М.Михайлишин. Теплопровідність двоступінчастої круглої пластинки з постійними коефіцієнтами тепловіддачі з лицьових поверхонь / М.Михайлишин, Г.Семенишин // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 70. — № 2. — С.209-219. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 539.377

М. Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук; Г. Семенишин

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ДВОСТУПІНЧАСТОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ З ЛИЦЬОВИХ ПОВЕРХОНЬ

Резюме. *Розглянуто задачу нестаціонарної теплопровідності двоступінчастої круглої пластини, яка нагрівається зовнішнім середовищем. Вважається, що на зовнішній поверхні пластини має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Коефіцієнти тепловіддачі з лицьових поверхонь пластинки різні для різних ступенів пластинки, але однакові на нижній і верхній поверхнях пластинки. Умови нагріву такі, що має місце симетрія задачі відносно серединної поверхні пластинки. Коефіцієнти тепловіддачі на внутрішньому і зовнішньому контурах різні й відрізняються від коефіцієнтів тепловіддачі з лицьових поверхонь пластинки. Диференціальне рівняння теплопровідності для даного випадку отримано в роботі [1] із використанням методики, заснованої на використанні узагальнених функцій. Воно містить коефіцієнти типу імпульсних функцій (асиметричні одиничні функції, дельта функцію Дірака). Розв'язок задачі будується з використанням інтегрального перетворення Лапласа і використанням методики Образцова-Онанова [2] розв'язування задач з коефіцієнтами типу імпульсних функцій.*

Ключові слова: *теплопровідність, пластинка, функції ступінчасті, узагальнені функції, конвективний теплообмін, частково вироджені рівняння.*

M. Mykhaylyshyn, H. Semenyshyn

THERMAL CONDUCTIVITY OF THE DOUBLE-STAGED ROUND ANNULAR PLATE WITH CONSTANT COEFFICIENTS OF THERMAL TRANSFER FROM THE FRONT SURFACES

Summary*. Non-stationary thermal conductivity task of the double-stage round annular plate, which is heated by the external environment, is analyzed. Convective heat exchange with the external environment is considered to take place on the external surface of the plate. Heat transfer coefficients from the front surfaces of the plate are different for different plate stages, but are similar on the upper and lower surfaces of the plate. According to heat conditions, symmetry of the task relatively middle surface takes place. Heat transfer coefficients on the external and internal contour of the plate are different and differ from the heat transfer coefficients on the external surface of the plate. Differential equation of thermal conductivity for this case in the article [1] has been received taking advantage of the approach, based on the generalized functions using. It contains coefficients such as impulse functions type coefficient (asymmetric unitary function, Dirac delta function). Task solution is based on the Laplas integral transformation using the Obraztsov-Onanov [2] method for solving tasks with coefficients of impulse function determination type. According to this method to find general solution of homogeneous equation with coefficients, which contain stage functions, the equation is reduced to partially degenerated equation at first. To find partially solutions of heterogeneous equations the variation of constants method is used. General solution for the appearance contains relation of two transcendental functions with the generalized polynomial in the denominator, with does not have zero root and all roots of which are simple. Determination of the original according to the found appearance is carried out taking advantage of the Vaschenko-Zakharchenko expension theorem in the case of the image roots of the generalized polynomial, which is included into the transcended functions relation. The single closed solution for non-stationary equation of double-stage plate thermal conductivity for the whole field of determination has been found.*

Key words: *heat conductivity, plate, staged functions, generalized functions, convection heat exchange, partially degenerated equations.*

Постановка проблеми. При розв'язуванні багатьох технічних проблем виникає потреба у вивченні температурних полів у багатоступінчастих елементах конструкцій. Наприклад, при відновлюванні експлуатаційних властивостей коліс залізничних вагонів шляхом бандажування чи наплавлення потрібно визначати температурне поле в конструкції, яку можна моделювати двоступінчастою кільцевою пластиною. Виходячи з особливостей технологічного процесу, коефіцієнт тепловіддачі з бокових поверхонь може бути різний у різних областях конструкції. Такі задачі вигідно розв'язувати з використанням теорії узагальнених функцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методи розв'язування задач теплопровідності й термопружності тіл неоднорідної структури розглянуто в роботі [1]. Більшість задач теплопровідності присвячені знаходженню стаціонарного або квазістаціонарного температурного поля і в більшості випадків для тонких безмежних або напівбезмежних тонкостінних елементів конструкцій.

В роботі [3] розв'язано квазістатичну задачу термопружності для двоступінчастої нескінченної пластини з круговим отвором. Бокові поверхні пластинки запропоновано ізолювати.

В роботі [4] розв'язано статичну задачу термопружності багатоступінчастої круглої пластинки змінної товщини, теплоізольованої по бокових поверхнях, яка нагрівається рівномірно розподіленим по циліндричній поверхні джерелом тепла.

У задачі термопружності для двоступінчастої круглої пластинки з тепловіддачею, яка розв'язана в роботі [5], розглядається двоступінчаста кругла пластина, яка нагрівається зовнішнім середовищем по торцевій поверхні, а через бокові поверхні пластинки відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем.

Метою роботи є розв'язання задачі нестаціонарної теплопровідності двоступінчастої кільцевої пластинки з кусково-постійним коефіцієнтом тепловіддачі з лицьових поверхонь пластини. Вважається, що на зовнішній поверхні пластини має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Коефіцієнти тепловіддачі з лицьових поверхонь пластинки різні для різних ступенів пластинки, але однакові на нижній і верхній поверхнях пластинки, так що має місце симетрія задачі відносно серединної поверхні. Коефіцієнти тепловіддачі на внутрішньому і зовнішньому контурах пластинки різні й відрізняються від коефіцієнтів тепловіддачі з лицьових поверхонь пластинки.

Постановка задачі. Розглянемо задачу нестаціонарної теплопровідності кільцевої двоступінчастої пластинки

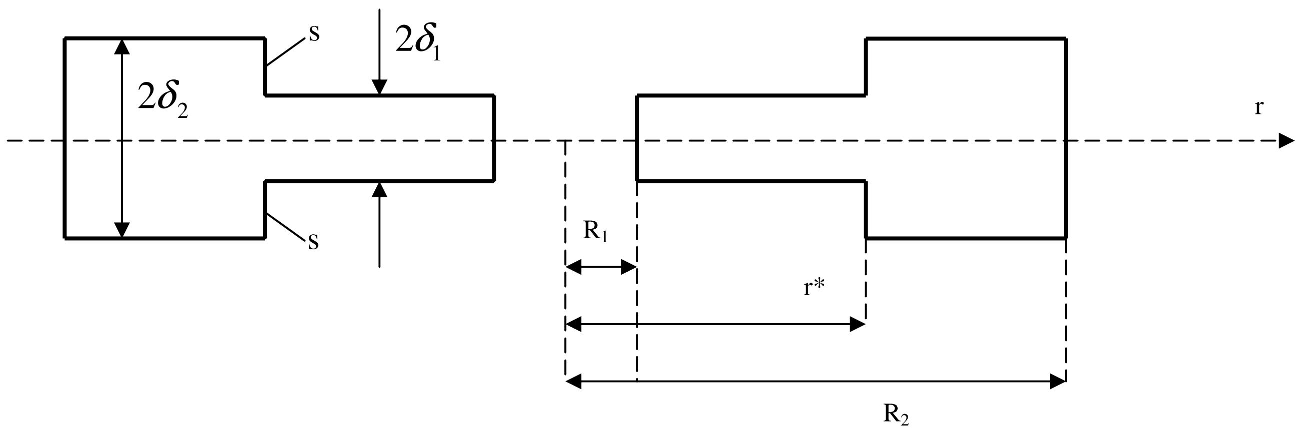

Рисунок 1. Схематичне зображення кільцевої двоступінчастої пластинки

Figure 1. Scheme appearance of the annular double-staged plate

Півтовщину такої пластинки представимо у вигляді

$$\delta(r) = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)S_+(r - r*), \tag{1}$$

де δ_1 і δ_2 – півтовщини пластинок при $r \le r^*$ і $r^* < r \le R_2$ відповідно. Відносні коефіцієнти тепловіддачі з паралельних до серединної площини пластини ділянок δ_i бокових поверхонь представимо аналогічно (1)

$$h(r) = h_1 + (h_2 - h_1)S_+(r - r^*), \tag{2}$$

де $h_i = \dfrac{\alpha_i}{\lambda_t}$, $S_+(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ – асиметрична одинична функція.

Вважаємо, що задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини пластинки і бокові поверхні пластинки S тепло-ізольовані. Тоді рівняння теплопровідності такої пластинки зводиться до одного диференціального рівняння відносно інтегральної характеристики температури [1] (за відсутності внутрішніх джерел тепла).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r*}\delta_+(r - r_*) - \left[\frac{h_1}{\delta_1} + \left(\frac{h_2}{\delta_2} - \frac{h_1}{\delta_1}\right)S_+(r - r_*)\right](T - t_c) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{3}$$

На поверхнях $r = R_1$ і $r = R_2$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем

$$\frac{\partial T}{\partial r} = h_0\left(T - t_c^{(0)}\right) \text{ при } r = R_1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -h_3\left(T - t_c^{(3)}\right) \text{ при } r = R_2, \tag{5}$$

де позначено $h_0 = \dfrac{\alpha_0}{\lambda_t}$, $h_3 = \dfrac{\alpha_3}{\lambda_t}$.

У початковий момент часу задається початковий розподіл температури

$$T(r,0) = f(r) \tag{6}$$

Розв'язок задачі. Застосуємо до рівняння (3) перетворення Лапласа по змінній τ. У результаті для зображення $\tilde{T}(r,s)$ отримаємо рівняння

$$\frac{d^2\tilde{T}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{T}}{dr}-\frac{s}{a}\tilde{T}-\left[\frac{h_1}{\delta_1}+\left(\frac{h_2}{\delta_2}-\frac{h_1}{\delta_1}\right)S_+\left(r-r_*\right)\right]\tilde{T}=$$

$$=-\frac{t_c}{s}\left[\frac{h_1}{\delta_1}+\left(\frac{h_2}{\delta_2}-\frac{h_1}{\delta_1}\right)S_+\left(r-r_*\right)\right]-\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\frac{d\tilde{T}}{dr}\bigg|_{r=r*}\delta_+\left(r-r_*\right)-f\left(r\right).$$

$$T(r,\tau)=\left(aT_0-t_c\right)\left\{\left[1-S_+(r-r_*)\right]e^{-a\chi_1^2\tau}+S_+(r-r_*)e^{-a\chi_2^2\tau}\right\}-t_c^{(0)}+$$

$$+\sum\frac{1}{A_n}\left\{\Phi_1(\mu_{2n})\left[1-S_+(r-r_*)\right]+\Phi_2(\mu_{2n})S_+(r-r_*)\right\}e^{-a\tau\left[\chi_2^2+\left(\frac{\mu_{2n}}{R_2}\right)^2\right]} \qquad (7)$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до граничних умов (4), отримаємо відповідні граничні умови для зображення

$$\tilde{T}'\left(R_1,s\right)-h_0\left(\tilde{T}\left(R_1,s\right)-\frac{t_c^{(0)}}{s}\right)=0\ , \qquad (8)$$

$$\tilde{T}'\left(R_2,s\right)+h_3\left(\tilde{T}\left(R_2,s\right)-\frac{t_c^{(3)}}{s}\right)=0\ . \qquad (9)$$

Знайдемо розв’язок диференціального рівняння (7) при граничних умовах (8), (9).

Рівняння (7) у лівій частині містить коефіцієнт типу ступінчастої функції, а права частина, крім регулярної функції, містить функцію розриву і особливість типу дельта-функції. Загальний розв’язок задачі дорівнює сумі загального розв’язку однорідного рівняння (7) і часткового розв’язку неоднорідного рівняння.

Побудуємо спочатку загальний розв’язок однорідного рівняння

$$\frac{d^2\tilde{T}_*}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{T}_*}{dr}-\frac{s}{a}\tilde{T}_*-\left[\chi_1^2+\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)S_+(r-r_*)\right]\tilde{T}_*=0. \qquad (10)$$

Тут введено позначення

$$\chi_i^2=\frac{h_i}{\delta_i},\ i=1,2. \qquad (11)$$

Для знаходження розв’язків рівняння з коефіцієнтами, що містять ступінчасті функції й особливості імпульсного типу, використовуємо методику, наведену в монографії [2].

Приведемо рівняння (10) до частково виродженого рівняння.

Для цього помножимо рівняння на функцію $S_+\left(r-r_*\right)$. Враховуючи, що $S_+\left(r-r_*\right)\cdot S_+\left(r-r_*\right)=S_+\left(r-r_*\right)$, знайдемо

$$S_+\left(r-r_*\right)\cdot\left(\frac{d^2\tilde{T}_*}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{T}_*}{dr}\right)-\left(\frac{s}{a}+\chi_2^2\right)\tilde{T}_*S_+\left(r-r_*\right)=0. \qquad (12)$$

Введемо нову функцію за формулою

$$Z = \left(\chi_2^2 - \chi_1^2\right) S_+ \left(r - r_*\right) \tilde{T}_* \tag{13}$$

Тоді рівняння (12) можна привести до вигляду

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dZ}{dr} - \overline{\chi}_2^2 Z = V(r), \tag{14}$$

де позначено

$$V(r) = \left(\chi_2^2 - \chi_1^2\right)\left[\left(\frac{d\tilde{T}_*}{dr} + \frac{\tilde{T}_*}{r}\right)_{r=r*} \delta_+\left(r - r_*\right) + \tilde{T}_*(r_*)\delta'_+\left(r - r_*\right)\right],\ \overline{\chi}_2^2 = \frac{s}{a} + \chi_2^2 \ . \tag{15}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (14) такий:

$$\overline{Z}(r) = C_1 I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) + C_2 K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right), \tag{16}$$

в якому $I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right),\ K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right)$ – модифіковані функції Бесселя.

Частковий розв'язок рівняння (14) шукаємо за методом варіації постійних

$$\tilde{Z}(r) = C_1(r) I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) + C_2(r) K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right). \tag{17}$$

Для знаходження C_1' і C_2' отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1' I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) + C_2' K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) = 0 \\ C_1' \overline{\chi}_2 I_1\left(\overline{\chi}_2 r\right) - C_2' \overline{\chi}_2 K_1\left(\overline{\chi}_2 r\right) = V)r). \end{cases} \tag{18}$$

Використовуючи відому формулу $I_n\left(r\right) K_{n+1}\left(r\right) + I_{n+1}\left(r\right) K_n\left(r\right) = \frac{1}{r}$, отримаємо розв'язки системи (16)

$C_1' = r \cdot K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) \cdot V\left(r\right)$; $C_2' = -r \cdot I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) \cdot V\left(r\right)$.

Частковий розв'язок рівняння (14) після визначення $C_1(r)$ і $C_2(r)$ набуде вигляду [2]

$$\begin{aligned} \tilde{Z}\left(r\right) = r_* \cdot S_+\left(r - r_*\right) \cdot \left(\chi_2^2 - \chi_1^2\right) \cdot \Bigg\{ & \left[\left.\frac{d\tilde{T}_*}{dr}\right|_{r=r*} K_0\left(\overline{\chi}_2 r_*\right) + \overline{\chi}_2 \tilde{T}_*(r_*) K_1\left(\overline{\chi}_2 r_*\right)\right] I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) - \\ & - \left[\left.\frac{d\tilde{T}_*}{dr}\right|_{r=r*} I_0\left(\overline{\chi}_2 r_*\right) - \overline{\chi}_2 \tilde{T}_*(r_*) I_1\left(\overline{\chi}_2 r_*\right)\right] K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (14)

$Z(r) = C_1 I_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) + C_2 K_0\left(\overline{\chi}_2 r\right) + \tilde{Z}(r)$.

Так як функція $Z(r)$ згідно з (13) повинна дорівнювати нулю при $r \le r_*$, то постійні інтегрування C_1 і C_2 дорівнюють нулю і $Z(r) = \tilde{Z}(r)$. Вносимо отриманий розв'язок в рівняння (10) і отримаємо частково вироджене рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^2\tilde{T}_*}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{T}_*}{dr}-\bar{\chi}_1^2\tilde{T}_*=\tilde{Z}(r),\ \left(\bar{\chi}_1^2=\frac{s}{a}+\chi_1^2\right) \tag{20}$$

Загальний розв’язок цього рівняння знаходимо аналогічним шляхом. У результаті знайдемо

$$\begin{gathered}\tilde{T}_*(r)=\left\{D_1-S_+(r-r_*)\left[D_{00}\Phi_{21}(r)+D_{01}\Phi_{22}(r)\right]\right\}I_0(\bar{\chi}_1 r)+\\+\left\{D_2-S_+(r-r_*)\left[D_{00}\Phi_{11}(r)+D_{01}\Phi_{12}(r)\right]\right\}K_0(\bar{\chi}_1 r),\end{gathered} \tag{21}$$

де введено позначення

$$D_{00}=r_*\cdot\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\cdot\left[\left.\frac{d\tilde{T}_*}{dr}\right|_{r=r*}K_0(\bar{\chi}_2 r_*)+\bar{\chi}_2\tilde{T}_*(r_*)K_1(\bar{\chi}_2 r_*)\right]. \tag{22}$$

$$D_{01}=-r_*\cdot\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\cdot\left[\left.\frac{d\tilde{T}_*}{dr}\right|_{r=r*}I_0(\bar{\chi}_2 r_*)-\bar{\chi}_2\tilde{T}_*(r_*)I_1(\bar{\chi}_2 r_*)\right]. \tag{23}$$

$$\Phi_{11}(r)=-\int_{r_*}^{r}\rho I_0(\bar{\chi}_1\rho)I_0(\bar{\chi}_2\rho)d\rho,\ \Phi_{12}(r)=-\int_{r_*}^{r}\rho I_0(\bar{\chi}_1\rho)K_0(\bar{\chi}_2\rho)d\rho. \tag{24}$$

$$\Phi_{21}(r)=-\int_{r_*}^{r}\rho K_0(\bar{\chi}_1\rho)I_0(\bar{\chi}_2\rho)d\rho,\ \Phi_{22}(r)=-\int_{r_*}^{r}\rho K_0(\bar{\chi}_1\rho)K_0(\bar{\chi}_2\rho)d\rho. \tag{25}$$

З формули (21) знайдемо

$$\tilde{T}_*(r_*)=D_1 I_0(\bar{\chi}_1 r_*)+D_2 K_0(\bar{\chi}_1 r_*). \tag{26}$$

$$\frac{d\tilde{T}_*}{dr}(r=r_*)=\bar{\chi}_1\left[D_1 I_1(\bar{\chi}_1 r_*)-D_2 K_1(\bar{\chi}_1 r_*)\right]. \tag{27}$$

Підставляючи (26) і (27) у формули (22) і (23), отримаємо

$$D_{00}=r_*\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\left(D_1 q_{IK}^+ + D_2 q_{KK}^-\right),\ D_{01}=r_*\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\left(D_1 q_{II}^- + D_2 q_{kI}^+\right),$$

де позначено

$$q_{RS}^{\pm}(r_*)=\bar{\chi}_2 R_0(\bar{\chi}_1 r_*)S_1(\bar{\chi}_2 r_*)\pm\bar{\chi}_1 R_1(\bar{\chi}_1 r_*)S_0(\bar{\chi}_2 r_*)\quad q_{RS}^{\pm}=q_{RS}^{\pm}(r_*). \tag{28}$$

Інтегруючи двічі за частинами, отримаємо

$$\begin{gathered}\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\int rI_0(\bar{\chi}_1 r)I_0(\bar{\chi}_2 r)dr=r\cdot q_{II}^-(r),\\ \left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\int rK_0(\bar{\chi}_1 r)K_0(\bar{\chi}_2 r)dr=-r\cdot q_{KK}^-(r),\\ \left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\int rI_0(\bar{\chi}_1 r)K_0(\bar{\chi}_2 r)dr=-r\cdot q_{IK}^+(r),\\ \left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\int rK_0(\bar{\chi}_1 r)I_0(\bar{\chi}_2 r)dr=r\cdot q_{KI}^+(r).\end{gathered} \tag{29}$$

Отже, загальний розв’язок рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$\tilde{T}_*(r) = D_1 y_1(r) + D_2 y_2(r), \tag{30}$$

де

$$y_1(r) = I_0(\bar{\chi}_1 r)\left[1 - S_+(r - r_*)\right] + r_* S_+(r - r_*)\left[q_{IK}^+(r_1) I_0(\bar{\chi}_2 r) + q_{II}^-(r_1) K_0(\bar{\chi}_2 r)\right],$$

$$y_2(r) = K_0(\bar{\chi}_1 r)\left[1 - S_+(r - r_*)\right] + r_* S_+(r - r_*)\left[I_0(\bar{\chi}_2 r) q_{KK}^-(r_*) + K_0(\bar{\chi}_2 r) q_{KI}^+(r_*)\right] - \tag{31}$$

фундаментальні розв'язки однорідного рівняння (10).

Частковий розв'язок рівняння (7) знову шукаємо за методом варіації постійних

$$\tilde{T}_{**} = E_1(r)\, y_1(r) + E_2(r)\, y_2(r). \tag{32}$$

Тоді для знаходження E_1' і E_2' отримаємо рівняння

$$\begin{cases} E_1' y_1 + E_2' y_2 = 0 \\ E_1' y_1' + E_2' y_2' = H_1 - f(r) + (H_2 - H_1) S_+(r - r_*) - (1-\varepsilon)\dfrac{d\tilde{T}}{dr}\Big|_{r=r_*} \delta_+(r - r_*), \end{cases} \tag{33}$$

де $H_1 = -\dfrac{t_c}{s}\chi_1^2$, $H_2 = -\dfrac{t_c}{s}\chi_2^2$.

Можна показати, що визначник системи (33) $W_2(r) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -\dfrac{1}{r}$. Розв'язавши систему (33), після інтегрування знаходимо частковий розв'язок (32). Загальний розв'язок рівняння (7) $\tilde{T} = E_1 y_1(r) + E_2 y_2(r) + \tilde{T}_{**}$ після ряду перетворень набуде вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{T}(r,s) = &\left[\bar{E}_1 - \frac{rH_1}{\bar{\chi}_1} K_1(\bar{\chi}_1 r) + F_{12}^0(r)\right] y_1(r) - S_+(r - r_*)\left\{\frac{H_1}{\bar{\chi}_1}\left[-rK_1(\bar{\chi}_1 r) + r_* K_1(\bar{\chi}_1 r_*)\right] + \right. \\ &+ F_{12}(r) - r_* q_{KK}^- \frac{H_2}{\bar{\chi}_2}\left[rI_1(\bar{\chi}_2 r) - r_* I_1(\bar{\chi}_2 r_*)\right] - r_*\left[q_{KK}^- F_{21}(r) + q_{KI}^+ F_{22}(r)\right] + \\ &\left. + r_* q_{KI}^+ \frac{H_2}{\bar{\chi}_2}\left[rK_1(\bar{\chi}_2 r) - r_* K_1(\bar{\chi}_2 r_*)\right] + r_*(1-\varepsilon)\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_*} \cdot \frac{K_0(\bar{\chi}_1 r_*)}{W_1(r_*)}\right\} y_1(r) + \\ &+ \left[\bar{E}_2 - r\frac{H_1}{\bar{\chi}_1} I_1(\bar{\chi}_1 r) - F_{11}^0(r)\right] y_2(r) - S_+(r - r_*)\left\{\frac{H_1}{\bar{\chi}_1}\left[-rI_1(\bar{\chi}_1 r) + r_* I_1(\bar{\chi}_1 r_*)\right] - \right. \\ &- F_{11}(r) - r_* q_{IK}^+ \frac{H_2}{\bar{\chi}_2}\left[rI_1(\bar{\chi}_2 r) - r_* I_1(\bar{\chi}_2 r_*)\right] + r_*\left[q_{IK}^+ F_{21}(r) + q_{II}^- F_{22}(r)\right] - \\ &\left. - r_* q_{II}^- \frac{H_2}{\bar{\chi}_2}\left[rK_1(\bar{\chi}_2 r) - r_* K_1(\bar{\chi}_2 r_*)\right] - r_*(1-\varepsilon)\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_*} \cdot I_0(\bar{\chi}_1 r_*)\right\} y_2(r) \end{aligned} \tag{34}$$

Тут $\bar{E}_1$ і $\bar{E}_2$ – постійні інтегрування і введені позначення

$$\int -r \cdot f(r) I_0(\bar{\chi}_1 r) dr = \bar{F}_{11}^{(0)}(r), \quad \int -r \cdot f(r) K_0(\bar{\chi}_1 r) dr = \bar{F}_{12}^{(0)}(r), \tag{35}$$

$$F_{11}^{(0)}(r) = \bar{F}_{11}^{(0)}(r) - \bar{F}_{11}^{(0)}(R_1), \quad F_{12}^{(0)}(r) = \bar{F}_{12}^{(0)}(r) - \bar{F}_{12}^{(0)}(R_1),$$

$$F_{11}(r) = \bar{F}_{11}^{(0)}(r) - \bar{F}_{11}^{(0)}(r_*), \quad F_{12}(r) = \bar{F}_{12}^{(0)}(r) - \bar{F}_{12}^{(0)}(r_*), \tag{36}$$

$$\int_{r_*}^{r} -\rho f(\rho) I_0(\bar{\chi}_2 r) d\rho = F_{21}(r)\,;\ \int_{r_*}^{r} -\rho f(\rho) K_0(\bar{\chi}_2 r) d\rho = F_{22}(r)\,. \tag{37}$$

Знайдемо $\frac{d\tilde{T}}{dr}(r=r_*)=\bar{\chi}_1\left\{\left[\bar{E}_1+F_{12}^{(0)}(r_*)\right]I_1(\bar{\chi}_1 r_*)-\left[\bar{E}_2-F_{11}^{(0)}(r_*)\right]K_1(\bar{\chi}_1 r_*)\right\}$ і виключимо величину $(1-\varepsilon)\left.\frac{d\tilde{T}}{dr}\right|_{r=r_*}$ з рівняння (34). У результаті отримаємо

$$\tilde{T}(r,s)=\left\{\left[\tilde{E}_1+\bar{F}_{12}^{(0)}(r)\right]I_0(\bar{\chi}_1 r)+\left[\tilde{E}_2-\bar{F}_{11}^{(0)}(r)\right]K_0(\bar{\chi}_1 r)-\frac{H_1}{\bar{\chi}_1^2}\right\}\left[1-S_+(r-r_*)\right]+$$
$$+S_+(r-r_*)\Big\{-\bar{\chi}_1 r_*(1-\varepsilon)\Big[\Big(\tilde{E}_1+\bar{F}_{12}^{(0)}(r_*)\Big)I_1(\bar{\chi}_1 r_*)-\Big(\tilde{E}_2-\bar{F}_{11}^{(0)}(r_*)\Big)K_1(\bar{\chi}_1 r_*)\Big]X_0(\bar{\chi}_2 r)-$$
$$-\frac{H_2}{\bar{\chi}_2^2}-\bar{\chi}_2 r_*\left(\frac{H_1}{\bar{\chi}_1^2}-\frac{H_2}{\bar{\chi}_2^2}\right)Z_0(\bar{\chi}_2 r)+I_0(\bar{\chi}_2 r)F_{22}(r)-K_0(\bar{\chi}_2 r)F_{21}(r)-$$
$$-\left[\tilde{E}_1+\bar{F}_{12}^{(0)}(r_*)\right]\psi_{10}(r)-\left[\tilde{E}_2-\bar{F}_{11}^{(0)}(r_*)\right]\psi_{20}(r)\ \Big\}\,, \tag{38}$$

де $\tilde{E}_1$ і $\tilde{E}_2$ – деякі нові постійні інтегрування, їх позначено

$$X_0(\bar{\chi}_i r)=I_0(\bar{\chi}_i r)K_0(\bar{\chi}_i r_*)-K_0(\bar{\chi}_i r)I_0(\bar{\chi}_i r_*)\,,$$
$$Z_0(\bar{\chi}_i r)=I_0(\bar{\chi}_i r)K_1(\bar{\chi}_i r_*)+K_0(\bar{\chi}_i r)I_1(\bar{\chi}_i r_*)\,, \tag{39}$$

$$\psi_{10}(r)=-r_*\left[q_{IK}^{+}I_0(\bar{\chi}_2 r)+q_{II}^{-}K_0(\bar{\chi}_2 r)\right],\ \psi_{20}(r)=-r_*\left[q_{KK}^{-}I_0(\bar{\chi}_2 r)+q_{KI}^{+}K_0(\bar{\chi}_2 r)\right]. \tag{40}$$

Надалі для простоти розглянемо випадок, коли початкова температура постійна по всьому диску і дорівнює T_0. Тоді формула (38) набуде вигляду

$$\tilde{T}(r,s)=\frac{T_0-H_1}{\bar{\chi}_1^2}+\left[\frac{T_0-H_2}{\bar{\chi}_2^2}-\frac{T_0-H_1}{\bar{\chi}_1^2}\right]\cdot[1-\bar{\chi}_2 r_* Z_0(\bar{\chi}_2 r)]S_+(r-r_*)+$$
$$+\tilde{E}_1\left\{I_0(\bar{\chi}_1 r)+S_+(r-r_*)r_*\left[\bar{\chi}_2 I_0(\bar{\chi}_1 r_*)Z_0(\bar{\chi}_2 r)+\bar{\chi}_1\varepsilon I_1(\bar{\chi}_1 r_*)X_0(\bar{\chi}_2 r)-\frac{1}{r_*}I_0(\bar{\chi}_1 r)\right]\right\}+ \tag{41}$$
$$+\tilde{E}_2\left\{K_0(\bar{\chi}_1 r)+S_+(r-r_*)r_*\left[\bar{\chi}_2 K_0(\bar{\chi}_1 r_*)Z_0(\bar{\chi}_2 r)-\bar{\chi}_1\varepsilon K_1(\bar{\chi}_1 r_*)X_0(\bar{\chi}_2 r)-\frac{1}{r_*}K_0(\bar{\chi}_1 r)\right]\right\}.$$

Задовольнивши граничні умови (8) і (9), знайдемо

$$\tilde{T}(r,s)=\bar{T}_1-\frac{t_c^{(0)}}{s}+\bar{T}_0\cdot S_+(r-r_*)+\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_1 I_0(\bar{\chi}_1 r)+\Delta_2 K_0(\bar{\chi}_1 r)\right]\left[1-S_+(r-r_*)\right]+$$
$$+\frac{r_*}{\Delta}S_+(r-r_*)\left\{\tilde{\Delta}_1\left[\bar{\chi}_2 I_0(\bar{\chi}_1 r_*)Z_0(\bar{\chi}_2 r)+\bar{\chi}_1\varepsilon I_1(\bar{\chi}_1 r_*)X_0(\bar{\chi}_2 r)\right]-\right.$$
$$-\tilde{\Delta}_2\left[\bar{\chi}_2 K_0(\bar{\chi}_1 r_*)Z_0(\bar{\chi}_2 r)-\bar{\chi}_1\varepsilon K_1(\bar{\chi}_1 r_*)X_0(\bar{\chi}_2 r)\right]- \tag{42}$$
$$\left.-\varepsilon\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2\bar{T}_0[\bar{\chi}_1 X_1(\bar{\chi}_1 R_1)-h_0 Z_0(\bar{\chi}_1 R_1)][\nu_{21}X_0(\bar{\chi}_2 r)-\nu_{22}Z_0(\bar{\chi}_2 r)]\right\},$$

де позначено

$$\overline{T}_0=\left(T_0-{t_c}/{a}\right)\left(\frac{1}{\overline{\chi}_2^2}-\frac{1}{\overline{\chi}_1^2}\right),\ \overline{T}_1=\frac{T_0-{t_c}/{a}}{\overline{\chi}_1^2}+\frac{t_c-t_c^{(0)}}{s},\ \overline{T}_2=\frac{T_0-{t_c}/{a}}{\overline{\chi}_2^2}+\frac{t_c-t_c^{(3)}}{s},$$

$$X_1(\overline{\chi}_i r)=I_1\left(\overline{\chi}_i r\right)K_1\left(\overline{\chi}_i r_*\right)-K_1\left(\overline{\chi}_i r\right)I_1\left(\overline{\chi}_i r_*\right),$$

$$Z_1(\overline{\chi}_i r)=I_1\left(\overline{\chi}_i r\right)K_0\left(\overline{\chi}_i r_*\right)+K_1\left(\overline{\chi}_i r\right)I_0\left(\overline{\chi}_i r_*\right),$$

$$\nu_{11}=\overline{\chi}_1 X_1(\overline{\chi}_1 R_1)-h_0 Z_0(\overline{\chi}_1 R_1),\ \nu_{12}=\overline{\chi}_1 Z_1(\overline{\chi}_1 R_1)-h_0 X_0(\overline{\chi}_1 R_1),$$

$$\nu_{21}=\overline{\chi}_2 X_1(\overline{\chi}_2 R_2)+h_3 Z_0(\overline{\chi}_2 R_2),\ \nu_{22}=\overline{\chi}_2 Z_1(\overline{\chi}_2 R_2)+h_3 X_0(\overline{\chi}_2 R_2),$$

$$b_1=\overline{\chi}_2\nu_{21}K_0(\overline{\chi}_1 r_*)-\overline{\chi}_1\varepsilon\nu_{22}K_1(\overline{\chi}_1 r_*),\ c_1=\overline{\chi}_1 K_1(\overline{\chi}_1 R_1)+h_0 K_0(\overline{\chi}_1 R_1), \tag{43}$$

$$b_2=\overline{\chi}_2\nu_{21}I_0(\overline{\chi}_1 r_*)+\overline{\chi}_1\varepsilon\nu_{22}I_1(\overline{\chi}_1 r_*),\ c_2=\overline{\chi}_1 I_1(\overline{\chi}_1 R_1)-h_0 I_0(\overline{\chi}_1 R_1),$$

$$\Delta=\overline{\chi}_2\nu_{12}\nu_{21}-\overline{\chi}_1\varepsilon\nu_{11}\nu_{22},\quad \tilde{\Delta}_1=h_0\overline{T}_1 b_1-\frac{h_3}{r_*}\overline{T}_2 c_1,\ \tilde{\Delta}_2=h_0\overline{T}_1 b_2+\frac{h_3}{r_*}\overline{T}_2 c_2,$$

$$\Delta_1=\tilde{\Delta}_1+\overline{\chi}_2\nu_{21}\overline{T}_0 c_1,\ \Delta_2=-\tilde{\Delta}_2+\overline{\chi}_2\nu_{21}\overline{T}_0 c_2.$$

Для знаходження оригіналу зображення (42) представимо цю формулу у вигляді

$$\tilde{T}\left(r,s\right)=\overline{T}_1-\frac{t_c^{(0)}}{s}+\overline{T}_0\cdot S_+\left(r-r_*\right)+\frac{\Phi_1(s)}{\Delta(s)}\left[1-S_+\left(r-r_*\right)\right]+\frac{\Phi_2(s)}{\Delta(s)}S_+\left(r-r_*\right). \tag{44}$$

Зображення $\dfrac{\Phi_i(s)}{\Delta(s)}$ є відношення двох трансцендентних функцій. Припускаємо, що функція $\Delta(s)$ є узагальнений поліном, який має прості корені і немає нульового кореня. Аналіз показує, що $\Delta(s)$ дійсних коренів немає і всі його корені уявні. В зв'язку з цим необхідно у відношеннях $\dfrac{\Phi_i(s)}{\Delta(s)}$ необхідно перейти від модифікованих функцій Бесселя до звичайних за формулами

$$I_0(iz)=J_0(z),\ K_0(iz)=-{\pi}/{2}\left[Y_0(z)+iJ_0(z)\right],$$

$$I_1(iz)=iJ_1(z),\ K_1(iz)=-{\pi}/{2}\left[J_1(z)-iY_1(z)\right].$$

У результаті знайдемо

$$\Phi_1(\mu_2)=\frac{\pi^2}{4}h_0\hat{T}_1\left\{-\frac{\mu_2}{R_2}\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{X}_1^{(2)}-h_3\tilde{Z}_0^{(2)}\right]\tilde{X}_0\left(\frac{\mu_1}{R_1}r\right)+\beta\varepsilon\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{Z}_1^{(2)}-h_3\tilde{X}_0^{(2)}\right]\tilde{Z}_0\left(\frac{\mu_1}{R_1}r\right)\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left\{\frac{h_3}{r_*}\hat{T}_2-\frac{\pi}{2}\frac{\mu_2}{R_2}\hat{T}_0\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{X}_1^{(2)}-h_3\tilde{Z}_0^{(2)}\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[\beta Y_1(\mu_1)+h_0 Y_0(\mu_1)\right]J_0(\beta r)-\left[\beta J_1(\mu_1)+h_0 J_0(\mu_1)\right]Y_0(\beta r)\right\},$$

$$\Phi_2(\mu_2)=\frac{\pi^2}{4}\left\{\varepsilon\frac{\mu_2}{R_2}\left[\frac{\pi}{2}\beta r_*\hat{T}_0\left(\beta\tilde{X}_1^{(1)}+h_0\tilde{Z}_0^{(1)}\right)-h_0\hat{T}_1\right]\cdot\left[\left(\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{X}_1^{(2)}-h_3\tilde{Z}_0^{(2)}\right)\tilde{X}_0\left(\frac{\mu_2}{R_2}r\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{Z}_1^{(2)}-h_3\tilde{X}_0^{(2)}\right)\tilde{Z}_0\left(\frac{\mu_2}{R_2}r\right)\right]-h_3\hat{T}_2\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\varepsilon\beta\left(\beta\tilde{X}_1^{(1)}+h_0\tilde{Z}_0^{(1)}\right)\tilde{X}_0\left(\frac{\mu_2}{R_2}r\right)-\frac{\mu_2}{R_2}\left(\beta\tilde{Z}_1^{(1)}+h_0\tilde{X}_0^{(1)}\right)\tilde{Z}_0\left(\frac{\mu_2}{R_2}r\right)\right]\right\}.$$

$$\Delta(\mu_2)=\frac{\pi^2}{4}\left\{\beta\frac{\mu_2}{R_2}\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{Z}_1^{(1)}\tilde{X}_1^{(2)}-\varepsilon\beta\tilde{X}_1^{(1)}\tilde{Z}_1^{(2)}\right]-\beta h_3\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{Z}_1^{(1)}\tilde{Z}_0^{(2)}-\varepsilon\beta\tilde{X}_1^{(1)}\tilde{X}_0^{(2)}\right]+\right.$$
$$\left.+h_0\frac{\mu_2}{R_2}\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{X}_0^{(1)}\tilde{X}_1^{(2)}-\varepsilon\beta\tilde{Z}_0^{(1)}\tilde{Z}_1^{(2)}\right]-h_0h_3\left[\frac{\mu_2}{R_2}\tilde{X}_0^{(1)}\tilde{Z}_0^{(2)}\tilde{X}_1^{(2)}-\varepsilon\beta\tilde{Z}_0^{(1)}\tilde{X}_0^{(2)}\right]\right\}. \quad (45)$$

В останніх формулах введено позначення

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{\mu_2}{R_2}\right)-\left(\chi_1^2-\chi_2^2\right)},\ \mu_1=\beta R_1,\ \mu_1^*=\beta r_*,\ \mu_2^*=\frac{\mu_2}{R_2}r_*,$$

$$\hat{T}_0=-\left(T_0-{}^{t_c}\!/_{a}\right)R_2^2\left[\frac{1}{\mu_2^2}+\frac{1}{\left(\chi_1^2-\chi_2^2\right)R_2^2-\mu_2^2}\right], \quad (46)$$

$$\hat{T}_1=\frac{\left(T_0-{}^{t_c}\!/_{a}\right)R_2^2}{\left(\chi_1^2-\chi_2^2\right)R_2^2-\mu_2^2}-\frac{\left(t_c-t_c^{(0)}\right)R_2^2}{a\left[\left(\chi_2R_2\right)^2+\mu_2^2\right]},\ \hat{T}_2=-\frac{\left(T_0-{}^{t_c}\!/_{a}\right)R_2^2}{\mu_2^2}-\frac{\left(t_c-t_c^{(3)}\right)R_2^2}{a\left[\left(\chi_2R_2\right)^2+\mu_2^2\right]},$$

$$\tilde{X}_0(\frac{\mu_i}{R_i}r)=J_0\left(\frac{\mu_i}{R_i}r\right)Y_0\left(\frac{\mu_i}{R_i}r_*\right)-Y_0\left(\frac{\mu_i}{R_i}r\right)J_0\left(\frac{\mu_i}{R_i}r_*\right),$$
$$\tilde{Z}_0(\frac{\mu_i}{R_i}r)=J_0\left(\frac{\mu_i}{R_i}r\right)Y_1\left(\frac{\mu_i}{R_i}r_*\right)-Y_0\left(\frac{\mu_i}{R_i}r\right)J_1\left(\frac{\mu_i}{R_i}r_*\right), \quad (47)$$
$$\tilde{X}_0^i=J_0(\mu_i)Y_0(\mu_i^*)-J_0(\mu_i^*)Y_0(\mu_i),\ \tilde{X}_1^i=J_1(\mu_i)Y_1(\mu_i^*)-J_1(\mu_i^*)Y_1(\mu_i),$$
$$\tilde{Z}_0^{(i)}=J_0(\mu_i)Y_1(\mu_i^*)-J_1(\mu_i^*)Y_0(\mu_i),\ \tilde{Z}_1^{(i)}=J_1(\mu_i)Y_0(\mu_i^*)-J_0(\mu_i^*)Y_1(\mu_i).$$

Здійснюючи в (42) перехід до оригіналу, враховуючи при цьому формули (45), (46), отримаємо вираз для температури в пластині

$$T(r,\tau)=\left(aT_0-t_c\right)\left\{\left[1-S_+(r-r_*)\right]e^{-a\chi_1^2\tau}+S_+(r-r_*)e^{-a\chi_2^2\tau}\right\}-t_c^{(0)}+$$
$$\sum\frac{1}{A_n}\left\{\Phi_1(\mu_{2n})\left[1-S_+(r-r_*)\right]+\Phi_2(\mu_{2n})S_+(r-r_*)\right\}e^{-a\tau\left[\chi_2^2+\left(\frac{\mu_{2n}}{R_2}\right)^2\right]}, \quad (48)$$

де

$$A_n=-\frac{\pi^2}{8a}\left\{\frac{\mu_{2n}}{R_2}\left(\frac{\mu_{2n}}{R_2}\tilde{X}_{1n}^{(2)}-h_3\tilde{Z}_{0n}^{(2)}\right)\left[R_1\tilde{X}_{0n}^{(1)}-r_*\tilde{X}_{1n}^{(1)}-\frac{h_0}{\beta}\left(R_1\tilde{Z}_{1n}^{(1)}+r_*\tilde{Z}_{0n}^{(1)}\right)\right]-\right.$$
$$-\left(\beta\tilde{Z}_{1n}^{(1)}+h_0\tilde{X}_{0n}^{(1)}\right)\left[h_3\left(R_2\tilde{X}_{1n}^{(2)}-r_*\tilde{X}_{0n}^{(2)}\right)+\frac{\mu_{2n}}{R_2}\left(R_2\tilde{Z}_{0n}^{(2)}+r_*\tilde{Z}_{1n}^{(2)}\right)\right]+$$
$$+\varepsilon\beta\left(\frac{\mu_{2n}}{R_2}\tilde{Z}_{1n}^{(2)}-h_3\tilde{X}_{0n}^{(2)}\right)\left[R_1\tilde{Z}_{0n}^{(1)}+r_*\tilde{Z}_{1n}^{(1)}-\frac{h_0}{\beta}\left(R_1\tilde{X}_{1n}^{(1)}-r_*\tilde{X}_{0n}^{(1)}\right)\right]+ \quad (49)$$
$$\left.+\varepsilon\beta\frac{R_2}{\mu_{2n}}\left(\beta\tilde{X}_{1n}^{(1)}+h_0\tilde{Z}_{0n}^{(1)}\right)\left[h_3\left(R_2\tilde{Z}_{1n}^{(2)}+r_*\tilde{Z}_{0n}^{(2)}\right)+\frac{\mu_{2n}}{R_2}\left(R_2\tilde{X}_{0n}^{(2)}-r_*\tilde{X}_{1n}^{(2)}\right)\right]\right\},$$

$\mu_{2n}-$ корені характеристичного рівняння $\Delta(\mu_2)=0$.

Висновки. Розв'язано задачу нестаціонарної теплопровідності двоступінчастої кільцевої пластинки з кусково-постійним коефіцієнтом тепловіддачі з лицьових поверхонь пластини. За допомогою методу, заснованого на використанні узагальнених функцій, знайдено єдиний для всієї області визначення замкнений розв'язок задачі, який дозволяє знаходити температурні поля, що виникають у процесах відновлювання експлуатаційних властивостей коліс залізничних вагонів.

Conclusions. The task of non-stationary thermal conductivity of the double-staged annular plate with piecewise constant coefficient of heat transfer from the front surfaces of the plate has been solved. Taking advantage of the method, based on using generalized functions, the only for all determination domain closed solution of the task has been found, which makes possible to find temperature fields, which appear in the processes of recovering the operating properties of the railway cars wheels.

Список використаної літератури

1. Подстригач, Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Образцов, И.Ф. Строительная механика скошенных тонкостенных систем [Текст] / И.Ф. Образцов, Г.Г. Онанов. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.
3. Пушак, Я.С. Квазистатическая задача термоупругости для двуступенчатой пластины с круговым отверстием [Текст] / Я.С. Пушак. – Киев: Наукова думка, 1979. – С. 172 – 177.
4. Коляно, Ю.М. Термоупругость круглых многоступенчатых пластин. – В кн.: Математические методы в термомеханике [Текст] / Ю.М. Коляно, Я.С. Пушак. – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 23 – 28.
5. Коляно, Ю.М. Термоупругость двухступенчатых круглых пластин с теплоотдачей [Текст] / Ю.М. Коляно, Я.С. Пушак. – Проблемы прочности, 1978. – №2. – С. 36 – 38.

Отримано 14.05.2013