infty$. Понятно, что разложения (13) и (15) эквивалентны. Это значит, что из одного вытекает как следствие другое и наоборот.

Определение 2. Про ПКСП, ковариация которого удовлетворяет приведенным условиям, будем говорить, что он принадлежит классу π^T ПКС процессов конечной средней за период коррелированности мощности, которая в данном случае задается выражением

$$P_\xi^T \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}\,|\overset{\circ}{\xi}(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T d_\xi(t)\,dt. \tag{16}$$

Этот класс ПКСП — подкласс класса π и формула (16) — частный случай формулы (8), поскольку дисперсия ПКСП — периодичная функция, период которой равен периоду коррелированности процесса, а среднее по всей оси от периодичной функции равно ее среднему по интервалу длины, равной ее периоду. Поэтому справедливо следующее, ~~утверждение~~

Теорема 1. ПКСП принадлежит классу π^T тогда и только тогда, когда он обладает представлением вида (13), где $\left[\xi_k(t)\right]_{k \in \mathbf{Z}}$ — векторный стационарный процесс, корреляционная матрица которого удовлетворяет условию $\operatorname{tr} D(0) < \infty$.

Учитывая спектральное разложение стационарных компонентов (представление Крамера $\xi(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda)$ стационарного процесса, где $Z(\Delta)$, $\Delta \subseteq \mathbf{R}$, — ортогональная случайная мера $\mathbf{E}\,\overset{\circ}{Z}(\Delta)\,\overline{\overset{\circ}{Z}(\Delta')} = F(\Delta, \Delta')$), имеем спектральное представление ПКСП

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} Z_k(d\lambda) \tag{17}$$

через стационарные компоненты с полным спектром, которое впервые без доказательства было приведено в [14]. Если производим замену переменных интегрирования $\lambda = j\frac{2\pi}{T} + \nu$, где $j \in \mathbf{Z}$ — целое число, а $\nu \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$, и введем обозначение

$$Z_m^0(\nu) \triangleq \sum_{j \in \mathbf{Z}} Z_{m-j}\left(j\frac{2\pi}{T} + \nu\right),$$

ISSN 0572-2691

тогда соотношение (17) можно представить как

$$\xi(t)=\sum_{m\in Z} e^{im\frac{2\pi}{T}t}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{it\nu} Z_m^0(d\nu)$$

через стационарные компоненты с финитным спектром с носителем $[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T})$.

Такое выражение было фактически записано еще в 1971 г. Г. Огурой без последовательного доказательства. Полностью ситуация с представлениями и корректным доказательством выяснена в работе [12].

Если учитывать свойства спектральных случайных мер представлений (17) и (18), то можно показать, исходя из параметрического представления корреляционной матрицы последнего, что между ними существует взаимно однозначное соответствие с точностью до пермутационной эквивалентности, т.е. относительно перестановок собственных векторов, отвечающих тому же собственному значению этой матрицы. Поэтому можно всегда с точностью до этого условия переходить от представления ПКСП через стационарные компоненты с полными спектрами (17) к представлению (18) через стационарные компоненты с финитными спектрами, носителями которых есть отрезок. Последнее представление справедливо исключительно для ПКСП, а не для их обобщения — разных типов почти периодически коррелированных случайных процессов (ППКСП).

Определение 3. ППКСП называют такой случайный процесс, матожидание и ковариация $b(t,u)$ которого при всех $u\in R$ являются почти периодичными функциями в смысле Бора-Безиковича.

Тогда этот процесс обладает представлением

$$\xi(t)=\sum_{k\in Z} e^{i\lambda_k t}\xi_k(t),$$

где $\left[\xi_k(t)\right]_{k\in Z}$ — векторный стационарный случайный процесс с полными спектрами, а λ_k, $k\in \mathbf{Z}$, — показатели Фурье функции $b(\cdot,u)$. При $\lambda_k=k\frac{2\pi}{T}, k\in Z$, имеем ПКСП. Из выражения (13) для матожидания имеем

$$m_\xi(t)=\sum_{k\in Z} m_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t},$$

где $m_k=\mathrm{E}\,\xi_k(t)$ — матожидания соответствующих стационарных компонентов. Из этой формулы видно, что матожидание ПКСП может быть:

а) нулем, в случае центрированности всех стационарных компонентов, $m_k=0,\ \forall k\in \mathbf{Z}$;

б) периодичной функцией периода, равного периоду коррелированности процесса, когда все $m_k\neq 0$;

в) постоянным, если $m_0\neq 0$, а $m_k=0$ для $k\neq 0$.

Полученное из формулы (15) выражение для дисперсии ПКСП

$$d_\xi(t)=\sum_{k\in Z} B_k(0)\,e^{ik\frac{2\pi}{T}t}\geq 0$$

показывает, что дисперсия может быть:

а) в общем случае периодичной того же периода, что и период коррелированности процесса;

б) периодичной с половинным периодом;

в) постоянной.

Дисперсия ПКСП информативнее по сравнению с матожиданием, потому что она независима от него и глубже отображает периодичность статистических свойств процесса.

Если $B_{2p+1}(u) \equiv 0$ при всех u и всех целых p, то дисперсия будет иметь половинный период. А для того чтобы матожидание имело тот же период, необходимо, чтобы нечетные стационарные компоненты в формуле (13) были центрированными, т.е. чтобы $m_{2p+1} = 0$ при всех целых $p \in \mathbf{Z}$. При $B_k(u) \equiv 0$ для всех $k \in \mathbf{Z}$ процесс вырождается в стационарный относительно корреляции. Матожидание в этом случае может быть не нулем, тогда оно описывает (периодичный) тренд процесса. Это будет так называемая аддитивная модель (см. ниже). Когда ПКСП сформирован из действительного стационарного процесса с помощью линейной системы с периодически переменными параметрами, тогда он имеет период коррелированности вдвое меньше (половинный) периода изменения параметров системы.

Поскольку период матожидания определяется центрированностью стационарных компонентов, а дисперсия — значениями в нуле корреляционных компонентов, то матожидания и дисперсия ПКСП могут быть использованы как независимые критерии для предварительного установления и уточнения периода коррелированности процесса, хотя каждый из них определяет его неоднозначно. Кроме того, таким критерием будет и нулевой корреляционный компонент, когда он является периодичной функцией. Тогда процесс будет периодическим. Этот критерий не зависит от предыдущих, потому что нулевой корреляционный компонент не обязательно периодический, но в случае периодичности — его период кратный периоду коррелированности. (Это полигармоничная модель, см. далее.)

Поскольку, как показано в [13], лишь $B_0(u)$ будет обыкновенной положительно определенной функцией, то только $f_0(\lambda) \geq 0$. Эта функция характеризирует дисперсию гармоник, составляющих процесс, поэтому и по физическому смыслу она не может быть отрицательной. Остальные корреляционные компоненты не являются положительно определенными, поэтому спектральные компоненты $f_k(\lambda)$ при $k \neq 0$ будут комплексными, поскольку они описывают корреляцию различных гармоник. При этом $|f_k(\lambda)|$ дает корреляционную связь амплитуды гармоники частоты λ с амплитудой гармоники частоты $\lambda - k\frac{2\pi}{T}$, а $\arg f_k(\lambda)$ — связь взаимных фазовых сдвигов этих гармоник. Это вытекает из того, что корреляционные компоненты вследствие их ограниченности величиной $B_0(0)$ обладают представлениями в виде интеграла Фурье-Стильтьеса

$$B_k(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} F_k(d\lambda).$$

Поэтому обобщенная спектральная плотность ПКСП будет иметь вид (12), где $f_k(\lambda) = \frac{F_k(d\lambda)}{d\lambda}$ — обобщенные производные мер.

 ISSN 0572-2691

Определение 4. Стационарный случайный процесс, который имеет тот же самый набор гармоник, что и заданный нестационарный, и с такими самыми дисперсиями, назовем стационаризантой (стационарным приближением) последнего.

Следовательно, стационаризанта процесса отличается от самого процесса отсутствием корреляции между его составляющими гармониками. Ковариация стационаризанты

$$R(u) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} b(t, u)\, dt.$$

Поэтому для стационаризанты ПКСП имеем, что $R(u) = B_0(u)$, т.е. нулевой корреляционный компонент определяет ковариацию его стационаризанты. Фурье-образ этой функции называют спектром Форте-Харкевича, или, в терминологии А.А. Харкевича, спектром, полученным в результате двойного усреднения — по вероятности и во времени. Харкевич и ставил проблемы: выяснить, когда такое усреднение возможно и каков его смысл. Энергетическая теория дает ответ на вопрос об условиях и смысле получаемого спектра. Он существует для процессов класса π и дает распределение средней мощности процесса по его гармоническим составляющим. Следовательно, усреднение во времени устраняет коррелированность составляющих.

Частные случаи и обобщения. Рассмотрим подробнее, как получаются известные из литературы модели в виде частных случаев общей модели стохастического колебания — ПКСП.

1. Когда компоненты $\xi_k(t)$ в представлении (13) нецентрированные и некоррелированные, т.е.

$$\xi_k(t) = m_k + \overset{\circ}{\xi}_k(t),$$

где $m_k \neq 0$, а матрица $D(n)$ диагональная, $D_{kj}(u) = R_k(u)\,\delta_{kj}$, то

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathrm{Z}} m_k\, e^{ik\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k \in \mathrm{Z}} \overset{\circ}{\xi}(t)\, e^{ik\frac{2\pi}{T}t}.$$

Поскольку в этой формуле первая сумма детерминирована и дает обычную периодическую функцию периода T, а вторая — стационарный процесс с ковариацией $\sum_k R_k(u)\, e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$, то в данном случае получаем точно аддитивную модель ПКСП.

2. Когда стационарные компоненты центрированные, пропорциональные одному и тому же стационарному процессу (или, что то же самое, одному из его стационарных компонентов), например,

$$\xi_k(t) = c_k \xi_0(t),\ c_k = \mathrm{const},$$

то получим, что

$$\xi(t) = \xi_0(t) \sum_{k \in \mathrm{Z}} c_k\, e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \xi_0(t) f(t),\ f(t+T) = f(t),$$

т.е. имеем мультипликативную модель ПКСП.

3. Очевидно, что когда $\xi_k(t) = c_k \xi_0(t) + m_k$, то ПКСП будет аддитивно-мультипликативной моделью

$$\xi(t) = \xi_0(t) f(t) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} m_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}.$$

Если $f(t)$ — гармоника $f(t) = e^{i\Lambda t}$, то будем иметь модулированный стационарный процесс. Поэтому общая формула (13) может быть интерпретирована как сумма стационарных процессов, модулированных гармониками кратных частот $\Lambda_k = k\frac{2\pi}{T}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Если стационарные компоненты вырождаются в случайные величины, то тогда получим, что

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \xi_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$$

и корреляционные компоненты

$$B_k(u) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} r_{k,j} e^{ik\frac{2\pi}{T}t},$$

т.е. они периодические с периодом T. Если коррелированы лишь величины ξ_k и ξ_{2p+k}, то тогда корреляционные компоненты периодические с периодом $T_0 = pT$. Это значит, что для таких процессов ковариация $b(t, u)$ — периодическая с периодом T по t и с периодом T_0 по t_0. Это свойство является характеристическим для данного класса процессов.

Особенно следует подчеркнуть существенные отличия природы носителей ритмики в описанных частных моделях нестационарных случайных процессов. В то время, когда в общем ПКСП ритмика заключена в типе коррелированности гармоник, в частных случаях она воплощена в следующих свойствах их структурных элементов:

а) периодичности детерминированного матожидания для аддитивной модели;

б) периодичности детерминированной модулирующей функции для мультипликативной модели;

в) периодичности как матожидания, так и модулирующей функции для аддитивно-мультипликативной модели;

г) специальном законе коррелированности гармоник частот $k\frac{2\pi}{T}$ через $\frac{2\pi}{T_0}$, где $T_0 = pT$ для полигармонической модели.

Как обобщение ПКСП вводится понятие почти периодической коррелированности.

Определение 5. Почти периодически коррелированными называют процессы, когда вместо условия (1) для них справедлив тот факт, что $m_\xi(v)$ и $r_\xi(t + v, s + v)$ суть почти периодические функции.

Для них имеют место формулы, аналогичные формулам (11)–(15) с заменой арифметической прогрессии $k\frac{2\pi}{T}$, $k \in \mathbf{Z}$, общей последовательностью $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $k \in \mathbf{Z}$ показателей Фурье [6, 7, 11, 16].

Важным является случай бипериодически коррелированных случайных процессов (БПКСП), который описывает двойную ритмику.

Определение 6. БПКСП называют такой случайный процесс, который является почти периодически коррелированным с показателями Фурье вида

$$\lambda_{kj} = k\Lambda_0 + j\Lambda\ ,\ k, j \in \mathbf{Z},$$

где Λ и Λ_0 — несоизмеримые числа. Назовем их фундаментальными частотами.

Ковариация БПКСП имеет представление

$$b\,(t, u) = \sum_{k,j\,\in\,\mathbf{Z}} B_{kj}(u)\, e^{i\lambda_{kj} t},$$

а его двухчастотная спектральная плотность

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{k,j\,\in\,\mathbf{Z}} f_{kj}(\lambda)\, \delta(\lambda - [\mu + \lambda_{kj}\ ]),$$

т.е. спектр этого процесса сосредоточен на прямых

$$\mu = \lambda - \lambda_{kj} \equiv \lambda - k\Lambda_0 - j\Lambda,\ k, j \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 2. Случайный процесс будет бипериодически коррелированным тогда и только тогда, когда он обладает представлением

$$\xi(t) = \sum_{k,j\,\in\,\mathbf{Z}} \xi_{kj}(t)\, e^{i\lambda_{kj} t},$$

где $\left[\xi_{k,j}(t)\right]_{k,j\,\in\,\mathbf{Z}}$ — стационарный матричный процесс.

Корреляционные компоненты БПКСП допускают представления

$$B_{kj}(u) = \sum_{p,q\,\in\,\mathbf{Z}} D_{p,q,p-k,q-j}(u)\, e^{i\lambda_{kj} u},$$

при этом $D_{k\,j\,l\,n}(u) = \mathrm{E}\,\mathring{\xi}_{kj}(t + u)\,\overline{\mathring{\xi}_{ln}(t)}$.

Теорема 3. БПКСП обладает следующими представлениями через периодически коррелированные элементы:

$$\xi(t) = \sum_{k\,\in\,\mathbf{Z}} \xi^{\,T}_{k}(t)\, e^{ik\Lambda_0 t},$$

где $\left\{\xi^{\,T}_{k}(t),\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ — множество ПКС процессов с одним и тем же периодом коррелированности T, или соответственно представлением

$$\xi(t) = \sum_{j\,\in\,\mathbf{Z}} \xi^{\,T_0}_{j}(t)\, e^{ik\,\Lambda\, t}.$$

через ПКС компоненты $\xi^{\,T_0}_{j}(t), j \in \mathbf{Z}$, с общим периодом коррелированности $T_0 = \dfrac{2\pi}{\Lambda_0}$, а частоты модулирующих гармоник тогда кратные величине $\Lambda = \dfrac{2\pi}{T}$.

Информативность БПКСП задают его ПКС-компоненты. Аналогично определяют и полиПКС-процессы [11], когда показатели Фурье имеют больше двух фундаментальных частот $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{N-1}$ или соответствующих им периодов $T_j = \dfrac{2\pi}{\Lambda_j}$, $j = \overline{0, N-1}$. Они являются моделями ритмики кратности, большей чем 2. Кратность можно трактовать как количество модулирующих компоненты наборов гармоник с частотами, кратными фундаментальным. А эти частоты должны быть (для несводимости одной к другой) несоизмеримыми, т.е. составляют целый теоретико-числовой базис — базис Боля.

Аналогично описываются и классы случайных последовательностей — процессов с дискретным временем, которые возникают в результате дискретизации как необходимого шага при компьютерной реализации алгоритмов статистического определения характеристик случайных процессов, являющихся их информативными признаками [6, 15].

Итоговые замечания. Разработанные модели с учетом указанных информационных параметров в специфических частных случаях дают средства описания не учитываемых ранее свойств модуляций сигналов объектами, когда эти свойства (их временно-пространственное изменение) описываются периодически коррелированными и родственными случайными процессами. Частные модели стимулировали создание путем индукции общего подхода и общей модели, которая воплощала бы в сжатой, конструктивной и продуктивной форме общие для всех них свойства. Такие свойства в этих моделях не просматривались. Они были скрытыми до момента, когда был поставлен вопрос о создании общей теории колебаний с описанием их во временной и спектрально-корреляционной областях как существенное дополнение к колмогоровскому описанию распределения спектральной мощности. Такой подход был развит путем привлечения для описания колебательных сигналов ПКС процессов и всех фактов о них, имеющихся в литературе, систематизации этих фактов и вложения в разработанную для этого общую схему. Разработка базы для полного исследования модели, которая охватила бы известные частные случаи и установила взаимосвязи между ними, требовала создания адекватного математического аппарата. Он был создан после того, как было замечено [9, 10, 12], что проблема представлений ПКСП требует использования методов современного функционального анализа и введения B^2-пространства над колмогоровским гильбертовым пространством значений процесса, рассматриваемых как случайные величины конечной дисперсии, а также использования оснащенных гильбертовых пространств для изучения свойств базисов возможных представлений процессов. Это привело к формулированию энергетической концепции: энергетические характеристики — полная энергия или средняя мощность (их ограниченность) при надлежащей формализации полностью определяют аппарат анализа, и созданию энергетической теории стохастических сигналов (ЭТСС), которая обобщает, завершает и дополняет корреляционную [16].

ЭТСС дает возможность дедуктивным путем выводить нужные свойства моделей стохастических колебаний — периодически коррелированных и родственных им случайных процессов, обосновать методы статистической обработки сигналов, включая импульсные модели — последовательности эквидистантных импульсов, модулированных соответствующими случайными величинами. Систематизированные здесь результаты охватывают, существенно дополняют и обобщают достижения известных исследователей случайных процессов и стохастических колебаний как из бывшего Союза (А.А. Харкевич, Р.Л. Стратонович, С.М. Ритов, А.Я. Каяцкас, Л.И. Гудзенко), так и за границей (У. Гарднер, Г.Л. Гёрд, А. Папулис). Эти факты могут быть использованы для эффективного выбора признаков при создании методов и средств различения сигналов, а также на основании этого различения источников сигналов — объектов при диагностировании состояний сложных систем.

ISSN 0572-2691

Я.П. Драган, Л.С. Сікора, Б.І. Яворський

СПЕЦИФІКА ІНФОРМАТИВНОСТІ СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РИТМІКИ — ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ І СПОРІДНЕНИХ З НИМИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Дано стислий огляд здобутків енергетичної теорії класів випадкових процесів, які роз'яснюють їхню кореляційно-спектральну структуру засобами енергетичної теорії стохастичних сигналів і виявляють сенс інформативності ознак — імовірнісних характеристик таких процесів як моделей стохастичних коливань і ритміки природних явищ.

Ya.P. Dragan, L.S. Sikora, B.I. Yavorskiy

INFORMATIBILITY SPECIFICITY OF PERIODICALLY CORRELATED AND RELATED RANDOM PROCESSES AS RHYTMICS STOCHASTIC MODELS

Theory results of named classes of random processes, which explaned their correlation and spectral structure by the meanes of stochastical signals energetic theory and revealed sence of informatibility of attributes (that is probabilistic characteristics of models of oscillations and rhythmics of nature phenomena) are briefly presented.

1. *Бишоп Р.* Колебания. — М.: Наука, 1979. — 160 с.
2. *Слуцкий Е.Е.* Сложение циклических причин как источник случайных процессов // Вопр. конъюнктуры. — 1927. — 3, вып. 1. — С. 34–64.
3. *Слуцкий Е.Е.* О случайных почтипериодических функциях и разложении стационарных случайных функций на составляющие // Избр. тр. (Теория вероятностей. Математическая статистика). — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — С. 252–268.
4. *Колмогоров А.Н.* Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром // Юбил. сб. АН СССР. — М.: Изд-во АН СССР, 1947. — Ч. I. — С. 242–249.
5. *Информационные* связи биогелиогеофизических явлений и элементы их прогноза /К.С. Войчишин, Я.П. Драган, В.И. Куксенко и др. — Киев: Наук. думка, 1974. — 207 с.
6. *Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.И.* Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1987. — 319 с.
7. *Драган Я.П.* Структура и представления моделей стохастических сигналов. — Киев: Наук. думка, 1980. — 384 с.
8. *Драган Я.П.* О гармонизуемости случайных процессов с конечной энергией // Отбор и передача информации. — 1984. — Вып. 69. — С. 19–27.
9. *Драган Я.П.* Случайные процессы с конечной средней мощностью, их спектры и гармонизуемость // 2-я Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статист. Тез. докл. — Вильнюс: Изд-во Ин-та мат. и киб. АН Лит ССР, 1977. — Т. I. — С. 133–134.
10. *Драган Я.П.* Гармонізованість і спектральний розклад випадкових процесів зі скінченною середньою потужністю // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1988. — № 6. — С. 679–687.
11. *Драган Я.П.* Періодично корельовані та споріднені з ними випадкові процеси — моделі сигналів у коливних системах / Під ред. В.О. Омельченка // Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів: збірка наук. праць. — Харків, 1992. — Ч. I. — С. 26–41.
12. *Драган Я.П.* О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты // Отбор и передача информации. — 1975. — Вып. 45. — С. 7–20.
13. *Лившиц Н.А., Виноградов В.Н., Голубев Г.А.* Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. — М.: Сов. радио, 1974. — 328 с.
14. *Драган Я.П.* О периодически коррелированных случайных процессах и системах с периодически изменяющимися параметрами // Отбор и передача информации. — 1969. — Вып. 22. — С. 27–33.
15. *Драган Я.П., Сикора Л.С.* Энергетическая теория стохастических сигналов и обработка колебаний в системах диагностики и управления // Современные методы обработки сигналов в системах измерения контроля, диагностики и управления: материалы науч.-техн. конф. — Минск: Изд-во Белгосун-та, 1995. — Ч. 1. — С. 128–132.
16. *Драган Я.П., К.К. Васильєв, В.О. Казаков* та ін. Прикладна теорія випадкових процесів та полів / Колективна монографія під ред. Я.П. Драгана, В.О. Омельченка. — Харків-Львів-Тернопіль: Вид-во Терноп. приладобуд. ін-ту, 1993. — 248 с.

Получено 23.12.96