

УДК 539.3

В. Силованюк, докт. техн. наук; А. Ревенко

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ТОНКИМ В'ЯЗКОПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Резюме. Отримано розв'язок задачі про напружено-деформований стан пружного тіла з тонким в'язкопружним включенням. Для включення еліпсоїдальної форми і матеріалу з реологічними властивостями тіла Кельвіна розв'язок отримано в замкненому аналітичному вигляді. Знайдено напруження у включенні та їх концентрацію в матриці в околі включення.

Ключові слова: в'язкопружність, включення, концентрація напружень.

V. Sylovanyuk, A. Revenko

STRESS CONCENTRATION IN AN ELASTIC BODY WITH A THIN VISCO-ELASTIC INCLUSION

Summary. The known in literature solutions of problems of stress concentration in the vicinity of inclusions, in thin ones, in particular concern the elastic materials of matrix and heterogeneity. In engineering practice the problems arise, for solution of which it is not enough to use the models of elastic bodies only. Such is, for example, the problem of cracks "healing" with injection liquid materials that are able to harden in certain time. As a result the material damaged by cracks hardens and is able to bear certain loads. Since the injection materials are usually high molecular compounds, which are characterized by creep and stress relaxation, the problem of these phenomena consideration within the framework of complex rheological models of materials becomes very urgent.

The elastic space subjected to the effect of constant uniaxial tension and in which a defect is as an ellipsoidal inclusion V , one characteristic size of which is much smaller than the other two, is considered. The inclusion material is considered to be a visco-elastic one. Taking into account the small thickness of the inclusion the boundary conditions from its surface are moved to the middle region. As result the boundary value problem for a space with the cross section along the middle region, on which the appropriate boundary conditions are set, has been obtained.

The solution of the problem for each moment of time is obtained within the static theory of elasticity and is expressed in terms of a harmonic function, which is presented as a Fourier integral expansion. After satisfying boundary conditions a two-dimensional singular integral equation for displacements determination, in which time is presented as a parameter, has been obtained.

After some transformations, the solution of the integral equation is reduced to the Volterra equation $f(t)$. As an example the material the creep of which is described by the generalized Kelvin model is considered. After corresponding calculations the relationships, which characterize the stress relaxation in the inclusion, are obtained. Plots of the stress relaxation in the inclusion and changes of stress concentration with time in its vicinity due to the inclusion material creep are constructed. Calculations testified that the stress concentration increases with time and finally stabilizes at a certain level. It is found that the stress concentration obtained in the elastic and viscoelastic models can vary considerably and it must be taken into account when calculating the long-term strength of the heterogeneous materials containing visco-elastic inclusions.

Key words: viscoelasticity, inclusion, stress concentration.

Умовні позначення:

E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла;

E_1 – миттєвий модуль Юнга матеріалу включення;

$u_z(x, y, t)$ – компонента вектора переміщення точок поверхні включення в напрямку осі z ;

$2h(x, y)$ – товщина включення;
 $R(t)$ – ядро релаксації;
 $H(t)$ – ядро повзучості;
 V – поверхня включення.

Вступ. При відновленні несучої здатності елементів будівельних споруд тривалої експлуатації пошкоджених тріщинами та порожнинами знаходить все ширше застосування технологія, яка полягає у заповненні дефектних зон в'язкопружними рідкими матеріалами, здатними тверднути через певний час. Розрахунки короткочасної міцності підсилених таким способом елементів конструкцій свідчать про ефективність цієї методики [1]. Ін'єкційними матеріалами, як правило, є високомолекулярні сполуки (поліуретани, акрили, епоксидні смоли), характерною властивістю яких є повзучість. Тому важливим є дослідження не тільки короткочасної [1, 2], але й довготривалої міцності відновлених за такою методикою елементів конструкцій, що містять включення (тріщини, порожнини заповнені в'язкопружним матеріалом).

Встановимо вплив релаксації напружень у включенні на концентрацію напружень у матриці.

Постановка задачі. Розглянемо одноосний розтяг пружного тіла, що містить дефект у вигляді тріщини або порожнини, в якій один характерний розмір набагато менший від двох інших. З метою зміцнення тіла порожнину заповнили ін'єкційним матеріалом [1], здатним утворювати після затвердіння міцні адгезійні зв'язки з основним матеріалом (рис. 1).

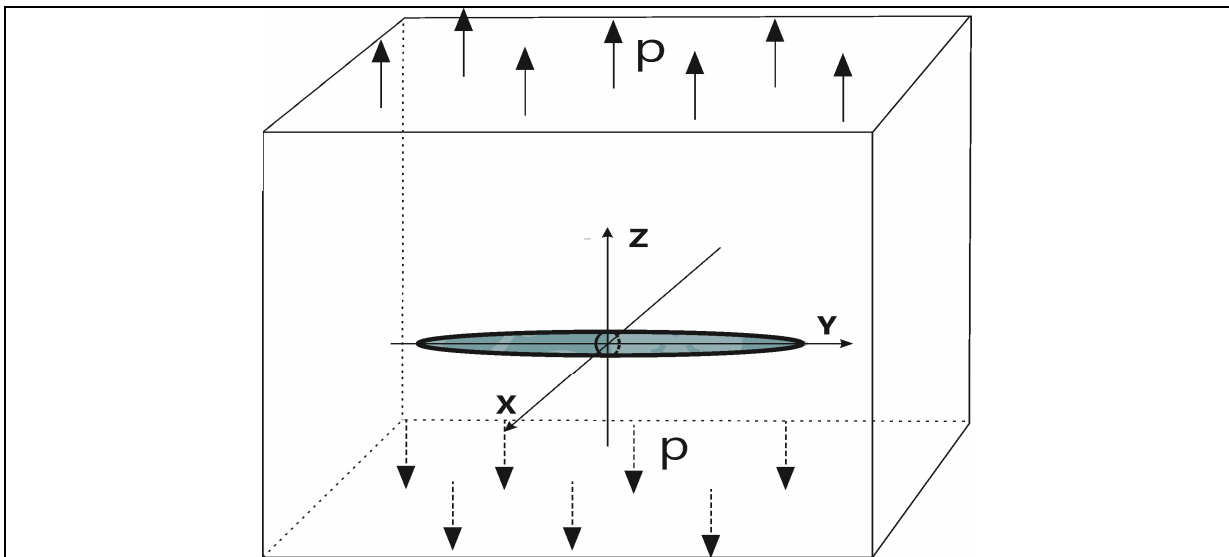


Рисунок 1. Одноосний розтяг тіла з тонким еліпсоїдальним включенням

Figure 1. Uniaxial tension of a body with a thin ellipsoidal inclusion

Для податливого в'язкопружного включення, яке утворилося, використаємо залежність, що пов'язує напруження і деформації у ньому в такому вигляді [3]:

$$\sigma_{zz}(x, y, t) = E_1 \left(\varepsilon_{zz}(x, y, t) + \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_{zz}(x, y, \tau) d\tau \right). \quad (1)$$

Розглянемо включення еліпсоїдальної форми $V: x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$, де a, b, c – півосі еліпсоїда $a, b \gg c$. Деформацію матеріалу включення, враховуючи малу товщину та гладкість його поверхні, подамо у вигляді $\varepsilon_{zz}(x, y, t) = \frac{u_z(x, y, t)}{h(x, y)}$, де

$h(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Уявно виріжемо із тіла матеріал заповнювача. Його дію на основний матеріал замінимо деякими напруженнями на поверхні порожнини, а саме:

$$\sigma_{zz}(x, y, t) = \frac{E_1}{h(x, y)} \left(u_z(x, y, t) + \int_0^t R(t - \tau) u_z(x, y, \tau) d\tau \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{xz}(x, y, t) = \sigma_{yz}(x, y, t) = 0.$$

Співвідношення (2) отримано на основі залежності (1) і припущень про малу товщину включення та податливість матеріалу заповнювача ($E_1 \leq E$). Зносячи граничні умови з поверхні V на серединну поверхню включення $S: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, отримаємо крайову задачу для простору з розрізом S , на якому задані граничні умови (2). Оскільки інерційними членами в рівняннях руху тіла, що виникають унаслідок повзучості матеріалу включення, можна знехтувати, то розв'язок задачі для кожного моменту часу можна отримати в межах статичної теорії пружності. Розв'язок задачі виражаємо через одну гармонічну функцію $\phi(x, y, z, t)$ [2]

$$u_z(x, y, z, t) = -\frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z, t) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Подамо функцію ϕ у вигляді інтегрального розкладу Фур'є

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta, t) \exp\left(-|z|\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i(x\xi + y\eta)\right) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (4)$$

де

$$A(\xi, \eta, t) = \frac{E}{8\pi^2(1 - \nu^2)} \iint_S u_z(x, y, t) \exp(-i(x\xi + y\eta)) dx dy. \quad (5)$$

Інтегральне рівняння задачі для визначення переміщень та його розв'язок отримаємо з граничної умови для нормальних напружень (2), враховуючи співвідношення (3), (5) та $u_z^* = u_z - u_z^0$ в області S

$$\nabla_{xy}^2 \iint_S \frac{u_z^*(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = \frac{4\pi(1 - \nu^2)}{E} \left\{ \frac{E_1}{h(x, y)} [u_z^*(x, y, t) + \int_0^t K(t - \tau) \cdot u_z^*(x, y, \tau) d\tau] + \frac{E_1 p}{E} \int_0^t K(t - \tau) d\tau + \frac{E_1 p}{E} - p \right\}, \quad (6)$$

де u_z^0 – переміщення поверхні V у випадку однорідного (без включення) тіла;

$u_z^0 = \frac{pc}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Розв’язок рівняння (6) шукаємо у вигляді

$$u_z^*(x, y, t) = \frac{f(t)pb}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (7)$$

де $f(t)$ – невідома функція від часу.

Підставивши переміщення (7) в інтегральне рівняння (6), після деяких перетворень отримаємо рівняння Вольтера для визначення функції $f(t)$

$$\chi_1 f(t) + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau - p_1(t) = 0, \quad (8)$$

де $\chi_1 = \frac{E(k) + 2(1-v^2)\epsilon b_1}{2(1-v^2)b_1\epsilon}$; $b_1 = \frac{b}{c}$, $\epsilon = \frac{E_1}{E}$; $p_1(t) = -\frac{c}{b} \int_0^t R(t-\tau) d\tau + b_2$; $b_2 = \frac{1-\epsilon}{\epsilon b_1}$;

$$E(k) = \int_0^{1/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad k = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Для розв’язання інтегрального рівняння (8) використаємо перетворення Лапласа [4] і після врахування формули згортки отримаємо

$$\tilde{f}(s) = \frac{\tilde{p}_1(s)}{\chi_1 + \tilde{R}(s)}, \quad (9)$$

де $\tilde{p}_1(s) = -\frac{c}{b} \tilde{R}(s) + b_2 \frac{1}{s}$; значком \sim позначені трансформанти Лапласа. Якщо до подання (9) застосувати обернене перетворення Лапласа, то знайдемо шукану функцію $f(t)$. Зв’язок між трансформантами ядер повзучості й релаксації має вигляд

$$\tilde{R}(s) = -\frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{H}(s) + 1}, \quad (10)$$

де $H(t)$ – ядро повзучості [3].

Деформацію матеріалу включення розраховуємо за формулою

$$\varepsilon_{zz}(x, y, t) = \frac{(u_z^* + u_0)}{h} = \frac{p(1 + b_1 f(t))}{E}. \quad (11)$$

Напруження у включенні згідно із залежністю (1) будуть такими:

$$\sigma_{zz}(x, y, t) = p\epsilon \left(1 + b_1 f(t) + \int_0^t R(t-\tau) (1 + b_1 f(\tau)) d\tau \right). \quad (12)$$

З умови сумісної деформації матеріалів матриці і включення на поверхні V та закону Гука, записаного для напружено-деформованого стану матриці, напруження в околі включення встановлені у вигляді залежності

$$\sigma_{zz}(x, y, t) = p(1 + b_1 f(t)) \quad (13)$$

Узагальнений матеріал Кельвіна. В цьому випадку ядро повзучості має вигляд [3]

$$H(t) = \mu_1 e^{-\beta_1 t} + \mu_2 e^{-\beta_2 t}, \quad (14)$$

де $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ – реологічні характеристики матеріалу. Використовуючи методику обернення ядер, знайдемо зображення ядра повзучості:

$$\tilde{H}(s) = \frac{\mu_1}{\beta_1 + s} + \frac{\mu_2}{\beta_2 + s}$$

На основі формули (10) отримаємо зображення ядра релаксації $R(t)$

$$\tilde{R}(s) = -\frac{a_1 s + a_2}{s^2 + d_1 s + d_2}, \quad (15)$$

де $a_1 = \mu_1 + \mu_2$, $a_2 = \mu_1 \beta_2 + \mu_2 \beta_1$, $d_1 = \mu_1 + \mu_2 + \beta_1 + \beta_2$, $d_2 = \mu_1 \beta_2 + \mu_2 \beta_1 + \beta_2 \beta_1$.

Врахувавши вирази (15), із рівняння (9) знайдемо зображення функції $\tilde{f}(s)$

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s} A \left\{ 1 + \frac{a_1 s + a_2}{\chi_1 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \right\} - \frac{c}{b s}, \quad (16)$$

де $A = \frac{m_1}{\chi_1}$, $m_1 = \frac{c}{b} \chi_1 + b_2$, $\lambda_1 = -b_3 + \sqrt{b_3^2 - b_4}$, $\lambda_2 = -\lambda_1 - 2b_3$, $b_3 = \frac{d_1}{2} - \frac{a_1}{2\chi_1}$,

$$b_4 = d_2 - \frac{a_2}{\chi_1}.$$

На основі формул знаходження оригіналів [4] із співвідношення (16) отримаємо

$$f(t) = A_0 + A \{ A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \}, \quad (17)$$

де $A_0 = A \left\{ 1 - \lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1} \right\} - \frac{c}{b}$, $A_1 = \frac{a_4 + \lambda_1 a_3}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}$, $A_2 = \frac{a_4 + \lambda_2 a_3}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}$.

На рис. 2 наведені графіки, що показують релаксацію напружень у включеннях, повзучість матеріалу яких описується узагальненою моделлю Кельвіна. В розрахунках, проведених згідно з формулами (12), (17), взято відношення миттєвого модуля Юнга матеріалів включення до модуля Юнга основного матеріалу $\varepsilon = 0,4$; параметр форми включення $b_1 = 15$. Реологічні характеристики матеріалів включень такі: $\beta_1 = 1,2$;

$\mu_2 = 0,6$; $\beta_2 = 1$. $\sigma_{zz}^0 = \frac{p\varepsilon(E(k) + 2b_1(1 - \nu^2))}{2b_1\varepsilon(1 - \nu^2) + E(k)}$ – миттєве значення напружень у

включенні.

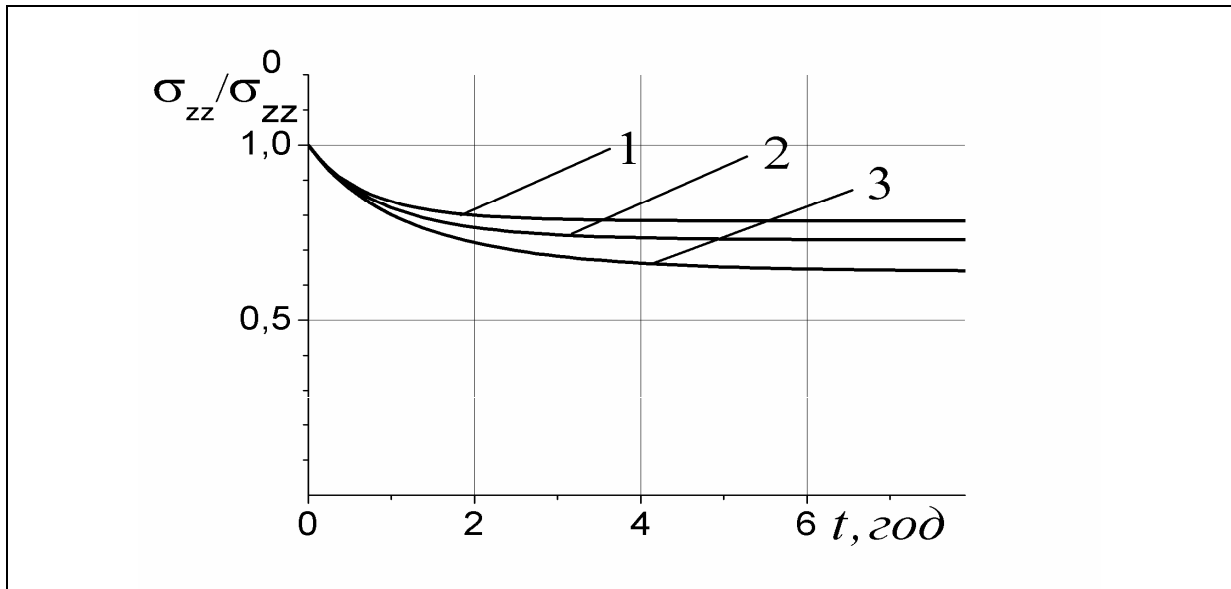


Рисунок 2. Релаксації напружень у тонкому в'язкопружному включенні:
 1 – $\mu_1 = 0,4$; 2 – $\mu_1 = 0,5$; 3 – $\mu_1 = 0,7$

Figure 2. Stress relaxation in a thin visco-elastic inclusion:
 1 – $\mu_1 = 0,4$; 2 – $\mu_1 = 0,5$; 3 – $\mu_1 = 0,7$

На рис. 3 на основі формули (13) графічно зображено ріст концентрації напружень в околі включення з часом унаслідок повзучості матеріалу.

$$\sigma_{zz}^* = \frac{p(E(k) + 2b_1(1 - \nu^2))}{2b_1\varepsilon(1 - \nu^2) + E(k)}$$

– миттєве значення напружень в околі включення.

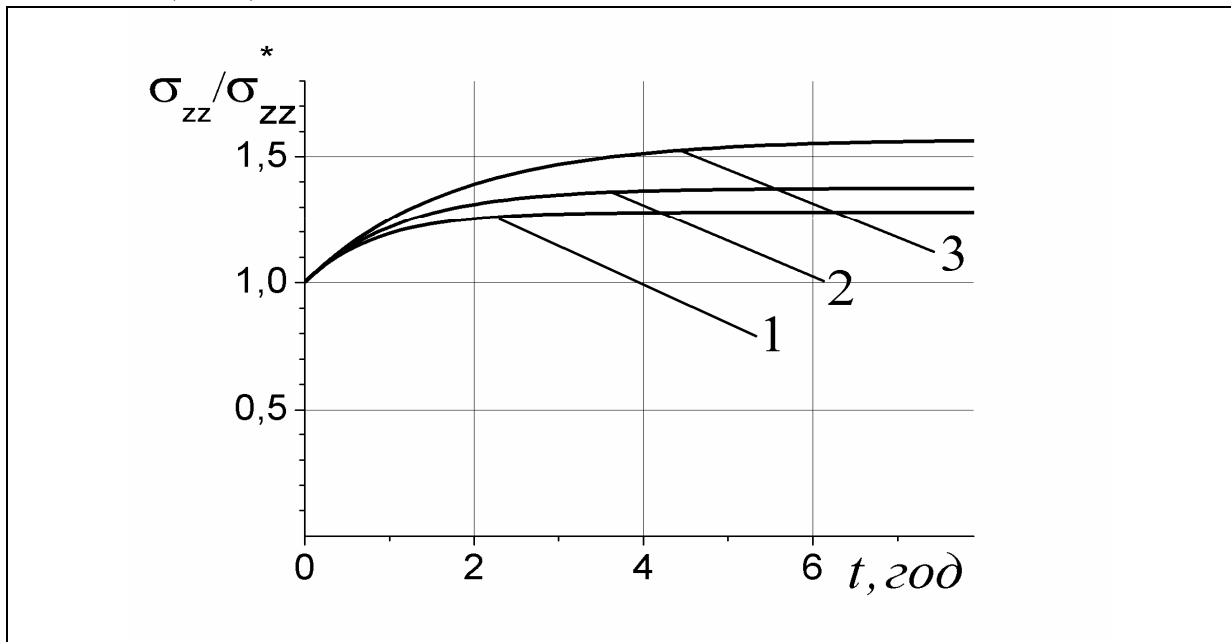


Рисунок 3. Ріст концентрації напружень в околі в'язкопружного включення:
 1 – $\mu_1 = 0,4$; 2 – $\mu_1 = 0,5$; 3 – $\mu_1 = 0,7$

Figure 3. Increase of stress concentration in the vicinity of the visco-elastic inclusion:

$$1 - \mu_1 = 0,4. \quad 2 - \mu_1 = 0,5. \quad 3 - \mu_1 = 0,7.$$

Із наведених даних бачимо, що повзучість матеріалу включення викликає зменшення рівня напружень у ньому. Це, в свою чергу, призводить до зростання напружень в основному матеріалі з часом при дії зовнішнього тривалого навантаження. Напруження в матриці зростають від значень їх миттєвої концентрації в початковий момент прикладання зовнішніх зусиль до певних стабільних рівнів напружень, які визначаються реологічними параметрами матеріалу включення.

Висновки. Повзучість в'язкопружного матеріалу включення призводить до релаксації напружень у ньому, що суттєво впливає на напружено-деформований стан тіла, яке перебуває під дією довготривалих статичних навантажень. Концентрація напружень біля в'язкопружного включення, матеріал якого відповідає реологічним властивостям тіла Кельвіна, зростає з плином часу і, нарешті, стабілізується на певному рівні. Концентрація напружень, отримана в рамках пружної і в'язкопружної моделей, може бути суттєво різною, що необхідно враховувати при розрахунках довготривалої міцності неоднорідних матеріалів.

Conclusions. The creep of visco-elastic material of the inclusion leads to stresses relaxation in it, which have significant effect on the stress-strain state of the body which is subjected to long-term static loads. The stress concentration near visco-elastic inclusion, material of which corresponds to the rheological properties of the Kelvin body, increases with time and finally stabilizes at a certain level. The stress concentration obtained in the elastic and visco-elastic models can be significantly different, which should be considered while calculating the long-term strength of the heterogeneous materials.

Список використаної літератури

1. Маруха, В.І. Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідниковий посібник [Текст] / В.І. Маруха, В.В. Панасюк, В.П. Силованюк; за ред. В.В. Панасюка. Том 12: Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 260 с.
2. Панасюк, В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями [Текст] / В.В. Панасюк, М.М. Стадник, В.П. Силованюк. – К.: Наук. думка, 1986. – 215 с.
3. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 831 с.

Отримано 04.01.2013